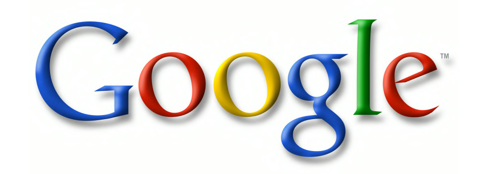


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

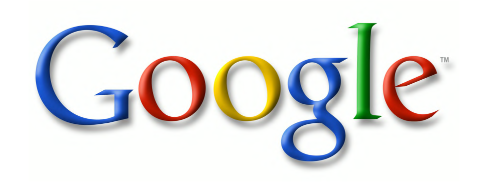
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

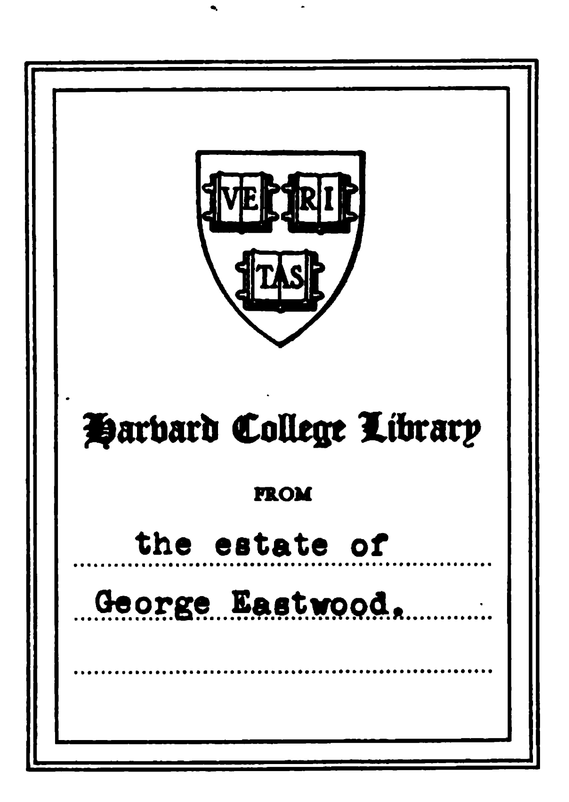
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

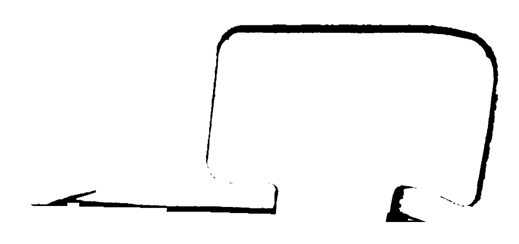
+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



SCIENCE CENTER LIBRARY



JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

Tome 5 + 6

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix
Ex-directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Avec la collaboration

DE MM.

AUG. MOREL, COCHEZ ET BOQUEL
Professeurs de Mathématiques

TOME CINQUIÈME



ANNÉE 1881

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1880

Sci880.60

~~VI, 3595~~

HARVARD COLLEGE LIBRARY
From
the Estate of
George Eastwood,
4 Feb., 1887.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

Élémentaires et Spéciales

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Landry.**

PROCÉDÉ NOUVEAU POUR DÉTERMINER LES VALEURS NUMÉRIQUES DES RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION $x^2 + px + q = 0$, p ET q ÉTANT DES NOMBRES ENTIERS *positifs* OU *négatifs*.

I. — Comment se pose la question.

Dans nos travaux (*) sur la décomposition des nombres, nous avons eu à déterminer n' à l'aide de deux équations telles que

$$n + n' = p, \quad nn' = q \quad \text{ou } n - n' = p, \quad nn' = q.$$

L'élimination de n, dans l'un ou dans l'autre cas, conduit à une équation du second degré dont la résolution donne n'. Mais le calcul qui exige la formation du carré de $\frac{p}{2}$ suivie d'une extraction de racine nous ayant paru trop laborieux lorsque *p est un nombre considérable*, nous avons été amené à chercher une autre méthode. C'est cette méthode que nous nous proposons d'exposer aujourd'hui, après nous en être servi pendant de longues années.

L'équation $x^2 + px + q = 0$, se résoudra par le premier des deux procédés que nous allons exposer si, dans cette équation, q est *positif* et que les racines soient réelles ; et, par le second si q est *négatif*.

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, septembre 1880, p. 417.

II. — Résolution de n + n′ = p, nn′ = q, n′ *étant, au plus, égal à* n.

La réalité des racines exige que $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ soit, au moins, égal à q. Mais il n'est pas indispensable de s'en assurer.

Nous supposons que p est un nombre *positif* ainsi que q; mais, s'il était *négatif*, les racines seraient toutes deux *négatives;* et l'on déterminerait, de la même manière, leurs valeurs numériques, après avoir fait $n = - n_1$, $n' = - n'_1$.

Voici la méthode :

On pose $n' = a + n'_1$, a étant la partie de n' exprimée par son premier chiffre, celui de ses plus hautes unités. Il en résulte

$$n = p - a - n'_1, \quad nn' = (p - a - n'_1)(a + n'_1);$$

puis $$(p - 2a - n'_1)n'_1 = q - (p - a)a = q'.$$

Si on fait alors

$$p - 2a = p', \quad p - 2a - n'_1 = n_1,$$

il vient $$n_1 + n'_1 = p', \quad n_1 n'_1 = q',$$

c'est-à-dire que l'on obtient, pour déterminer n_1, n'_1, deux équations semblables à celles qui sont données pour déterminer n et n'. Notons, de plus, cette concordance

$$n_1 = n - a, \quad n'_1 = n' - a.$$

On pourra donc découvrir le second chiffre de n', comme on aura découvert le premier, et ainsi de suite.

Pour trouver a, on divise q par p; mais, comme pour avoir la valeur exacte de n' il faudrait diviser q par $p - n$ et non par p, le premier chiffre donné par la division peut être trop petit, puisqu'on emploie un diviseur trop grand. On devra donc essayer, successivement, les nombres entiers immédiatement supérieurs à ce chiffre, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui serait trop grand.

Dans le cas des racines imaginaires, on se trouve immédiatement averti par l'impossibilité de déterminer a.

Les quelques essais auxquels le travail peut donner lieu, sont en très petit nombre, puisque, le diviseur employé p étant au moins le double de n', le rapport $\frac{p}{p - n'}$, que

l'on peut mettre sous la forme $\dfrac{1}{1-\dfrac{n'}{p}}$, est compris entre 2 et 1.

Dans la division partielle qui suit, on a

$$\frac{p'}{p'-n'_1}=\frac{p'}{n_1}=\frac{n_1+n'_1}{n_1}=1+\frac{n'_1}{n_1}=1+\frac{n'-a}{n-a}.$$

Or c'est un principe démontré que, si les deux termes d'une fraction $\dfrac{n'}{n}$ $(n' < n)$ varient en moins d'une même quantité, la valeur de cette fraction diminue. Le rapport des deux diviseurs p', $p'-n'_1$, sera donc plus près de l'unité que celui des deux diviseurs p, $p-n'$; et ainsi de suite pour les divisions partielles qui suivent. Ainsi, dans l'application du procédé, les diviseurs successifs π, $\pi-\nu'$ tendent vers l'égalité.

On peut voir, dans l'exemple qui suit, la marche et la simplicité du calcul.

$n+n'=$		$nn'=$
3842		1330945
3		10626
3542		26834
3		25296
3242		15385
8		15385
3162		0
8		
3082		
5		
3077		
5		
$n'=385$,		$n=3457$,

Si les racines n'étaient pas des nombres entiers, on pourrait poursuivre l'opération. Ce sera l'objet du paragraphe IV.

III. — *Résolution de* $n-n'=p$, $nn'=q$.

Les lettres p et q représentent toujours des nombres entiers *positifs*; mais si p était *négatif*, on aurait, en changeant les signes, $n'-n=-p$; et l'application du procédé resterait la même.

On pose, comme précédemment, $n' = a + n'_1$, et il vient

$$(a + n'_1)(p + a + n'_1) = q,$$
$$(p + 2a + n'_1)n'_1 = q - a(p + a) = q';$$

de sorte que, si l'on fait $p + 2a = p'$, $p + 2a + n'_1 = n_1$, on trouve $n_1 - n'_1 = p'$, $n_1 n'_1 = q'$.

La seule difficulté qui se présente alors est de trouver a, c'est-à-dire le premier chiffre de la valeur de n'. La raison en est que, p pouvant différer beaucoup de $p + n'$, la division de q par p ne peut pas toujours donner a avec une approximation suffisante, comme dans le paragraphe qui précède.

Voici, dès lors, le moyen auquel on aura recours.

On fera, successivement, dans $(p + n')\,n' = q$, $n' = 10$, 100, 1000 ... etc., jusqu'à ce que l'on trouve que n' est compris entre 10^α et $10^{\alpha + 1}$

On cherchera, ensuite, entre quels termes de la série

$$1.10^\alpha, \quad 2.10^\alpha, \quad 3.10^\alpha \ldots \text{etc.}$$

se trouve comprise la valeur de n'.

Si elle est comprise entre $b10^\alpha$ et $(b + 1)10^\alpha$, $b10^\alpha$ sera la valeur de a. Le calcul se poursuivra alors comme dans le cas précédent.

Ainsi, pour avoir le second chiffre de n', on divisera q' par p'. Seulement le chiffre obtenu peut être trop grand, puisqu'on emploie un diviseur trop petit p' au lieu de $p' + n'_1$, tandis que, dans le paragraphe II, c'est le contraire qui avait lieu.

Les essais à faire, s'il y en a, se réduisent à fort peu de chose, puisque le rapport des deux diviseurs, qui est $\dfrac{p'}{p' + n'}$ ou $\dfrac{1}{1 + \dfrac{n_1}{p + 2a}}$, est compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 1, n'_1 étant moindre que a.

Pour les divisions partielles qui doivent donner les autres chiffres, le rapport des deux diviseurs que l'on a successivement à considérer, π et $\pi + \nu'$, est $\dfrac{\pi}{\pi + \nu'}$ ou $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\nu'}{\pi}}$.

Or ce rapport se rapproche constamment de l'unité, et même

très rapidement, puisque, d'une opération à l'autre, ν' diminue, tandis que π augmente. Il en résulte que ces deux diviseurs tendent constamment vers l'égalité.

Soit pris pour exemple $n - n' = 1002$, $nn' = 9874123$. On a $(1002 + n')\,n' = 9874123$; et l'on trouve d'abord que n' est compris entre 1000 et 10000. On trouve, ensuite, que sa valeur est comprise entre 2000 et 3000. Ainsi $a = 2.10^3$. Voici, dès lors, le calcul :

1002	9874 123
2	6004
3002	38701
2	33612
5002	50892
6	50256
5602	6363
6	6363
6202	0
8	
6282	
8	
6362	
1	
6363	
1	

IV. — Du cas où, n' *n'étant pas un nombre entier, on veut poursuivre l'opération pour déterminer les premiers chiffres de la partie décimale.*

Le calcul se poursuit, dans les deux cas, de la manière indiquée pour chacun d'eux. Mais l'observation faite aux paragraphes II et III sur les diviseurs π, $\pi \mp \nu'$, trouve, ici, une application heureuse.

En effet, puisque ces diviseurs tendent vers l'égalité, il doit venir un moment où, suivant le degré d'approximation que l'on veut obtenir, on peut terminer le calcul par une dernière division, en divisant par π, ce qui est une grande simplification.

Seulement il devient nécessaire de se rendre compte de la différence qui peut exister entre le quotient que l'on

obtient en divisant un nombre donné N par π, et celui que l'on obtiendrait si on le divisait par $\pi - \nu'$ ou par $\pi + \nu'$.

La différence serait

$$\Delta_1 = \frac{N}{\pi - \nu'} - \frac{N}{\pi} = \frac{N\nu'}{\pi(\pi - \nu')}$$

ou

$$\Delta_2 = \frac{N}{\pi} - \frac{N}{\pi + \nu'} = \frac{N\nu'}{\pi(\pi + \nu')}.$$

Soit pris, au lieu de ν', le nombre exprimé par son premier chiffre augmenté de 1, et soit ν_1' ce nombre. Comme ν'_1 est plus grand que ν' et, par conséquent aussi, plus grand que $\frac{\nu}{\pi}$, la différence des deux quotients sera moindre que $\frac{\nu_1'^2}{\pi \mp \nu'}$. Et, si l'on prend, au lieu de $\pi \mp \nu'$, le nombre π, exprimé par le premier chiffre de π, on aura définitivement, pour apprécier l'erreur commise, l'expression très simple $E < \frac{\nu_1'^2}{\pi_1}$.

L'exemple suivant fera voir l'avantage considérable qui résulte de cette modification au procédé, avantage d'autant plus marqué, on le comprend, que π sera plus grand.

Appliquons à $n + n' = 237$, $nn' = 11453$, la méthode du paragraphe II. Nous trouvons:

237	101,78
6	5
177	101,775
6	5
117	101,770
7	3
110	101,7697
7	3
103	101,7694
6	2
102,4	101,76938
6	2
101,8	101,76936
1	6
101,79	101,769354
1	6
101.78	

```
11453
1062
 833
 770
  63
  61,44
   1,56
   1,0179
   0,5421
    508875
   0,033225
     3053091
   0,00269409
      20353876
   0,0006587024
       610616124
   0,000048086276
```

On aurait donc $n' = 67,615326\ldots$ $n = 169,384673\ldots$

On voit que le calcul se complique parce que le diviseur augmente d'un chiffre, d'une division à l'autre.

Mais, si l'on s'arrête, dans le travail, au chiffre 1 des centièmes, que donne la division de 1,56 par 101,79, et que l'on continue la division du reste 0,5421 par ce diviseur, l'erreur sera moindre que $\frac{2^2}{100.10^2}$ ou $\frac{4}{1000000}$. C'est-à-dire que l'erreur très faible ne pourra porter que sur le sixième chiffre décimal après la virgule. Voici cette division finale de 0,5421 par 101,79.

```
54,21            10179
54,210           0,005325
 3,3150
 0,26130
 0,057720
    6825
```

Ces chiffres décimaux complémentaires auraient donc donné $n' = 67,615325$, au lieu de $n' = 67,615326\ldots$

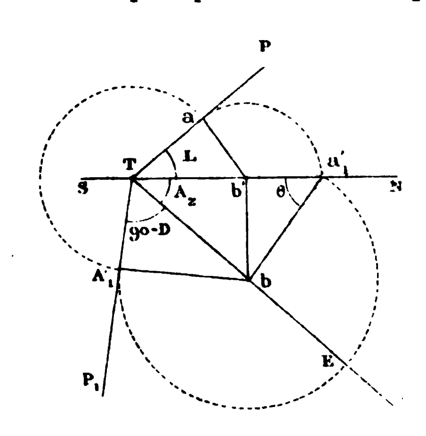
Avec une valeur un peu plus grande pour π, il suffirait généralement de s'arrêter, dans le premier travail, au chiffre des dixièmes.

NOTE DE COSMOGRAPHIE

Par M. S. B.

Etant données la déclinaison d'une étoile et la latitude d'un lieu, calculer la durée de la présence de l'étoile au-dessous de l'horizon du lieu, en temps sidéral.

Prenons pour plan horizontal le plan de l'horizon du lieu, pour plan vertical celui du méridien. La ligne de terre SN est la méridienne. Soit T la Terre, TP la droite allant au pôle nord, et située sur le plan vertical ; l'angle PTN est la latitude du lieu. Soit TE la droite allant de la Terre à l'étoile *au moment de son lever.* ETP est le plan horaire de l'étoile ; ses traces sont TE et TP. L'angle de ce plan avec le méridien (plan vertical), converti en temps à raison de 1^h pour $15°$, mesure la demi-durée de la présence de l'étoile au-dessous de l'horizon. Soit θ cet angle, dont la figure indique la construction ordinaire ; rabattons le plan dans le plan horizontal autour de TE. Le triangle $bb'a'_1$ donne



$$\cos\theta = \frac{b'a'_1}{ba'_1}. \qquad (1)$$

Or, dans le triangle $Ta'b'$, on a

$$b'a' = b'a'_1 = Ta' \operatorname{tg} \lambda;$$

puis, par le triangle TbA_1, on a

$$bA'_1 = ba'_1 = TA'_1 \operatorname{tg} ETP_1 = Ta' \operatorname{tg} ETP_1.$$

Or, l'angle ETP_1 est la distance polaire de l'étoile, c'est-

à-dire le complément de la déclinaison; donc

$$ba'_1 = Ta' \times \frac{1}{\operatorname{tg} \delta};$$

substituant dans l'équation (1), on trouve

$$\cos \theta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \delta.$$

La discussion se ferait comme on l'a déjà vu dans un article précédemment publié (*4e Année*, p. 443).

La même figure permet de calculer l'azimuth de l'étoile à son lever, azimuth représenté par l'angle NTE. Car le triangle bb'T donne $\cos Az = \frac{Tb'}{Tb}$.

On a d'autre part $$Tb = \frac{Ta'}{\cos \lambda},$$

$$Tb' = \frac{Ta'}{\sin \delta}.$$

En substituant, on trouve

$$\cos Az = \frac{\sin \delta}{\cos \lambda}.$$

Pour une déclinaison nulle, on trouve

$$\cos Az = 0, \qquad Az = 90^{\circ}.$$

Pour une latitude complémentaire de la déclinaison, on trouve $$\cos \lambda = \sin \delta,$$
d'où $$\cos Az = 1, \qquad Az = 0.$$

En effet, l'étoile affleure alors l'horizon, sans se coucher.

Lorsque $\lambda < 90 - D$, cos Az est plus grand que 1; donc Az est imaginaire; en effet, dans ce cas l'étoile reste toujours au-dessus de l'horizon.

Si on substitue au temps sidéral le temps solaire, on trouve la demi-durée de la nuit, c'est-à-dire l'heure du lever du soleil (heure vraie). On admet alors que la déclinaison et la vitesse du mouvement en ascension droite restent constantes pendant toute la durée du jour.

Etant données deux des quatre quantités: latitude, déclinaison du soleil, azimuth au lever et heure du lever, on peut, avec les deux formules précédentes, ou directement, calculer les deux quantités inconnues.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **P. A. G. Colombier,** professeur à Sainte-Barbe.

DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DU NOMBRE DES DIVISIONS A EFFECTUER DANS LA RECHERCHE DU P. G. C. D. DE DEUX NOMBRES.

1. **Théorème.** — *Si deux nombres entiers,* A *et* B, *ont pour diviseurs communs les nombres* α, β, γ,... *quelconques, deux à deux, le plus petit multiple commun,* M, *de ces diviseurs est un diviseur du p. g. c. d.* D *de* A *et* B.

Démonstration. — Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\alpha = 2^3 \cdot 7^2,$$
$$\beta = 2^5 \cdot 3^4,$$
$$\gamma = 2^2 \cdot 11^3.$$

On en déduit immédiatement que

$$M = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^3.$$

Par hypothèse, les quatre nombres 2^5, 3^4, 7^2, 11^3, sont des diviseurs de α, β, γ, lesquels sont des diviseurs communs de A et B; donc ces quatre nombres sont des diviseurs communs de A et B; par suite ces quatre nombres sont des diviseurs du p. g. c. d. D de A et B. Mais ces quatre nombres sont premiers deux à deux, donc D est divisible par le produit M de ces quatre nombres; c. q. f. d.

2. **Corollaire.** — A et B étant des multiples de D, et D étant un multiple de M, d'après le paragraphe 1, il s'ensuit que A et B sont des multiples de M.

3. **Théorème.** — *Si, dans la recherche du p. g. c. d.* D, *de deux nombres entiers* A *et* B (A > B), *on prend chaque reste,* inférieur *à la moitié du diviseur qui l'a fourni, et si on désigne par* n *le nombre des divisions effectuées, on aura*

$$2^{n-1} < \frac{B}{D}.$$

Démonstration. — Désignons par

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots \quad R_{n-2}, \quad R_{n-1}, \quad R_n$$

les n restes successifs de ces n divisions. Il est évident que l'on a $R_n = o$, $R_{n-1} = D$, que chacun des autres restes est moindre que la moitié du diviseur qui l'a fourni, et que l'avant-dernier reste, R_{n-1} seul, est égal ou inférieur à la moitié du diviseur R_{n-2} qui lui correspond. Cela posé, on a

$$R_1 < \frac{B}{2},$$

$$R_2 < \frac{R_1}{2},$$

$$\cdots$$

$$R_{n-2} < \frac{R_{n-3}}{2},$$

$$R_{n-1} \text{ ou } D \leq \frac{R_{n-2}}{2}.$$

Multipliant ces relations membre à membre et réduisant il vient

$$D < \frac{B}{2^{n-1}},$$

d'où

$$2^{n-1} < \frac{B}{D}, \qquad \text{c. q. f. d.} \qquad (1)$$

4. **Discussion.** — 1° L'inégalité (1) contient deux inconnues, n et D. On peut toujours déterminer D en décomposant A et B en facteurs premiers; alors, si on désigne par B′ le quotient de la division de B par D, l'inégalité (1) pourra être mise sous la forme

$$2^{n-1} < B'. \qquad (2)$$

2° Il peut se faire qu'on ne veuille pas déterminer D par le moyen que nous venons d'indiquer. Alors on examinera si A et B ont ou n'ont pas des diviseurs communs apparents. — Si A et B ont des diviseurs communs apparents α, β, γ,... la décomposition des nombres en facteurs premiers donnera le plus petit multiple commun M de ces diviseurs apparents; et les propositions exprimées dans les paragraphes I et II permettront d'écrire

$$B = MB'',$$
$$D = MD';$$

dès lors l'inégalité (1) pourra être remplacée par

$$2^{n-1} < \frac{B''}{D''};$$

comme D″ est une inconnue et que

$$D'' \geq 1,$$

il s'ensuit qu'on aura $2^{n-1} < B''$, (3)

inégalité où il n'y a que la seule inconnue n. — Si A et B n'ont pas de facteurs communs apparents, comme on a

$$D \geq 1,$$

on pourra remplacer l'inégalité (1) par la suivante

$$2^{n-1} < B, \quad (4)$$

inégalité où il n'y a que la seule inconnue n.

5. **Observations.** — Quelle que soit celle des inégalités (2), (3), (4) que l'on considère, on voit que pour trouver une limite supérieure de n, il faut chercher l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui est contenue dans un nombre entier donné. — Il est avantageux que ce nombre donné, qui est une limite supérieure de 2^{n-1}, soit le plus petit possible, afin que la limite supérieure de $n - 1$ soit aussi la plus petite possible. Comme on a généralement $B' < B'' < B$,

on voit que l'inégalité (2) est préférable à l'inégalité (3), et que cette dernière est préférable à l'inégalité (4).

6. **Théorème.** — *Si 2^{α} est la plus petite puissance de 2, qui n'est pas inférieure à B, le nombre entier α est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.*

Démonstration. — Par hypothèse, on a :

$$2^{\alpha-1} < B \leq 2^{\alpha} ;$$

si on a égard à l'inégalité (4), il vient :

$$2^{n-1} < 2^{\alpha},$$

d'où $n - 1 < \alpha$

ou bien $n < 1 + \alpha;$ (5)

par suite $n \leq \alpha$

ce qui montre que α est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

7. **Historique.** — La formule (5) est due à J. Binet. Elle

suppose que tous les restes sont moindres que les moitiés des diviseurs correspondants. On obtient toujours ce résultat en prenant certains quotients par excès.

8. **Théorème.** — *Si* K *désigne le nombre des chiffres de* B, *c'est-à-dire du plus petit des deux nombres donnés* A *et* B, *on aura*

$$n < 1 + \frac{10}{3} K. \qquad (6)$$

Démonstration. — On a $B < 10^k$;
par suite l'inégalité (4) donne

$$2^{n-1} < 10^k ;$$

on peut vérifier que $10^3 < 2^{10}$;
ces deux dernières inégalités donnent respectivement

$$2^{3(n-1)} < 10^{3k}$$

$$10^{3k} < 2^{10k} ;$$

d'où $2^{3(n-1)} < 2^{10k}$;
par suite $3(n-1) < 10k$;
résolvant cette inégalité par rapport à n, on trouve la relation à démontrer (6).

9. **Corollaire.** — La formule (6) montre, spontanément, que le nombre des divisions à effectuer ne peut surpasser la partie entière du nombre

$$1 + \frac{10}{3} K ;$$

par conséquent la partie entière de ce nombre est une limite supérieure des divisions à effectuer.

10. **Théorème.** — *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres* A *et* B (A < B), *le nombre des divisions à effectuer ne peut surpasser* cinq fois *le nombre des chiffres* K *du plus petit nombre* B *des deux nombres donnés.*

Première démonstration. — On a, identiquement,

$$1 + \frac{10}{3} K = 1 + 3K + \frac{K}{3} ;$$

or $1 \leq K$

et $\frac{K}{3} < K$;

d'où $1 + \frac{K}{3} < 2K$:

donc $$1 + \frac{10}{3} K < 5K$$

et si on a égard à la formule (6), on pourra écrire

$$n < 5K; \qquad \text{c. q. f. d.} \qquad (7)$$

Deuxième démonstration. — La formule (6) peut être mise

sous la forme $$\frac{3}{2}(n - 1) < 5K,$$

ce qui revient à

$$n + \frac{n-3}{2} < 5K, \qquad (8)$$

K est un nombre entier, au moins égal à l'unité, donc 5K est au moins égal à 5. Cela posé, si n est égal à un des trois nombres $1, \ 2, \ 3,$

on a évidemment $$n < 5K,$$

et si $$n > 3,$$

on a $$\frac{n-3}{2} > 0$$

et la formule (8) donne, *a fortiori*,

$$n < 5K.$$

11. Historique. — La formule (7) est due à G. Lamé. Elle a été établie par ce savant dans l'hypothèse où *tous* les quotients sont pris par défaut.

12. Théorème. — *Si on désigne par* n *le nombre des divisions à effectuer, pour trouver le* **p.** *g. c. d. de deux nombres* A *et* B (A > B), *et par* K *le nombre des chiffres du plus petit de ces deux nombres, on aura la relation*

$$n < 1 + 4K,$$

c'est-à-dire que quatre fois *le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres considérés est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.*

Démonstration. — Si on se reporte à la formule (4), et à l'hypothèse, on pourra écrire :

$$2^{n-1} < B < 10^k < 2^{4k};$$

d'où $$2^{n-1} < 2^{4k};$$

par suite $$n - 1 < 4K$$

ou $$n < 1 + 4K; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

13. *Première application.* — Supposons que

$$A = 2904,$$
$$B = 1122.$$

Je remarque que ces deux nombres sont divisibles par 2, 3 et 11, et comme ces trois nombres sont premiers deux à deux, il s'ensuit que les nombres A et B sont divisibles par 66. De plus, si on décompose A et B en facteurs premiers, on reconnaît que 66 est le p. g. c. d. de A et B; et que

$$B' = 17.$$

Cela posé :

1° Si on considère la formule (2), et la méthode exposée dans le paragraphe 6, on trouve

$$2^{n-1} < 17 < 2^5;$$

d'où
$$n - 1 < 5$$
ou
$$n < 6;$$

donc 5 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

Le calcul direct, appliqué aux quotients 44 et 17, des nombres A et B par 66, ce qui ne change pas le nombre des divisions à effectuer, donne :

$$n = 4.$$

2° Si on considère les formules (2) et (6), on trouve

$$n = 7, 6 \ldots$$

donc 7 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

3° Si on considère les formules (2) et (7) on trouve :

$$n < 10:$$

donc 9 est une limite supérieure.

4° Si on considère les formules (2) et (9) on trouve que

$$n < 9:$$

donc 8 est une limite supérieure.

Deuxième application. — Supposons que,

$$A = 1729$$
$$B = 682.$$

Les nombres A et B n'ont pas de diviseurs communs apparents.

1° Si j'applique la formule (4), et la méthode exposée dans le paragraphe 6, on trouve $n < 11$;

donc 10 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

Le calcul direct montre que le nombre des divisions est égal à 6.

2° Les formules (4) et (6) donnent,

$$n < 11:$$

donc 10 est une limite supérieure.

3° Les formules (4) et (7) donnent,

$$n < 15:$$

donc 14 est une limite supérieure.

4° Les formules (4) et (9), donnent,

$$n < 13:$$

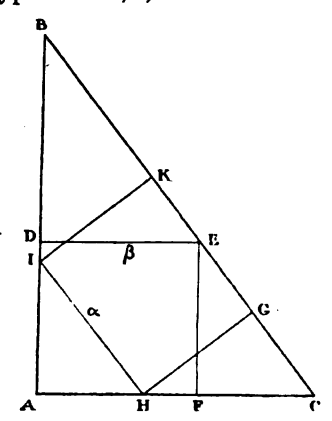
donc 12 est une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer.

QUESTION 224.

Solution par M. Paul Boulogne, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Construire un triangle connaissant les côtés des deux carrés inscrits.

Soient : a l'hypoténuse ; b, c les côtés de l'angle droit ; h la



hauteur correspondante à l'hypoténuse, α et β les côtés des

carrés donnés. Nous avons $a^2 = b^2 + c^2$ (1)

$$ah = bc. \qquad (2)$$

Les triangles semblables BAC, IAH donnent

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{h}{h - \alpha}, \text{ d'où } h = \frac{a\alpha}{a - \alpha};$$

par suite (2) devient

$$\frac{a^2\alpha}{a - \alpha} = bc. \qquad (3)$$

De même, à cause de la similitude des triangles BAC et BDE, on a $\dfrac{b}{\beta} = \dfrac{c}{c - \beta} = \dfrac{b + c}{c}$;

d'où (4) $bc = \beta(b + c)$.

Mutipliant par 2 les deux membres de (3) et ajoutant à (1),

on a $$a^2\left(1 + \frac{2\alpha}{a - \alpha}\right) + (b + c)^2.$$

Élevons (4) au carré et remplaçons bc et $b + c$ par leur valeur, on a $$\left(\frac{a^2\alpha}{a - \alpha}\right)^2 = a^2\beta^2\left(1 + \frac{2\alpha}{a - \alpha}\right)$$

ou $$a^2(\beta^2 - \alpha^2) = \alpha^2\beta^2$$

et $$a \quad \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}},$$

condition de possibilité $\beta > \alpha$.

Dès lors b et c sont racines de l'équation

$$X^2 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}) - \alpha^2\beta X + \alpha^2\beta^2 = 0.$$

Le problème a toujours une solution et une seule, pourvu que $\alpha < \beta$.

Nota : Ont résolu la même question : MM. Monterou, à Pau ; Marin, à Agen.

QUESTION 231.

Solution par M. Giroud, élève au Lycée de Marseille.

Sur les trois côtés d'un triangle ABC, *on construit les carrés* ABED, ACGF, BCHI.

Connaissant les points de rencontre des droites ED, FG, HI, *construire le triangle.*

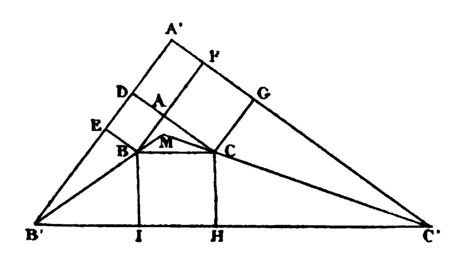
Les deux droites CC′, BB′ sont déterminées par la relation

$$\frac{CG}{CH} = \frac{C'A'}{C'B'}$$

et

$$\frac{BI}{BE} = \frac{C'B'}{B'A'}.$$

Pour les construire il suffit d'élever des perpendiculaires sur les côtés du triangle A′B′C′ et dans le rapport déterminé



par le rapport précédent. En menant par les sommets des perpendiculaires des parallèles aux côtés, celles-ci vont se couper en des points de CC′ et BB′, et pour avoir BC il suffit alors d'inscrire un carré dans le triangle B′H′C′. Le problème proposé est dès lors ramené à un problème connu. On achève la construction en menant par les points B et C des parallèles à B′A′ et C′A′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Mangeot, à Nancy; Roubault, à Melun; Daguillon, lycée Henri IV; Huet, à Orléans; Bénard, à Châteauroux; Arnat, à Saint-Omer; Tricon, à Marseille; Van Aubel, à l'athénée de Liège; de Prat, à Lille.

QUESTION 238.

Solution par M. Mayon, élève du Lycée Henri IV, classe de M. Colas.

Construire un triangle connaissant un angle, le cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs.

Supposons le problème résolu; soient : ABC le triangle cherché, H le point de concours des hauteurs, O le centre du cercle circonscrit.

L'angle B étant connu, la corde AC est déterminée au moins de longueur, sinon de position.

Abaissons du point O les perpendiculaires OR, OL et menons les hauteurs CI, BK, puis joignons RL ; les deux triangles ROL, BHC étant semblables comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraire; donc

$$\frac{RL}{BC} = \frac{OL}{BH} = \frac{1}{2};$$

d'où $$BH = 2OL.$$

Dès lors BH sera connue si OL est connue.

De là la construction suivante :

Sur la circonférence circonscrite donnée, prenons un segment capable de l'angle donné; avec un rayon égal au double de la distance du centre O à cette corde et de H comme centre, décrivons une circonférence qui coupera généralement la circonférence donnée en deux points B et B'. L'un ou l'autre de ces deux points est le sommet du triangle cherché. Puisque BH est une hauteur, pour avoir la base du triangle décrivons de O ; avec la distance OL,

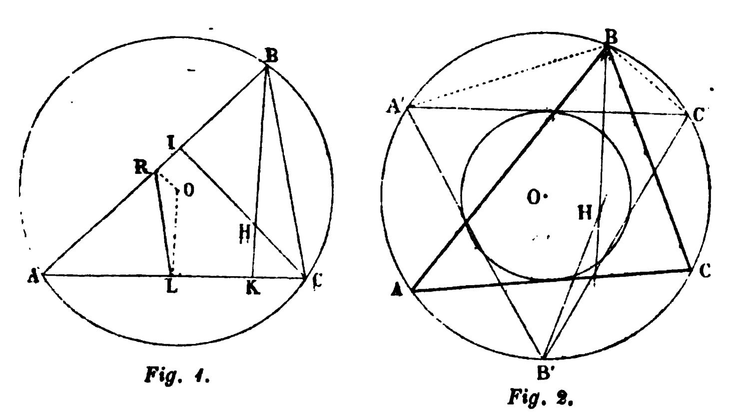


Fig. 1.

Fig. 2.

une circonférence concentrique à la circonférence O, et menons perpendiculairement à BH une tangente à cette petite circonférence. En joignant ses extrémités A et C à B, on a le triangle cherché.

On aurait un second triangle en joignant le point B' aux

extrémités de la tangente parallèle à celle que nous avons déjà considérée.

Remarquons que si l'angle B donné était obtus, il faudrait joindre B aux extrémités A', C' de la tangente la plus rapprochée du point B ; le triangle serait alors A'BC'.

Discussion. — Nous avons considéré le point H à l'intérieur de la circonférence ; il aurait pu être donné à l'extérieur. Si A' est l'extrémité du diamètre AHA' la plus rapprochée de H, et r le rayon de la petite circonférence, on a

$2r > HA$, pas de solution ;

$2r = HA$, une solution ;

$HA > 2r > HA'$, deux solutions (symétriques par rapport à AA');

$2r = HA'$, une solution ;

$2r < HA'$, pas de solution.

Cas particulier. — Si le point donné H est sur la circonférence, il devra être à la fois un sommet du triangle et le point de rencontre des hauteurs ; le triangle sera alors rectangle, c'est-à-dire que l'angle donné doit être droit, ce qui rentre dans la construction générale, puisque, r étant nul, le rayon de la circonférence HB l'est aussi.

Si le point H se confond avec le point O, la distance du point de rencontre des hauteurs au sommet du triangle est évidemment R ; la base du triangle sera donc perpendiculaire au milieu du rayon B'O et le triangle est équilatéral. L'angle donné est donc de 60°.

Dans ce cas il y a une infinité de solutions.

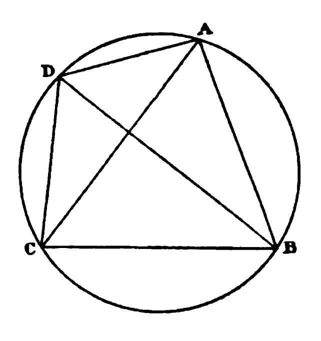
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Montereau, à Pau ; Mangeot, à Nancy ; Popineau, à Niort ; Bonneville, à Toulouse ; Daguillon, lycée Henri IV ; Marit, Callas, lycée Louis-le-Grand ; Huet, à Orléans ; Malcor, à la Seyne, près Toulon.

QUESTION 239.

Solution par M. BLESSEL, piqueur des Ponts et Chaussées.

Résoudre un quadrilatère inscriptible, connaissant les diagonales et deux côtés opposés.

Soit le quadrilatère ABCD. Posons AC $= d$, BD $= d'$, AD $= a$, BC $= b$, AB $= x$, CD $= y$.



On a d'après les théorèmes de Ptolémée :

$$dd' = xy + ab,$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{ax + by}{ay + bx}.$$

De ces deux équations on tire

$$xy = dd' - ab$$

et

$$\frac{x}{y} = \frac{ad - bd'}{ad' - bd}.$$

Le problème est ramené à déterminer deux quantités, connaissant leur produit et leur rapport.

Connaissant les quatre côtés du quadrilatère on pourra déterminer les angles que chaque diagonale fait avec les côtés, le rayon du cercle circonscrit, les segments et l'angle des diagonales, ainsi que la surface du quadrilatère.

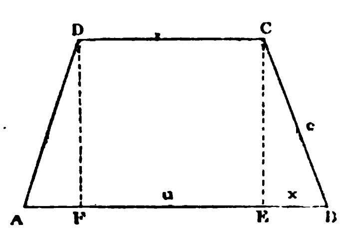
NOTA. — M. Joly. de Tarbes, a résolu la même question.

QUESTION 240.

Solution par M. Louis SICARD, élève au Lycée de Lyon.

On donne les côtés égaux et l'une des bases A d'un trapèze isoscèle ; que doit être la seconde base pour que le volume engendré par la révolution de la figure autour de la première base son maximum ?

Les perpendiculaires CE, DF étant menées des sommets C et D, il est facile de voir que le volume demandé se composera de deux cônes égaux et d'un cylindre ayant même base que ces cônes. Si l'on pose EB $= x$, la base cherchée aura pour expression $a - 2x$; dès lors



$$V = \frac{2\pi CE^2 . x}{3} + \pi CE^2 (a - 2x)$$

ou
$$3V = \pi CE^2 (3a - 4x)$$
ou en remplaçant CE par sa valeur $c^2 - x^2$, on a
$$\frac{3V}{\pi} = (c^2 - x^2)(3a - 4x) = (c + x)(c - x)(3a - 4x).$$

Pour trouver le maximum de $(c + x)(c - x)(3a - 4x)$ on a à résoudre l'équation
$$\frac{1}{c + x} - \frac{1}{c - x} - \frac{4}{3a - 4x} = 0$$
ou après réductions
$$12x^2 - 6ax - 4c^2 = 0;$$
d'où enfin
$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 + 48c^2}}{12}.$$

Les deux valeurs d'x donnent deux solutions. En effet, en prenant la valeur positive la base donnée sera la plus grande des deux. Si, au contraire, on prend la solution négative, c'est la base cherchée qui sera la plus grande des deux.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Buttin, à Lons-le-Saulnier; Boulogne, Broyon, Legrain, à Saint-Quentin; Bois, à Montauban; Joly, à Tarbes; Simon, à Lyon; Bonneville, à Toulouse; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Lacan, à Toulon; Payeux, à Verdun; Lesoille, à l'école de Cluny; Mayon, au lycée Henri IV; de Prat, à Lille.

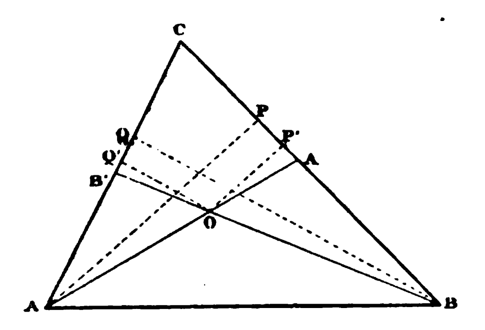
QUESTION 258.

Solution par M. Tinel, Lycée Corneille, à Rouen.

Dans un triangle ABC *on mène les deux bissectrices* AA′, BB′ *qui coupent les côtés opposés respectivement en* A′ *et* B′ *et se rencontrent en* O. *Démontrer la relation*

$$\frac{AA'\,.\,OB'}{BB'\,.\,OA'} = \frac{AC}{BC}. \qquad \text{(Reidt.)}$$

Par le point O et le point A menons OP′ et AP perpendiculaires sur BC et soient également OQ′ et BQ perpendiculaires sur AC.



Les triangles A′OP′ et A′AP étant semblables donnent

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{AP}{OP'};$$

de même à cause de la similitude des triangles B′OQ′ et B′BQ donnent

$$\frac{BB'}{OB'} = \frac{BQ}{OQ'}.$$

Divisons terme à terme ces deux égalités en remarquant que OQ′ = OP′, il vient

$$\frac{AA'\,.\,OB'}{BB'\,.\,OA'} = \frac{AP}{BQ};$$

mais les triangles rectangles BCQ et CAP qui sont semblables donnent

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{BC};$$

donc

$$\frac{AA'\,.\,OB'}{BB'\,.\,OA'} = \frac{AC}{BC}.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gino-Loria, à Mantoue; Marin, à Agen ; Daguillon, au lycée Henri IV ; Bompard, collège Stanislas ; Huet, à Orléans ; H. Bourget, à Aix ; Callon, au lycée Louis-le-Grand ; Boulogne, Broyon, à Saint-Quentin ; Chaulet, à Montauban ; Brachat, à Vitry ; Joly, à Tarbes ; Houssette, à Amiens ; Cardot, à Nancy ; Jourdan, à Rouen.

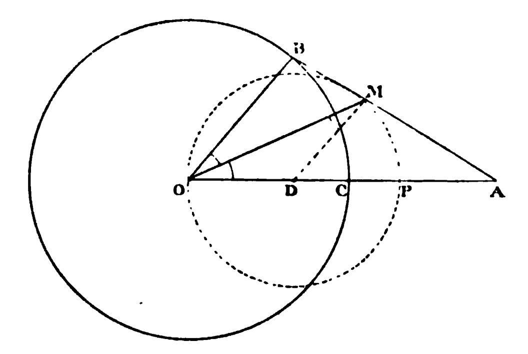
QUESTION 259.

Solution par M. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV.

On donne une circonférence O *et un point fixe* A *dans son plan ; on joint le point* A *à un point quelconque* B *de la circonférence ; la bissectrice intérieure de l'angle* AOB *rencontre la droite* AB *en un point* M *dont on demande le lieu quand le point* B *décrit la circonférence. Ce lieu rencontre le diamètre en* P ; *démontrer que* C *étant le point de la circonférence le plus voisin de* A, *sur la droite* OA, *les quatre points* O, B, P, A *forment une division harmonique.*

D'après la propriété fondamentale de la bissectrice, on a

$$\frac{AM}{AO} = \frac{MB}{OB} = \frac{AB}{OA + OB},$$



et si d désigne la distance AO et R le rayon de la circonférence

$$\frac{AM}{AB} = \frac{d}{d + R},$$

ce qui montre que le lieu est une circonférence homothétique

à la première, A étant le centre et $\frac{d}{d+R}$ le rapport d'homothétie.

Cela posé, remarquons que si par le point M on mène MD parallèle à OB, le point D est le centre du lieu. Or, le triangle ODM est évidemment isoscèle; donc la circonférence du lieu passe par le centre du cercle donné.

D'ailleurs $$DP = DM = \frac{Rd}{d+R},$$
$$DC = R - OD = R - \frac{Rd}{d+R} = \frac{R^2}{d+R},$$
$$DA = d - OD = \frac{d^2}{d+R}.$$
Par suite $$DC \times DA = \frac{R^2 d^2}{(d+R)^2} = \overline{DP}^2.$$
ce qui montre que les points O, C, P, A forment une division harmonique.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Joly, à Tarbes; Monterau, Callon, au lycée Louis-le-Grand; Marin, à Agen; Bompard, au collège Stanislas; Boulogne, à Saint-Quentin; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier; Chrétien, au Havre; Houssette, école primaire supérieure, à Amiens; Cardot, à Nancy; Gino-Loria, à Mantoue.

QUESTION 260.

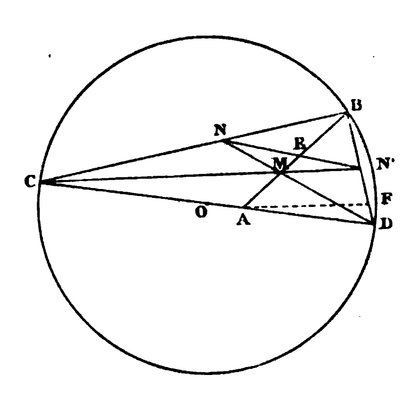
Solution par M. Daguillon, élève du Lycée Henri IV.

On joint un point fixe A, *intérieur à une circonférence, à un point* B *de la courbe; on prend sur* AB *un point* M *tel que* $\frac{AM}{AB} = K$. *On joint chacune des extrémités du diamètre qui passe par le point* A *aux points* M *et* B, *ces droites se rencontrent en deux points* N *et* N′ *autres que* A *et* B.

Démontrer : 1° que la ligne NN′ *partage* MB *en deux parties dont le rapport est constant ; 2° que la ligne qui joint les milieux de* MB *et de* NN′ *passe par le centre de la circonférence donnée; enfin trouver le lieu des points* N *et* N′.

1° La figure CNBN′DM est un quadrilatère complet, donc

la diagonale BM est divisée harmoniquement par les deux autres NN′ et CD; on a donc : $\frac{EM}{EB} = \frac{AM}{AB} = K$.



2° Dans une telle figure, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite. Or O, centre du cercle, est le milieu de la diagonale CD; il est donc sur le prolongement de la droite qui joint les milieux de MB et de NN′.

3° Par le point A menons AF parallèle à CN′, les triangles semblables BMN′. BAF donnent :

$$\frac{BN'}{N'F} = \frac{BM}{MA} = \frac{1-K}{K}; \qquad (1)$$

d'ailleurs CN′D et AFD donnent :

$$\frac{N'F}{N'D} = \frac{CA}{CD} = \frac{r+d}{2r}. \qquad (2)$$

En posant OA $= d$; multipliant membre à membre les relations (1) et (2),

il vient
$$\frac{BN'}{N'D} = \frac{(1-K)(r+d)}{2Kr}$$

ou
$$\frac{DN'}{DB} = \frac{2Kr}{(1-K)(r+d)+2Kr} = \frac{2Kr}{(1+K)r+(1-K)d}$$

Ce qui montre que le point N′ décrit une circonférence homothétique à la circonférence donnée, D étant le centre et $\frac{2Kr}{(1+K)r+(1-K)d}$, le rapport d'homothétie.

Par une raison semblable on verrait que le lieu du point N est une circonférence homothétique à la circonférence donnée, C étant le centre et

$$\frac{2Kr}{(1-K)(r-d)+2Kr} = \frac{2Kr}{(1+K)r-(1-K)d}$$

le rapport d'homothétie.

Ces deux circonférences sont tangentes à la circonférence O aux points D et C.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bompard, collège Stanislas ; Boulogne, à Saint-Quentin ; Rivard, au Mans ; Marin, à Agen ; Houssette, école primaire supérieure à Amiens ; Chrétien, au Havre ; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier ; Cardot, à Nancy.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. Kœnigs, élève de l'École normale supérieure.

Soit la surface du second ordre rapportée à ses axes :

$$H = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

La normale au point (x, y, z) de la surface a pour équations $\left(\frac{X}{x} - 1\right)a^2 = \left(\frac{Y}{y} - 1\right)b^2 = \left(\frac{Z}{z} - 1\right)c^2.$

Si on cherche les pieds des normales issues d'un point $P(\xi, \eta, \zeta)$ à la surface, on exprimera que la normale passe par ce point, ce qui donnera

$$\left(\frac{\xi}{x} - 1\right)a^2 = \left(\frac{\eta}{y} - 1\right)b^2 = \left(\frac{\zeta}{z} - 1\right)c^2. \qquad (2)$$

Ces équations jointes à l'équation (1) définissent les pieds des normales issues du point P à la surface.

Ces dernières relations se mettent sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} X &= (b^2 - c^2)yz + c^2\zeta y - b^2\eta z = 0. \\ Y &= (c^2 - a^2)zx + a^2\xi z - c^2\zeta x = 0. \\ Z &= (a^2 - b^2)xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Une quelconque des équations (3) rentre dans les deux autres. Les cylindres $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ projettent sur les plans de coordonnées une même courbe gauche dont les traces sur la surface sont précisément les pieds des normales cherchées.

L'équation $\qquad \lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$

représente une surface du second ordre passant par la courbe proposée. Faisons en particulier

$$\lambda = a^2\xi, \quad \mu = b^2\eta, \quad \nu = c^2\zeta,$$

il vient

$$a^2(b^2-c^2)\xi yz + b^2(c^2-a^2)\eta zx + c^2(a^2-b^2)\zeta xy = 0. \quad (4)$$

Ce cône du second ordre a son sommet à l'origine. Il contient la courbe considérée et passe aussi par le point P, de sorte que, si O est le centre de la surface, OP est une génératrice du cône (4).

En vertu des équations (2), x, y, z sont proportionnels à $a^2(x-\xi)$, $b^2(y-\eta)$, $c^2(z-\zeta)$; en substituant dans l'équation homogène (4) et supprimant le facteur $a^2b^2c^2$, on trouve

$$(b^2-c^2)\xi(y-\eta)(z-\zeta) + (c^2-a^2)\eta(z-\zeta)(x-\xi)$$
$$+ (a^2-b^2)\zeta(x-\xi)(y-\eta) = 0. \quad (5)$$

L'équation (5) représente un cône qui passe également par la courbe considérée, qui a son sommet au point P et contient l'origine et par suite la droite OP. Les cônes (4) et (5) sont du second degré, ils ont la génératrice OP commune, ils se coupent donc suivant une courbe gauche du troisième ordre. Cette courbe est précisément celle dont les traces sur la surface sont les pieds des normales issues du point P à cette surface.

Il y a donc $2 \times 3 = 6$ pieds. Et par suite :

On peut d'un point de l'espace abaisser six normales sur une surface du second ordre.

Le cône (5) contient évidemment les six normales, puisqu'il contient leurs pieds ainsi que le point P, qui est son sommet. Donc :

Ces six normales sont sur un même cône du second degeé.

Les cônes (4) et (5) ont comme génératrices : le premier, les axes de la surface; le second, des parallèles à ces mêmes axes. De plus, puisque O et P sont leurs sommets, la courbe gauche doit y passer. Ceci montre donc que :

La courbe gauche du troisième degré, ou cubique gauche, qui passe par les six pieds des normales issues d'un point à une surface du second ordre, contient ce point, le centre de la surface, et admet pour ses directions asymptotiques les trois axes de la surface.

2° Ayant rapidement établi ces résultats déjà bien connus, j'aborde la question que je me suis proposé de traiter et qui est la suivante :

Étant donnée une surface du second ordre, tracer sur cette surface une courbe du quatrième degré (provenant de l'intersection d'une seconde surface du second degré), de telle sorte qu'il existe sur cette courbe un groupe de six points, dont les normales concourent en un même point.

L'équation $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ représente une série de surfaces passant par la cubique gauche, c'est même leur équation générale.

L'équation $H + \lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ sera donc l'équation générale des surfaces du deuxième ordre menées par les six pieds des normales issues du point P à la surface $H = 0$.

Or, si on considère dans cette équation ξ, η, ζ comme des indéterminées, on voit sans peine que $\lambda X + \mu Y + \nu Z$ peut toujours être identifié avec l'expression

$$2ByZ + 2B'Zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z.$$

Ainsi on voit que l'équation générale des surfaces du second ordre qui coupe la proposée suivant une courbe du quatrième ordre, satisfaisant à l'énoncé, peut s'écrire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + 0. \qquad (6)$$

Appelons tétraèdre principal de la surface le tétraèdre formé par les trois plans principaux et par le plan de l'infini. Nous voyons que l'équation

$$2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z = 0$$

est l'équation générale des surfaces du second ordre circonscrites à ce tétraèdre. Mais cette surface passe par la courbe gauche d'intersection de la surface générale (6) et de la proposée. Donc

Pour que sur une courbe gauche du quatrième ordre, tracée sur une surface du second ordre, on puisse trouver un groupe de six points dont les normales concourent en un même point, il faut et il suffit que par cette courbe on puisse faire passer une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre principal de la première.

Dans un prochain article nous ferons quelques applications de ce théorème important.

SUR LES PERMUTATIONS DE n LETTRES

Par M. **Kœhler**.

Soient n lettres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ affectées d'indices croissants; je me propose de déterminer le nombre des permutations dans lesquelles aucune lettre n'occupe le rang que lui attribuerait son indice.

Ce problème est connu; M. André l'a résolu dans un mémoire sur la détermination du terme général d'une série *(Annales de l'Ecole Normale)*. On arrive beaucoup plus simplement à la solution en s'appuyant sur le lemme suivant :

Si l'on désigne par S la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, le coefficient de $a_1a_2\ldots a_n$ dans le produit

$$(S - a_1)(S - a_2) \ldots (S - a_n)$$

est précisément le nombre de permutations de l'espèce indiquée plus haut.

Faisons le produit $(S - a_1)(S - a_2)$ en ayant soin de donner dans chaque terme la première place à la lettre prise dans le facteur $S - a_1$; on formera ainsi tous les produits des n lettres deux à deux où a_1 n'occupe pas la première place et où a_2 n'occupe pas la seconde. Cela est évident, puisque a_1 ne figure pas dans $S - a_1$ et que a_2 ne figure pas dans $S - a_2$. Multipliant ensuite par $S - a_3$, on formera tous les produits trois à trois dans lesquels a_3 n'occupe pas la troisième place, ni a_2 la seconde, ni a_1 la première; et ainsi de suite. Lorsqu'on aura employé n facteurs, toutes les permutations considérées se trouveront écrites, et pour avoir leur nombre il suffit de calculer directement le coefficient du terme $a_1a_2\ldots a_n$ dans $(S - a_1)(S - a_2)\ldots(S - a_n)$.

Or ce produit peut s'écrire

$$S^n - S^{n-1}\Sigma a_i + S^{n-2}\Sigma a_i a_k - S^{n-3}\Sigma a_i a_k a_l + \ldots + (-1)^n a_1a_2\ldots a_n.$$

Dans S^n le coefficient de $a_1a_2\ldots a_n$ est $n!$; de même dans $S^{n-1}\Sigma a_i$ qui n'est autre chose que S^n.

Dans S^{n-2} le coefficient du produit de $n - 2$ lettres diffé-

rentes quelconques est $(n-2)!$; en faisant la multiplication par $\Sigma a_i a_k$, il est évident que le terme $a_1 a_2 \ldots a_n$ aura pour coefficient $(n-2)!\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ ou $\frac{n!}{2!}$.

De même dans $S^{n-3}\Sigma a_i a_k a_l$ on trouvera

$$(n-3)!\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \text{ ou bien } \frac{n!}{3!}.$$

En continuant ainsi, on arrive à la formule

$$n!\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

qui exprime le nombre des permutations cherché.

NOTE SUR LES RACINES MULTIPLES

DE L'ÉQUATION EN *s*

Par M. **E. Amigues**,
Professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

1. — Nous nous proposons d'étudier les racines multiples de l'équation du troisième ordre à laquelle conduit la théorie des plans principaux. A la vérité, M. Laurent a déjà traité le cas de l'équation plus générale que l'on rencontre à l'occasion d'autres théories, et notamment dans la mécanique céleste à propos des excentricités des orbites. Mais le cas simple que nous allons examiner et la méthode élémentaire qui s'y adapte seront peut-être plus directement utiles aux élèves de mathématiques spéciales.

L'équation est la suivante :

$$f(S) = \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0.$$

2. — On remarque tout de suite que $f(S)$ est une fonction composée de S et que sa dérivée est la somme de trois parties :

$$\begin{aligned} -f'(S) &= (A'-S)(A''-S)-B^2 \\ &+ (A''-S)(A-S)-B'^2 \\ &+ (A-S)(A'-S)-B''^2. \end{aligned}$$

Par où on voit que si une valeur de S annule tous les mineurs du déterminant, elle annule en particulier les mineurs principaux et par suite $f'(S)$, et aussi le déterminant c'est-à-dire $f(S)$.

Donc *toute valeur* S *qui annule tous les mineurs est racine double de l'équation en* S.

Réciproquement, *toute racine double de l'équation en* S *annule tous les mineurs*.

En effet, désignant par P, P', P″ les mineurs principaux, on a

$$-f'(S) = P + P' + P''.$$

Par conséquent, toute racine double de l'équation en S satisfait à l'équation

$$P + P' + P'' = 0 \qquad (1)$$

et par suite, en multipliant par P, à l'équation

$$P^2 + PP' + PP'' = 0. \qquad (2)$$

Or, on a identiquement

$$PP' = (A'' - S)\left[(A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2\right] + B^2 B'^2$$

ou bien encore

$$PP' = (A'' - S) f(S) + (A'' - S)^2 B''^2 - 2BB'B''(A'' - S) + B^2 B'^2;$$

d'où on tire pour toute racine simple ou double

$$PP' = [(A'' - S)B'' - BB']^2.$$

Par analogie $PP'' = [(A' - S)B' - BB'']^2.$

Portant ces valeurs et celle de P dans l'équation (2), on a pour toute racine double :

$$[(A' - S)(A'' - S) - B^2]^2 + [(A'' - S)B'' - BB']^2 + [(A' - S)B' - BB'']^2 = 0,$$

c'est-à-dire, puisque la valeur de S est réelle, que chaque carré est nul. Cela fait trois mineurs nuls.

Mais, au lieu de multiplier l'équation (1) par P, on pourrait la multiplier par P' ou par P″ et on verrait que les six autres mineurs sont nuls.

3. — Sur les neuf mineurs, six seulement sont différents. On a donc six conditions, encore même ne sont-elles pas distinctes. Voici ces conditions :

$$(A - S)(A' - S) - B''^2 = 0,$$
$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = 0.$$

$$(A'' - S)(A - S) - B'^2 = o,$$
$$(A - S)B - B'B'' = o,$$
$$(A' - S)B' - BB'' = o,$$
$$(A'' - S)B'' - BB' = o.$$

1° Si aucun des rectangles n'est nul, on peut tirer des trois dernières $(A - S)$, $(A' - S)$, $(A'' - S)$; et, portant ces valeurs dans les trois premières, on obtient des identités Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc :

$$A - S = \frac{B'B''}{B},$$
$$A' - S = \frac{BB''}{B'},$$
$$A'' - S = \frac{BB'}{B''}.$$

2° Si un rectangle est nul, les trois dernières équations exigent qu'un second rectangle soit nul. Soit $B' = B'' = o$. Les conditions ci-dessus deviennent :

$$(A - S)(A' - S) = o,$$
$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = o,$$
$$(A'' - S)(A - S) = o,$$
$$(A - S)B = o.$$

Supposons $B \lessgtr o$. Alors $S = A$ et la seule condition qui ne soit pas une identité est, avec $B' = o$ et $B'' = o$,

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = o.$$

3° Reste à examiner le cas où les trois rectangles sont nuls. Les trois dernières conditions sont alors des identités et les trois autres s'écrivent

$$(A - S)(A' - S) = o,$$
$$(A' - S)(A'' - S) = o,$$
$$(A'' - S)(A - S) = o,$$

c'est-à-dire $A = A'$ ou une des conditions analogues.

4° Pour étudier les racines triples, prenons la dérivée seconde. On a

$$\frac{1}{2}f''(S) = f(A - S) + (A' - S) + (A'' - S).$$

Par où on voit que si tous les mineurs du second ordre sont nuls pour une valeur de S, cette valeur annule $f''(S)$;

et aussi les mineurs de premier ordre, et par suite $f'(S)$; et aussi le déterminant, c'est-à-dire $f(S)$.

Donc toute valeur de S *qui annule tous les mineurs du second ordre est racine triple.*

Réciproquement, toute racine triple annule tous les mineurs du second ordre.

Car une pareille racine annule $f''(S)$ et, étant double, elle annule aussi les mineurs du premier ordre. Elle est donc racine commune des équations suivantes :

$$(A - S) + (A' - S) + (A'' - S) = 0,$$
$$(A - S)(A' - S) = B''^2,$$
$$(A' - S)(A'' - S) = B^2,$$
$$(A'' - S)(A - S) = B'^2.$$

Élevant la première au carré, et remplaçant les doubles produits par les valeurs tirées des trois autres, on a

$$(A - S)^2 + (A' - S)^2 + (A'' - S)^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0.$$

Ce qui exige, puisque la valeur de S est réelle, que tous les mineurs du second ordre soient nuls. On a alors une sphère.

On remarquera que la racine triple ne peut être nulle, sans quoi on aurait

$$A = 0 \quad A' = 0 \quad A'' = 0 \quad B = 0 \quad B' = 0 \quad B'' = 0$$

et la surface se réduirait à un plan.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **G. de Longchamps.**

Lorsqu'une équation du quatrième degré $f(x, y) = 0$, représente deux cercles, on peut se proposer de décomposer cette équation en deux facteurs du second degré. Voici une solution simple de ce problème très élémentaire.

1. Soient (axes rectangulaires)

$$x^2 + y^2 + P = 0$$
$$x^2 + y^2 + Q = 0$$

les deux cercles cherchés, P et Q désignant bien entendu,

des fonctions du premier degré.

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma$$
$$Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma'.$$

On aura donc,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + P)(x^2 + y^2 + Q).$$

Ce qui prouve d'abord que l'ensemble des termes du quatrième degré de l'équation $f = 0$ doit, à une constante près, *former le carré parfait de* $(x^2 + y^2)$; cette même égalité, donne encore pour l'ensemble des termes du troisième degré, $(x^2 + y^2)[(\alpha + \alpha')x + (\beta + \beta')y]$, ce qui démontre que l'ensemble des termes du troisième degré de l'équation $f = 0$ doit être divisible par $(x^2 + y^2)$. Nous pouvons donc énoncer déjà la proposition suivante, d'une évidence immédiate:

Pour qu'une équation du quatrième degré puisse représenter deux cercles, il est nécessaire : 1° que l'ensemble des termes du quatrième degré forme le carré parfait du binôme $(x^2 + y^2)$; *2° que l'ensemble des termes du troisième degré soit divisible par* $(x^2 + y^2)$.

La première chose à faire, quand on se trouve en présence d'une équation du quatrième degré qu'on soupçonne représenter l'*ensemble de deux cercles*, est de vérifier que les conditions précédentes sont remplies. Il nous reste à expliquer comment, f remplissant ces conditions, on peut toujours la décomposer, si vraiment elle représente deux cercles.

2. L'équation proposée pourra s'écrire, dans cette hypothèse, $f = (x^2 + y^2)^2 + R(x^2 + y^2) + \varphi = 0$
R étant de la forme $Ax + By$; φ désignant un polynôme du second degré; ou encore

$$f = (x^2 + y^2)^2 + (R + \lambda)(x^2 + y^2) + \psi = 0 \quad (1)$$

en posant $\psi = \varphi - \lambda(x^2 + y^2)$.

D'autre part on a, si f est l'ensemble de deux cercles,

$$f = (x^2 + y^2 + P)(x^2 + y^2 + Q)$$

ou $f = (x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(P + Q) + PQ = 0 \quad (2)$

ou en posant $x^2 + y^2 = U$

$$U^2 + U(P + Q) + PQ = 0.$$

La quantité soumise au radical, dans cette équation du second degré en U, est un *carré parfait*; mais (1) et (2) sont

des *équations identiques* et si l'on suppose que l'on a pris l'arbitraire λ égale à $(\gamma + \gamma')$, alors

$$P + Q = R + \lambda$$

et

$$PQ = \psi,$$

donc $V = (R + \lambda)^2 - 4\psi$ sera un carré parfait. *Réciproquement*, si V est carré parfait, la décomposition a lieu. De ceci on déduit la règle suivante :

Étant donnée une équation du quatrième degré à deux variables $f(x,y) = 0$ *qu'on soupçonne représenter l'ensemble de deux cercles, pour le vérifier et trouver ces calculs on doit d'abord constater que l'équation* $f = 0$ *remplit les deux conditions ci-dessus énoncées.*

Ces conditions étant remplies, on écrira cette équation sous la forme $(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(R + \lambda) + \psi = 0$
λ *étant un paramètre arbitraire ;* $R(x^2 + y^2)$, *l'ensemble des termes du troisième degré;* ψ, *une fonction du second degré seulement. On résout alors l'équation par rapport à* $(x^2 + y^2)$; *on obtient sous le radical une fonction du second degré seulement, et on déterminera* λ *de façon que celle-ci devienne un carré parfait.*

S'il existe une valeur de λ *remplissant cette condition,* $f = 0$ *représente deux cercles et la décomposition est effectuée ; sinon* $f = 0$ *ne représente pas deux cercles.*

3. Appliquons ce théorème à un exemple numérique, soit

$$f = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + 5x^2 + 6y^2 - 7xy + 5x - 5y + 2 = 0 ;$$

on peut l'écrire, conformément à la méthode précédente,

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(3x - 4y + \lambda) + (5 - \lambda)x^2 + (6 - \lambda)y^2 - 7xy + 5x - 5y + 2 = 0,$$

laquelle, résolue par rapport à $(x^2 + y^2)$, donne :

$$2(x^2 + y^2) = 4y - 3x - \lambda \pm \sqrt{\begin{array}{l} 4y^2(\lambda - 2) + 4xy \\ + (4\lambda - 11)x^2 + 4 \\ (5 - 2\lambda)y + 2(3\lambda - 10)x \\ + \lambda^2 - 8. \end{array}}$$

Il faut maintenant déterminer λ, de façon que la quantité soumise au radical soit un carré parfait. Il est donc *nécessaire* (mais non *suffisant*) que les termes en y^2, xy, x^2 forment

eux-mêmes un carré parfait. On a donc pour déterminer λ l'équation

$$4 - 4(\lambda - 2)(4\lambda - 11) = 0$$
$$4\lambda^2 - 19\lambda + 21 = 0$$

qui donne deux valeurs : $\lambda' = 3$, $\lambda'' = \frac{7}{4}$.

On doit alors, se rappelant que la condition exprimée est *nécessaire, mais non suffisante,* essayer successivement λ' et λ''. On trouve ici que $\lambda' = 3$ rend la quantité soumise au radical carré parfait ; mais non la quantité λ''. Il est d'ailleurs évident que si l'une des racines effectue la transformation de la quantité sous le radical en carré parfait, l'autre ne peut pas faire cette transformation.

On a ici, finalement,

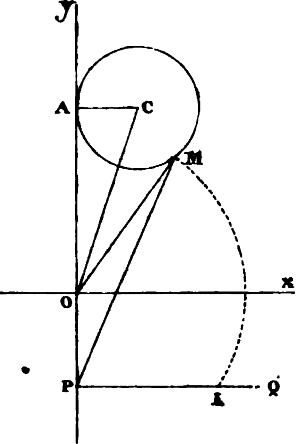
$$2(x^2 + y^2) = (4y - 3x - 3) \pm (2y + x - 1),$$

ce qui donne les deux cercles :

$$x^2 + y^2 - 3y + x + 2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - y + 2x + 1 = 0.$$

4. Nous proposerons aux jeunes lecteurs de ce journal, et comme application du théorème précédent, l'exercice suivant (*).

Soient ox, oy *deux axes rectangulaires ;* c *le centre d'un cercle tangent à* oy ; *on prend un point* M *sur le cercle et l'on mène* MP *parallèle à* OC ; P *étant le point de rencontre de cette parallèle avec* oy, *on mène par* P *une droite* PQ, *parallèle à* ox, *laquelle rencontre le cercle décrit du point* O, *comme centre, avec* OM *pour rayon en un point* I. *Le lieu du point* I *est l'ensemble de deux cercles.*




On propose de le reconnaître aussi par la géométrie élémentaire.

(*) Question proposée dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique,* de M. Catalan.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

Définitions. — L'équation de la ligne droite en coordonnées rectilignes (ou cartésiennes) étant $Ax + By + C = 0$, on voit que, si a et b représentent en grandeur et en signe les segments déterminés par cette droite à partir de l'origine sur les axes de coordonnées, son équation prendra la forme connue $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Si l'on pose $\frac{1}{a} = u$ et $\frac{1}{b} = v$, cette équation devient $ux + vy = 1$; (1)
u et v étant des constantes données, l'équation (1) établit entre les coordonnées cartésiennes x et y d'un point du plan une relation exprimant que ce point appartient à la droite particulière définie par les constantes u et v.

Si, au contraire, on regarde x et y comme des quantités données, et u v, comme des variables, l'équation (1) établira entre u et v une relation exprimant que les droites (1) passent toutes par le point donné (x, y).

u et v définissant une droite particulière du plan, comme x et y définissent un point particulier du plan, nous appellerons ces quantités les *coordonnées* de la droite, de même que x et y sont les *coordonnées* du point.

Si, entre les coordonnées u et v de la droite, on établit une relation $f(u, v) = 0$ de forme quelconque (pourvu que f soit une fonction continue) et que l'on choisisse l'une d'elles pour variable indépendante, l'autre coordonnée sera une fonction continue de la première et variera avec elle d'une manière continue, suivant les lois de l'analyse, c'est-à-dire suivant la nature de f. Au système de valeurs correspondantes de u et de v correspondra une certaine droite du plan, et un accroissement infiniment petit, donné à celle des deux coordonnées qui a été prise pour variable indépendante, déterminera un accroissement infiniment petit corres-

pondant pour l'autre, de sorte qu'il en résultera un déplacement infiniment petit correspondant pour la droite considérée, et qu'en définitive la droite se mouvra d'une manière continue dans le plan. Les positions successives qu'elle occupe ainsi peuvent être envisagées comme les tangentes successives d'une courbe, et l'on comprend dès lors que l'équation $f(u, v) = 0$ puisse, dans le nouveau système de coordonnées que nous adoptons, représenter une courbe considérée comme la succession de ses contacts avec toutes ses tangentes, ou, ce qui revient au même, comme la succession des points d'intersection des tangentes infiniment voisines.

Dans la courbe définie par l'équation $f(x, y) = 0$ en coordonnées cartésiennes, une tangente est formée par la droite qui joint deux points infiniment voisins sur la courbe. Dans la courbe définie par l'équation $f(u, v) = 0$, un point est formé par la rencontre de deux tangentes infiniment voisines qui se coupent alors sur la courbe. Dans les deux cas, ce langage revient à dire qu'un arc infiniment petit de la courbe se confond avec un élément infiniment petit de la tangente autour du point de contact.

Cette considération des courbes comme enveloppées par des droites se déplaçant d'une manière continue dans le plan suivant une certaine loi, a fait donner aux coordonnées u et v de la droite le nom de *coordonnées tangentielles* (*).

L'emploi des coordonnées tangentielles dans l'analyse géométrique remonte à Plücker; elles ont fourni un précieux moyen d'investigation et mis algébriquement en évidence le principe de dualité, en vertu duquel les propriétés résultant de la jonction des points se transportent à l'intersection des droites par une simple réciprocité dans les énoncés.

Le travail que nous commençons actuellement a précisément pour but de faire connaître et apprécier les nombreuses applications du nouvel instrument dont Plücker a enrichi l'analyse.

(*) Clebsch les appelle aussi *coordonnées-lignes*, par opposition aux quantités x et y, qu'il appelle *coordonnées-points*.

Équation du point d'intersection de deux droites. — L'équation $ux + vy = 1$ étant, comme nous l'avons dit, la relation existant entre les coordonnées u et v de toutes les droites qui passent par un même point (x, y), nous l'appellerons l'*équation du point*, de même qu'en coordonnées cartésiennes elle est l'équation de la droite, parce qu'elle établit une relation entre les coordonnées cartésiennes x et y de tous les points situés sur une même droite. Soient $(u_0\ v_0)$ et $(u_1\ v_1)$ deux droites données. Pour que ces droites passent par le point (x, y), il faut qu'on ait

$$u_0x + v_0y - 1 = 0$$

et

$$u_1x + v_1y - 1 = 0.$$

Une droite quelconque passant par ce point aura pour équation

$$ux + vy - 1 = 0.$$

Si l'on tire des deux premières conditions les valeurs de x et de y, et qu'on les reporte dans la troisième équation, on aura entre u et v une relation exprimant que la droite $ux + vy - 1 = 0$ passe par le point d'intersection des deux droites $(u_0\ v_0)$ et $(u_1\ v_1)$, c'est-à-dire l'équation de ce point. Or, le calcul dont il s'agit est l'élimination de x, y, t entre les trois équations linéaires et homogènes

$$u_0x + v_0y - t = 0$$
$$u_1x + v_1y - t = 0$$
$$ux + vy - t = 0$$

et son résultat est le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dont l'analogie est complète avec l'équation de la droite qui joint les deux points (x_0y_0) et (x_1y_1).

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Coordonnées tangentielles homogènes. — De même qu'en coordonnées cartésiennes il y a le plus souvent intérêt à employer des coordonnées homogènes, en remplaçant dans les calculs x et y par $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$, en coordonnées tangentielles

nous ferons aussi très souvent usage de coordonnées homogènes, en remplaçant u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$. Les résultats, en fonction de u et v seulement, se déduiront des résultats en u, v, w, par l'hypothèse $w = 1$.

L'équation du point devient, dans ce cas, $ux + vy = w$, et alors ce sont les quantités $\frac{w}{u}$ et $\frac{w}{v}$ qui représentent en grandeur et en signe les segments déterminés par chaque droite, à partir de l'origine, sur les axes des coordonnées.

Quand on considère une droite donnée sous la forme générale ordinaire $Ax + By + C = 0$, on a donc $-\frac{C}{A} = \frac{w}{u}$, et $-\frac{C}{B} = \frac{w}{v}$.

Définition d'un faisceau de droites. — Coordonnées d'un rayon quelconque d'un faisceau. — On appelle *faisceau de droites* l'ensemble des droites qui tournent autour d'un point fixe; l'une quelconque de ces droites porte le nom de *rayon du faisceau*, et le point fixe en est le *centre*.

L'équation du point d'intersection de deux droites (u_0v_0) et (u_1v_1) étant

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

il est évident que cette équation devient identique quand on y fait $u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}$ et $v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda}$. On a, en effet, identiquement :

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 + \lambda u_1 & v_0 + \lambda v_1 & 1 + \lambda \\ u_0 & v^0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{u_0 + u_0}{1 + \lambda} & \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda} & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} (1 + \lambda) = 0.$$

On peut, d'ailleurs, observer aussi que l'équation générale des droites passant par le point d'intersection des deux

droites $u_0x + v_0y - 1 = 0$ et $u_1x + v_1y - 1 = 0$ est $u_0x + v_0y - 1 + \lambda(u_1x + v_1y - 1) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda} x + \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda} y - 1 = 0.$$

Les coordonnées de l'une quelconque de ces droites sont donc $u = \dfrac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}$ $v = \dfrac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda}$.

Cette remarque est utile en ce qu'elle va nous permettre d'interpréter le paramètre λ au point de vue géométrique.

Interprétation géométrique de λ. — Soient OA_0 et OA_1 les deux droites $(u_0\ v_1)$ et $(u_0\ v_1)$, et soit OA l'une quelconque des droites du faisceau dont le centre est en O, correspondant à une valeur particulière de λ.

$M(x, y)$ étant un point quelconque de OA, menons les perpendiculaires MP_0 et MP_1 sur les deux rayons fixes OA_0 et OA_1 ; on a :

$$MP_0 = \frac{u_0x + v_0y - 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} \quad \text{et } MP_1 = \frac{u_1x + v_1y - 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}.$$

Donc $\dfrac{MP_0}{MP_1} = \dfrac{u_0x + v_0y - 1}{u_1x + v_1y - 1} \times \dfrac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$.

Mais l'équation de OA étant

$$u_0x + v_0y - 1 + \lambda(u_1\,x + v_1\,y - 1) = 0,$$

il en résulte $\dfrac{MP_0}{MP_1} = -\lambda\ \dfrac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$,

d'où $\lambda = -\dfrac{MP_0}{MP_1}\ \dfrac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$.

Le rapport $\dfrac{MP_0}{MP_1}$ est le même pour tous les points du rayon OA ; et l'on voit que le paramètre λ ne diffère de ce rapport que par le facteur constant $\sqrt{\dfrac{u_0^2 + v_0^2}{u_1^2 + v_1^2}}$.

Rapport anharmonique de quatre rayons d'un faisceau. — Si l'on considère un autre rayon du faisceau, λ' étant la valeur du paramètre qui lui correspond, on aura, comme précédemment :

$$\lambda' = -\frac{M'P'_0}{M'P'_1} \times \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{u_1^2 + v_1^2}}$$

D'où
$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{MP_0}{MP_1} : \frac{M'P'_0}{M'P'_1}.$$

Ce rapport, qui ne dépend que de la position relative des quatre rayons considérés, porte le nom de *rapport anharmonique* de ces quatre rayons.

C'est un élément très important, dont M. Chasles a fait un merveilleux usage en géométrie pure, et que nous aurons souvent l'occasion de considérer dans la suite de ce travail.

On peut en donner une expression simple, en fonction des angles que font entre eux les rayons considérés. On a, en effet,

$$MP_0 = OM \sin (OA_0, OA), \quad MP_1 = OM \sin (OA, OA_1)$$
$$M'P'_0 = OM' \sin (OA_0, OA'), \quad M'P'_1 = OM' \sin (OA', OA_1)$$

Donc
$$\frac{MP_0}{MP_1} = \frac{\sin (OA_0, OA)}{\sin (OA, OA_1)} \text{ et } \frac{M'P'_0}{M'P'_1} = \frac{\sin (OA_0, OA')}{\sin (OA', OA_1)}$$

et par conséquent :
$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin (OA_0, OA)}{\sin (OA, OA_1)} : \frac{\sin (OA_0, OA')}{\sin (OA', OA_1)}.$$

Dans l'écriture des angles, nous plaçons toujours le premier le rayon que nous considérons comme le rayon du départ, et nous supposons toujours, comme pour les segments, que l'on fait la convention $(OA_0, OA) = -(OA, OA_0)$.

Le rapport anharmonique est projectif. — L'observation précédente établit immédiatement que le rapport anharmonique est projectif; car une transversale quelconque rencontrant les quatre rayons d'un faisceau est divisée par eux en quatre segments de mêmes signes que les angles correspondants du faisceau, et si l'on considère les quatre points déterminés sur la transversale par les quatre rayons du

faisceau, on voit que le quotient du rapport des distances de deux de ces points à l'un des deux autres par le rapport des distances des deux mêmes points à l'autre point du second couple, est égal au quotient des rapports des sinus des angles formés par les rayons qui joignent ces points au centre du faisceau (*). Dès lors, pour que le théorème soit évident, il suffit d'avoir préalablement défini le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, comme l'a fait M. Chasles ; mais nous n'insisterons pas sur ce point qui est du domaine de la géométrie pure.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

284. — Résoudre le système :

$$\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{121}{13}; \; x + y = 2.$$

285. — Si α, β, γ sont trois angles différents satisfaisant à l'équation

$$\lambda \text{ séc } x + \mu \text{ coséc } x + \nu = 0,$$

prouver que l'on a

$$\sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

286. — Établir une relation entre les coefficients de l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$ pour qu'on puisse la mettre sous la forme

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + q = 0.$$

287. — On donne

$$x - y = a; \; xy = b.$$

Exprimer $x^n - y^n$ en fonction de b et de a pour une valeur entière, positive et quelconque de n.

(*) J'ai donné la démonstration générale de ce fait dans mes *Leçons de géométrie analytique*, au § 2 du chapitre qui traite de la théorie des projections.

288. — Soit un triangle ABC, et O le centre du cercle circonscrit. On joint OA, OB, OC qui rencontrent la circonférence en M, M′ et M″; on mène MD perpendiculaire sur BC, M′D′ perpendiculaire sur CA, et M″D″ perpendiculaire sur AB. Démontrer que les droites AD, B′D′, CD″ concourent en un même point.

289. — On donne deux cercles qui se coupent; par l'un des points d'intersection, on fait passer une corde commune aux deux cercles ; trouver le lieu du milieu de ces cordes.

290. — Étant donnés deux points A et B sur une droite infinie, on sait qu'il y a deux points C et D qui divisent AB dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. Dans quel rapport le point O, milieu de CD, divise-t-il la ligne AB? Le point O est-il entre A et B, ou en dehors de ce segment?

291. — On donne une parabole; soit M un point de cette courbe: on projette ce point sur la directrice, et du point C, projection de M sur la directrice, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur FM. Trouver le lieu du pied I de cette perpendiculaire. *(De Longchamps.)*

292. — On donne une parabole; par le pied O de la directrice, on mène une sécante à la parabole; soient A et B les points d'intersection et C le milieu de AB. On projette le point C sur la directrice et de cette projection on abaisse une perpendiculaire DI sur la sécante OAB. Trouver le lieu du point I. *(De Longchamps.)*

Mathématiques spéciales.

293. — Trouver l'équation du système de perpendiculaires abaissées du point (x', y') sur les droites,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

les axes étant rectangulaires. *(Université de Dublin.)*

294. — Les lignes

$$x = 0,\ y = 0,\ x + my + n = 0,\ mx - y + n' = 0$$

forment un quadrilatère inscriptible; trouver le rayon du cercle circonscrit. *(Ibid.)*

295. — Le pôle étant placé au centre de similitude du cercle $\rho^2 - 2\rho a \cos(\theta - \alpha) + a^2 = r^2$ et du cercle de rayon mr, trouver l'équation de l'axe radical, et celle du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés, et dont le centre a pour angle polaire β.

(Université de Dublin.)

296. — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients p, q, r de l'équation du troisième degré

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

pour que les racines soient les sinus des angles d'un triangle.

(Ibid.)

297. — Si α, β, γ, δ sont les racines de l'équation du quatrième dégré $f(x) = 0$, on peut exprimer la somme $f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) + f'(\delta)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs.

298. — Si l'on cherche toutes les équations du quatrième degré telles que les carrés de leurs racines soient en même temps racines de la même équation, on obtient *seize* équations satisfaisant à cette condition. 1° Former ces équations. 2° Il y en a *dix* dont les coefficients sont réels; démontrer qu'aucune n'est irréductible, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en d'autres équations de degrés moindres; trouver leurs racines. 3° Des *six* équations dont les coefficients sont imaginaires et qui satisfont à la question, il y en a *trois* qui sont les conjuguées des trois autres; démontrer *a priori* qu'il doit en être ainsi.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 664-1.

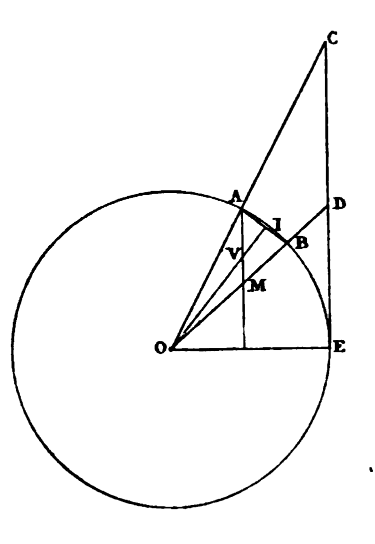
NOUVELLE MÉTHODE
POUR LE CALCUL
DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE

Par **L. Geoffroy,**
Répétiteur à l'École Centrale, Professeur au Collège Chaptal.

Les procédés exposés en géométrie élémentaire pour calculer le nombre π reviennent, en principe, à considérer la circonférence comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit ou circonscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

On ne parait pas s'être préoccupé jusqu'ici, de considérer la limite d'une ligne polygonale irrégulière, bien qu'on démontre généralement, que la limite ne dépend pas de la loi d'inscription.

Nous nous proposons d'exposer, dans cette note, une méthode où la loi d'inscription est différente de celle employée dans les méthodes dites des périmètres et des isopérimètres.



Lemme. — Considérons une circonférence de rayon $R = 1$, menons la tangente en E, prenons sur la circonférence, un arc quelconque AB, et traçons les rayons OA, OB qui déterminent sur la tangente considérée, un segment CD. Comparons la corde AB, à ce segment.

Pour cela, abaissons OI perpendiculaire sur AB. Les triangles OAB, OCD qui ont un angle commun, satis-

font à la relation :

$$\frac{Tr . OAB}{Tr . OCD} = \frac{OA . OB}{OC . OD}$$

Mais, si on évalue les aires de ces deux triangles, on aura :

$$Tr . OAB = \frac{AB . OI}{2}$$

$$Tr . OCD = \frac{CD . OE}{2}$$

on a, par conséquent :

$$\frac{OA . OB}{OC . OD} = \frac{AB . OI}{CD . OE}$$

d'où, en remarquant que le rayon est égal à 1,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{OC . OD . OI}$$

Si nous remplaçons OI par 1, et OD par OC, nous diminuons le second membre de la précédente égalité, et par suite :

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2} \qquad (1)$$

d'autre part, nous avons

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2} \qquad (2)$$

ce qui revient à démontrer que $\frac{1}{OC . OD . OI}$ est plus petit que $\frac{1}{OD^2}$

ou qu'on a
$$\frac{1}{OC . OI} < \frac{1}{OD}$$

ou enfin
$$\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$$

Cette dernière inégalité se vérifie immédiatement, en menant AM parallèle à CD. On a en effet

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OD}$$

or $OA = 1$, et $OM < OV < OI$

Donc
$$\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$$

L'égalité (2) est par conséquent démontrée. Nous avons,

en résumé, la suite d'inégalités :

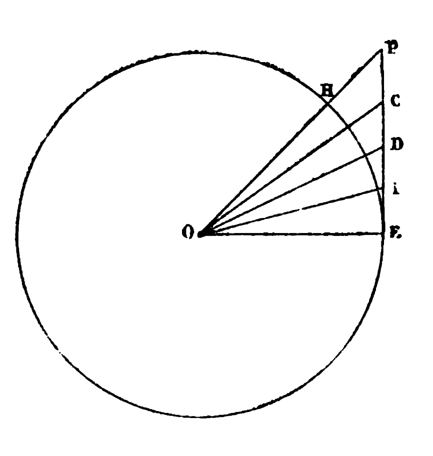
$$\frac{1}{OC^2} < \frac{AB}{AC} < \frac{1}{OD^2}. \qquad (3)$$

Si l'on suppose que AB tende vers zéro, il en sera de même de CD et on aura $\lim \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OD^2}$ car OC et OD se confondent à la limite.

Calcul d'une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$.

Prenons sur la tangente EP $= 1$; joignons OP, l'arc EH est égal à $\frac{\pi}{4}$, puisque le rayon du cercle est 1.

Pour obtenir une valeur approchée de cet arc, partageons EP en n divisions égales, et unissons les points de division au point O. Ces droites déterminent, sur la circonférence, les sommets d'une ligne brisée irrégulière EFABH. Le périmètre de cette ligne se rapprochera d'autant plus de l'arc $\frac{\pi}{4}$ que n sera plus grand.



Soit AB un élément de ce polygone, l'élément correspondant CD de la tangente a pour valeur $\frac{EP}{n} = \frac{1}{n}$; nous avons d'après le lemme précédent

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2}$$

or $$OD^2 = 1 + ED^2$$

Soit p le nombre de divisions égales comptées de E en D, on aura $ED = p \cdot \frac{1}{n}$, $CD = \frac{1}{n}$; donc en remplaçant, il

viendra $$AB < \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{n^2}}$$

ou $$AB < \frac{n}{n^2 + p^2}$$

par suite le périmètre P de la ligne inscrite est plus petit que la somme des fractions de la forme $\frac{n}{n^2 + p^2}$, lorsque p varie de o à $n - 1$

donc $$P < n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2}\right) \quad (4)$$

P se confond à la limite avec l'arc EH, lorsque n croît au delà de toute limite, on peut donc écrire

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2}\right) \quad (5)$$

D'autre part, nous avons établi l'inégalité

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2}$$

on a $$OC^2 = 1 + EC^2 = 1 + \frac{(p+1)^2}{n^2}$$

donc, il viendra

$$AB > CD \frac{1}{1 + \frac{p) + 1)^2}{n^2}}$$

$$AB > \frac{n}{n^2 + (p+1)^2}$$

en faisant la somme des inégalités analogues à la précédente de $p = o$, à $p = n - 1$. On aura

$$P > n\left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2}\right) \quad (6)$$

On voit qu'en rapprochant les inégalités (4) et (6), on peut calculer deux valeurs approchées l'une par excès l'autre par

défaut du périmètre P. Ces deux valeurs ne diffèrent que de

$$n\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\right] = \frac{1}{2n}$$

elles tendent toutes deux vers $\frac{\pi}{4}$.

On pourra donc, en prenant n suffisamment grand, avoir deux valeurs approchées de $\frac{\pi}{4}$, différant aussi peu qu'on le voudra.

Nous indiquons ici le résultat du calcul effectué pour $n = 10$.

La formule (4) donne :

$$P < 10\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{104} + \frac{1}{109} + \frac{1}{116} + \frac{1}{125} + \frac{1}{136} + \frac{1}{149} + \frac{1}{164} + \frac{1}{181}\right)$$

en effectuant on trouve :

$$P < 0,8097 \ldots \text{ environ,}$$

la formule (6) donne :

$$P > 10\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{104} + \ldots + \frac{1}{200}\right)$$

$$P > 0,7597 \ldots \text{ environ.}$$

Ces deux résultats comprennent entre eux la valeur $\frac{\pi}{4} = 0,785 \ldots$

Développement de la valeur de $\frac{\pi}{4}$ en série.

Reprenons la formule (5).

Nous avons trouvé :

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right)$$

Considérons dans la parenthèse la fraction de rang quelconque $\frac{1}{n^2+p^2}$,

Si on effectue la division, on aura :

$$\frac{1}{n^2+p^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{p^2}{n^4} + \frac{p^4}{n^6} - \frac{p^6}{n^8} + \frac{p^8}{n^{10}} - \ldots$$

Si on développe de cette manière chacune des fractions

de la parenthèse, on aura :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8} + \dots$$

$$\frac{1}{n^2+2^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2^2}{n^4} + \frac{2^4}{n^6} - \frac{2^6}{n^8} + \dots$$

$$\frac{1}{n^2+3^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{3^2}{n^4} + \frac{3^4}{n^6} - \frac{3^6}{n^8} + \dots$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{n^2+(n-1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^4} + \frac{(n-1)^4}{n^6} - \frac{(n-1)^6}{n^8} + \dots$$

en ajoutant par colonnes verticales, et en multipliant par n, on aura, en désignant par S_2, S_3, S_4, etc., la somme des puissances deuxième, troisième, etc., des $(n-1)$ premiers nombres entiers.

$$\frac{\pi}{4} = \lim\left(1 - \frac{S_2}{n^3} + \frac{S_4}{n^5} + \frac{S_6}{n^7} + \frac{S_8}{n^9} - \dots\right) \quad (7)$$

Pour calculer ce que deviennent $\frac{S_2}{n^3}$, $\frac{S_4}{n^5}$, etc., à la limite nous établirons le théorème suivant :

Théorème. — *Sachant que la somme* S_p *des puissances* p^{mes} *des* $n-1$ *premiers nombres entiers est une fonction entière du degré* $(p+1)$, *de* n *considéré comme variable, démontrer que, lorsque* n *augmente au delà de toute limite, on a*

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

En effet, développons le binôme $(a+1)^{p+1}$ et remplaçons successivement a par 1, 2, 3, etc., ... $(n-1)$, nous aurons

$$2^{p+1} = 1 + (p+1)1^p + \frac{(p+1)p}{1\,.\,2}1^{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1\,.\,2\,.\,3}1^{p-2} + \dots$$

$$3^{p+1} = 2^{p+1} + (p+1)2^p + \frac{(p+1)p}{1\,.\,2}2^{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1\,.\,2\,.\,3}2^{p-2} + \dots$$

. . . .

$$n^{p+1} = (n-1)^{p+1} + (p+1)(n-1)^p$$
$$+ \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}(n-1)^{p-1}$$
$$+ \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)^{p-2} + \ldots$$

En ajoutant et simplifiant on aura

$$n^{p+1} = 1 + (p+1)S_p$$
$$+ \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}S_{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}S_{p-2} + \ldots$$

Divisons les deux membres par n^{p+1}; les polynômes S_{p-1}, S_{p-2}, S_{p-3}, etc., sont des fonctions de n, du degré p, $p-1$, etc., par suite les quotients

$$\frac{S_{p-1}}{n^{p+1}}, \quad \frac{S_{p-2}}{n^{p+1}}, \quad \frac{S_{p-3}}{n^{p+1}}, \quad \text{etc},$$

s'annuleront pour $n = \infty$, puisque le degré du numérateur par rapport à n, est inférieur au degré du dénominateur.

On aura donc à la limite

$$1 = (p+1) \lim \frac{S^p}{n^{p+1}},$$

d'où $\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

Si nous reprenons maintenant la formule (7) et si nous remarquons qu'on a, d'après le théorème précédent,

$$\lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3},$$
$$\lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}, \text{ etc},$$

il viendra $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, etc.

Nous obtenons ainsi le développement indiqué dans tous les traités de calcul intégral.

(A suivre.)

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **Eug. Marin**, élève au Lycée d'Agen.

On est quelquefois amené à chercher le plus petit commun multiple d'une suite assez considérable de nombres. L'opération qui consisterait à les décomposer en facteurs premiers est toujours très longue ; la méthode suivante, que nous croyons peu connue, nous semble plus avantageuse au point de vue de l'écriture, et elle est aussi prompte que la méthode ordinaire.

Règle. — On écrit les nombres donnés sur une même ligne horizontale en barrant ceux qui sont diviseurs des autres (1). On prend un diviseur n de l'un des nombres non barrés, et on cherche parmi les nombres restants, ceux qui sont divisibles par n; au-dessous de chacun d'eux, on écrit le quotient correspondant.

Parmi les nombres non multiples de n, on prend ceux qui ont un facteur commun avec n, et on les divise par ce facteur, en écrivant le quotient correspondant sous le nombre qui l'a formé.

On écrit une seconde fois, sur une même ligne horizontale les divers quotients, et les nombres, non employés, premiers avec n ; on obtient ainsi une seconde ligne de nombres sur lesquels on opère comme précédemment, jusqu'à ce que l'on n'arrive qu'à des nombres premiers entre eux. Le produit des nombres contenus dans la dernière ligne, et des différents diviseurs n, n', n'' ... est le plus petit commun multiple cherché.

Proposons-nous, par exemple, de trouver le plus petit commun multiple des nombres

24, 16, 6, 20, 4, 8, 10, 30, 12, 25.

(1) Par suite de difficultés d'impression, ici, au lieu de barrer ces nombres, nous les soulignons, ce qui revient au même (AM).

En appliquant la règle, on dispose les calculs comme il suit:

12	24	16	6	20	4	8	10	30	12	25
	2	4		5				5		25

Le plus petit commun multiple est

$$4 \times 25 \times 12 = 1200.$$

En effet, tout nombre divisible par 24 l'est aussi par 4, 6, 8, 12, sous-multiples de 24; on peut donc négliger ces nombres; pour la même raison, on négligera 10, qui divise 20; la question est donc ramenée à trouver le plus petit commun multiple entre les nombres

24, 16, 20, 30 et 25.

Prenons un diviseur d'un de ces nombres, 12 par exemple, qui est un diviseur de 24. Le plus petit commun multiple devant contenir le facteur 24, contiendra 12 avec le facteur 2, quotient de la division de 24 par 12; de plus 12 fournit le facteur 4, qui divise 20 et 16; le facteur 6, qui divise 30. Il ne reste plus à prendre pour compléter ces nombres que les quotients de 16 par 4, de 20 par 4, de 30 par 6, 25 étant premier avec 12, on l'écrit de nouveau tel quel.

On obtient ainsi la seconde ligne de nombres

2 4 5 5 25

Nous supprimons 2 comme diviseur de 4, et 5 comme diviseur de 25. Il reste 4 et 25, qui sont des nombres premiers entre eux ; le produit de ces deux nombres, multiplié par 12, est le plus petit commun multiple cherché.

Application. — 1. *Trouver le plus petit commun multiple des nombres*

14 16 40 50 55 25 8 9 64

On dispose l'opération comme il suit:

10	14	16	40	50	55	25	8	9	64
	7		4	5	11	5		9	32

Le plus petit commun multiple est

$$7 \times 5 \times 11 \times 9 \times 32 \times 10 = 1108800$$

2. *Trouver le plus petit commun multiple des nombres*

27 24 6 15 5 9 126

La règle donne

9 |	27	24	6	15	5	9	126
2 |	3	8		5			14
	3	4		5			7

Le plus petit commun multiple est

$$3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 2 \times 9 = 7560.$$

Cette méthode est surtout avantageuse et préférable à la méthode ordinaire lorsque les nombres ne sont pas très-considérables. Elle peut servir souvent pour la réduction des fractions au même dénominateur.

SUR LA SOMME DES NOMBRES PREMIERS

A UN NOMBRE DONNÉ n ET COMPRIS ENTRE ZÉRO ET p.

Par **A. Minine**

(Société mathématique de Moscou, séance du 21 octobre 1880).

Nous désignerons la somme des nombres premiers à n et compris entre o et p par le symbole $\left(\sum_n (p)\right)_0^p$

Prenons dans tout ce qui va suivre $n > 1$, supposons d'abord $p > n$ et divisons p par n. Si nous admettons que le quotient de cette division est m et le reste k, alors p sera égal à $mn + k$ et

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^p = \left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k}$$

Avant de commencer la recherche de cette somme, faisons les remarques suivantes :

1° Si le nombre p est premier à n, le nombre $mn \pm p$ est aussi premier à n.

2° $$\left(\varphi(n)\right)_0^{mn} = m.\varphi(n) \ (*)$$

3° $m\varphi(n)$ représente un nombre pair excepté lorsque $n = 2$ et que en même temps m est impair.

(*) Voir mon article « *Du nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à un nombre donné* n *et compris entre zéro et* p ». (*Journal de mathématiques*, juin 1880.)

4° $$n \cdot \varphi(n) = \varphi(n^2)$$

En considérant la suite des nombres :

$1, 2, 3, 4 \ldots n \ldots mn, mn + 1, mn + 2, \ldots \ldots mn + k,$

Nous voyons que le problème de la détermination de la somme $\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k}$ peut être partagé en deux :

1° La détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre o et mn.

2° La détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre mn et $mn + k$.

En commençant la résolution du premier problème, exceptons de ce problème pour un instant le cas dans lequel $n = 2$ en même temps que m est un nombre impair. Écrivons tous les nombres premiers à n et compris entre o et mn.

(a) $1, \quad p, \quad p', \quad p'' \ldots \ldots$

(b) $mn - 1, \quad mn - p, \quad mn - p', \quad mn - p'' \ldots \ldots$

D'après la troisième remarque, nous concluons que le nombre des termes de la suite (a) est égal à celui des termes de la suite (b); c'est pourquoi, en faisant l'addition de ces deux suites des nombres, nous trouvons que

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = mn + mn + mn + \ldots \ldots,$$

où mn est répété $\dfrac{\left(\varphi(n)\right)_0^{mn}}{2}$ fois, et pour cela, en vertu de la seconde remarque, nous aurons

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = mn \cdot \frac{m\varphi(n)}{2} = \frac{m^2}{2} \cdot \varphi(n^2) \qquad (1)$$

Il est facile de démontrer que cette formule renferme aussi le cas que nous avons exclu. En effet, la somme des nombres de la suite

$1, p, p', p'' \ldots m \ldots 2m - p'', 2m - p', 2m - p, 2m - 1$

qui contient tous les nombres premiers à 2 et compris entre o et $2m$ (m est un nombre impair) est déterminée, comme on peut le conclure facilement, par la formule

$$\left(\sum_2 (p)\right)_0^{2m} = 2m \, \frac{(m\varphi(2) - 1)}{2} + m = m^2 \cdot \frac{\varphi(2^2)}{2}$$

qui est identique au cas particulier de la formule (1) pour $n = 2$.

En passant à la résolution du second problème, c'est-à-dire à la détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre mn et $mn + k$, remarquons que dans la suite $mn + 1, mn + 2, mn + 3, \ldots\ldots mn + k$, les seuls nombres premiers à n sont ceux qui se composent de mn et d'un nombre premier à n. Il y a autant de ces nombres qu'il y a de nombres premiers à n dans la suite des nombres entre o et k; par cette raison leur somme est égale à

$$mn\left(\varphi(n)\right)_0^k + \left(\sum_n (p)\right)_0^k .$$

On a donc la formule générale

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mn\left(\varphi(n)\right)_0^K + \left(\sum_n (p)\right)_0^k \quad (2)$$

Cette formule nous montre que la question de la détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre o et $mn + k$ est ramenée à la détermination de la somme des nombres premiers à n et compris entre o et k. Si k n'est pas grand, la dernière somme peut être déterminée sans peine à l'aide de l'addition ordinaire. Si k diffère peu de n, alors pour cette somme, on peut de la somme des nombres premiers et non supérieurs à n, égale à $\frac{\varphi(n^2)}{2}$, soustraire la somme des nombres premiers à n et compris entre k et n. Le calcul peut être difficile seulement lorsque k, étant un grand nombre, diffère trop de n. Appliquons la formule (2) à quelques cas particuliers.

1° Si n est un nombre premier, alors tous les nombres entre o et k sont les nombres premiers à n; leur nombre est égale à k, et la formule (2) se reduit à

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mnk + k\frac{(k+1)}{2} \quad (3)$$

2° Si k est plus petit que le moindre des nombres qui composent n, on a aussi

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mnk + k\frac{(k+1)}{2} \quad (4)$$

3° Si $k = 0$, on a

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = \frac{m^2}{2} \varphi(n^2) \tag{5}$$

4° Si $k + 0$, $m = 1$, on a

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n} = \varphi \frac{(n^2)}{2} \tag{6}$$

Supposons maintenant $p < n$.

Si nous considérons dans ce cas le nombre p comme étant la différence entre n et k, nous obtiendrons facilement la formule suivante :

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n-k} = \varphi \frac{(n^2)}{2} - n \left(\varphi(n)\right)_0^{k-1} + \left(\sum_n (p)\right)_0^{k-1} \tag{7}$$

Si n est premier, cette formule se réduit à

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n-k} = \frac{n^2 - n}{2} - n(k-1) + (k-1)\frac{k}{2}$$
$$= (1 + n - k)\frac{(n-k)}{2} \tag{8}$$

k étant moindre que le plus petit multiple du nombre n, la même formule (7) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{n-k} = \varphi \frac{(n^2)}{2} - (k-1)n + (k+1)\frac{k}{2} \tag{9}$$

Appliquons nos formules à quelques exemples.

Exemple 1. — Soient $n = 10$, $p = 54 = 5.10 + 4$. La formule (2) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \left(\sum_{10} (p)\right)_0^{5.10+4} = \frac{5^2}{2}\varphi(10^2) + 5.10\left(\varphi(10)\right)_0^4$$
$$+ \left(\sum_n (p)\right)_0^4 = \frac{25}{2}(5^2 - 5)(2^2 - 2) + 5.10.2 + 1 + 3$$
$$= 25.20 + 100 + 4 = 604$$

Exemple 2. — Soient $n = 15$, $p = 47 = 3.15 + 2$. La formule (4) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn+k} = \left(\sum_{15} (p)\right)_0^{3.15+2} = \frac{3^2}{2}\varphi(3^2.5^2) + 3.15.2$$
$$+ (1+2).\frac{2}{2} = \frac{9}{2}(9-3)(25-5) + 90 + 3 = 633.$$

Exemple 3. — Soient $n + 12$, $p = 24 = 2.12$. La formule (5) donne

$$\left(\sum_n (p)\right)_0^{mn} = \left(\sum_{12} (p)\right)_0^{24} = \frac{2^2}{2}.\ \varphi\,(12^2) = 2.(3^2-3)\,(2^4-2^3)$$
$$= 2.6.8 = 96.$$

Exemple 4. — Soient $n = 21$, $p = 12$. La formule (7) donne

$$\left(\sum_{21} (p)\right)_0^{12} = \varphi\,\frac{(3^2.7^2)}{2} - 21.\left(\varphi\,(3.7)\right)_0^{8} + \left(\sum_{21} (p)\right)_0^{8}$$
$$= \frac{(9-3).(49-7)}{2} - 21.5 + 20 = 41$$

Exemple 5. — Soient $n = 15$, $p = 13 = 15 - 2$. La formule (9) donne $\left(\sum_{15} (p)\right)^{13} = \varphi\,\frac{(3^2.5^2)}{2} - 15 + 1 = 46.$

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

Cette étude a pour but la recherche de relations entre les éléments de figures liées à un triangle, ou bien entre les éléments d'un quadrilatère ou d'un polygone. De plus, nous nous proposons la résolution par la trigonométrie de quelques questions de maximum ou de minimum. On voit donc que cette note peut servir de complément à un article publié dans le *Journal de mathématiques* sous le titre de *Formules de trigonométrie (Voir 4e année, p. 201, 246, 297, 493)*.

Ces questions ne nous appartiennent pas; pour la plupart nous en avons trouvé les énoncés dans le traité de trigonométrie rectiligne de M. *Todhunter*, ou dans les excellents recueils d'exemples de MM. *Reidt* et *Wrigley*. Les lettres T, R, W, mises à côté de ces questions, en indiquent la source: celles qui ne portent pas d'indications proviennent de nos propres recherches; pour les autres, nous avons donné seulement la démonstration de questions signalées dans des ouvrages justement appréciés en Allemagne et en Angleterre.

Nous emploierons des notations usitées dans tous les traités modernes de trigonométrie, et en particulier dans l'ouvrage dû à M. *Desboves*, et intitulé: *Questions de trigonométrie.*

I

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS DE FIGURES DÉDUITES D'UN TRIANGLE

1. — (*R.*) *Trouver le rapport de l'aire d'un triangle à l'aire du cercle circonscrit en fonction des angles et du nombre π.*

En appelant C l'aire du cercle circonscrit on aura :

$$\frac{C}{S} = \frac{\pi R^2}{S} = \frac{\pi}{\dfrac{16\ S^3}{a^2 b^2 c^2}} = \frac{\pi}{16 . \dfrac{S}{ab} . \dfrac{S}{ac} . \dfrac{S}{bc}}$$

Mais on a

$$2S = ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A$$

On en tire immédiatement

$$\frac{C}{S} = \frac{\pi}{2 \sin A \sin B \sin C}$$

2. — (*T*) *Même question pour le cercle inscrit.*

Appelons Γ l'aire du cercle inscrit, nous aurons

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\pi . \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}\sqrt{\dfrac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}}\sqrt{\dfrac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}}$$

d'ou l'on tire

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2} . \operatorname{cotg}\dfrac{B}{2} . \operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}}$$

3. — On trouverait de même, en appelant Γ_a, Γ_b, Γ_c, les aires des cercles ex-inscrits.

$$\frac{\Gamma_a}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2} \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}$$

$$\frac{r_b}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}:$$

$$\frac{r_c}{S} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}};$$

On en tire facilement

$$\frac{r_a}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$$

4. — (R) *Les médianes d'un triangle forment chacune avec les côtés du triangle deux autres triangles ; appelons* r_1, $r_2 \ldots\ldots r_6$ *les rayons des cercles inscrits,* $R_1, R_2 \ldots\ldots R_6$ *les rayons des cercles circonscrits à ces triangles ; on a les relations :*

$$R_1\, R_3\, R_5 = R_2\, R_4\, R_6$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$$

Soient m_a, m_b, m_c les médianes; en remarquant que l'aire de chacun des triangles formés est la moitié de l'aire du triangle donné, on a

$$R_1 = \frac{cam_a}{4S}; \qquad R_2 = \frac{abm_a}{4S}$$

$$R_3 = \frac{abm_b}{4S}; \qquad R_4 = \frac{bam_b}{4S}$$

$$R_5 = \frac{bcm_c}{4S}; \qquad R_6 = \frac{cam_c}{4S}$$

Donc $\quad R_1\, R_3\, R_5 = R_2\, R_4\, R_6 = \dfrac{a^2b^2c^2 m_a\, m_b\, m_c}{(4S)^3}.$

On a aussi

$$r_1 = \frac{2S}{c + \frac{a}{2} + m_a}; \qquad r_2 = \frac{2S}{b + \frac{a}{2} + m_a};$$

$$r_3 = \frac{2S}{a + \frac{b}{2} + m_b}; \qquad r_4 = \frac{2S}{c + \frac{b}{2} + m_b};$$

$$r_5 = \frac{2S}{b + \frac{c}{2} + m_c}; \qquad r_6 = \frac{2S}{a + \frac{c}{2} + m_c}.$$

D'où on tire

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}=\left(\frac{\frac{3}{2}(a+b+c)+(m_a+m_b+m_c)}{2S}\right)$$

5. — (R) *On construit un triangle* $A_1B_1C_1$ *avec les trois segments inégaux déterminés, par la circonférence inscrite, sur les côtés d'un triangle* ABC. *Le rayon du cercle inscrit dans le triangle donné est moyen proportionnel entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit dans le nouveau triangle.*

Soient a_1, b_1, c_1, les côtés, R_1 le rayon du cercle circonscrit, r_1 celui du cercle inscrit, S_1 l'aire, $2p_1$ le périmètre du nouveau triangle.

On aura

$$a_1 = p - a; \quad b_1 = p - b; \quad c_1 = p - c; \quad 2p_1 = p;$$

et par conséquent

$$R_1 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4S_1} = \frac{S^2}{4pS_1},$$

et

$$2R_1 = \frac{S^2}{2pS_1}.$$

On a aussi

$$r_1 = \frac{2S_1}{p},$$

donc

$$2R_1 \,.\, r_1 = \frac{S^2}{p^2} = r^2 \qquad \text{c. q. f. p.}$$

6. — *On construit un triangle* $A_a\,B_a\,C_a$ *avec les trois segments inégaux déterminés par l'une* O_a *des circonférences ex-inscrites sur les trois côtés d'un triangle* ABC. *Le rayon du cercle ex-inscrit* O_a *du triangle donné est moyen proportionnel entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit dans le nouveau triangle.*

Soient a_a, b_a, c_a les côtés, R_a le rayon du cercle circonscrit r_a celui du cercle inscrit, S_a l'aire, $2p_a$ le périmètre du nouveau triangle. On aura

$$a_a = p; \quad b_a = p - b; \quad c_a = p - c; \quad 2p_a = p - a;$$

et par conséquent

$$R_a = \frac{p(p-b)(p-c)}{4S_a} = \frac{S^2}{4(p-a)S_a}.$$

et

$$2R_a = \frac{S^2}{2(p-a)S_a}.$$

On a aussi $$r_a = \frac{2S_a}{p-a}$$

donc $$2R_a \cdot r_a = \frac{S^2}{(p-a)^2} = r'^2 \quad \text{c. q. f. d.}$$

(A suivre.)

QUESTION 132

Solution par M. H. Bourget, au Collège d'Aix.

Démontrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

Lemme. — Le produit de deux nombres qui diffèrent de 3, $a(a+3)$ n'est jamais un carré, excepté pour $a = 1$.

En effet, on a successivement

$$a(a+3) = a^2 + 2a + a$$

ajoutons et retranchons 1, on a

$$a(a+3) = (a+1)^2 + a - 1.$$

Pour que cette expression soit un carré, il faudrait ajouter à $(a+1)^2$ au moins $2a+3$, on n'y ajoute que $a-1$, donc $a(a+3)$ n'est pas un carré et le lemme est démontré.

Cela posé, le produit des cinq membres consécutifs est

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \qquad (1)$$

ou, en effectuant $$n(n^2-1)(n^2-4) \qquad (2)$$

D'après le lemme établi, $(n^2-1)(n^2-4)$ n'est pas un carré. Il reste à voir si le produit de cette expression par n est un carré, quel que soit n.

Nous distinguerons deux cas : ou n est impair, ou il est pair.

Premier cas. — Soit $n = 2k+1$.

Dans ce cas, le produit $n(n^2-1)(n^2-4)$ n'a pas de facteurs premiers communs entre n et $(n^2-1)(n^2-4)$, car s'il en avait un, il devrait diviser 1 ou 4, ce qui est impossible.

Donc, pour qu'il fût un carré, il faudrait qu'il eût tous ses facteurs carrés. Or, $(n^2-1)(n^2-4)$ n'est pas un carré,

donc, $n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ n'est pas un carré quand n est impair.

Deuxième cas. — Ce cas se subdivise en deux autres : 1° ou n contient 2 à une puissance paire ; $n = 2^{2k}n'$; ou n contient 2 à une puissance impaire, $n = 2^{2k+1}n'$, dans ces deux cas n' est impair.

1° $n = 2^{2k}n'$. Remplaçons dans (2) n par sa valeur, il vient $2^{2k}n'(2^{4k}n'^2 - 1)(2^{4k}n'^2 - 4)$.

Cette expression n'est pas un carré, car, d'après le cas précédent, un nombre qui n'est pas un carré $(2^{4k}n'^2 - 1) \times (2_{4k}n'^2 - 4)$, multiplié par un carré 2^{2k}, n'est pas un carré, donc, dans ce cas $n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ n'est pas non plus un carré.

2° $n = 2^{2k+1}n'$. Remplaçons donc (2) n par sa valeur on a $2^{2k+1}n'(2^{4k+2}n'^2 - 1)(2^{4k+2}n'^2 - 4)$.

Pour que cette expression soit un carré, il faut qu'elle contienne ses facteurs premiers à des puissances paires. Réunissons les facteurs premiers. Nous avons dans $2^{4k+2}n'^2 - 4$ le facteur premier 2, faisons-le passer dans le premier facteur il vient $2^{2k+3}n'(2^{4k+2}n'^2 - 1)(2^{4k}n'^2 - 1)$.

Nous voyons que le facteur premier 2 est à une puissance impaire $2k + 3$, donc, dans aucun cas

$$n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$

n'est un carré.

NOTA. — M. Quiquet, de Lille, a résolu la même question.

QUESTION 190

Solution par M. GINO LORIA, à Mantoue (Italie).

Trouver la hauteur d'un segment sphérique qui soit la m^me^ *partie de la sphère.*

Soient y la hauteur, r le rayon de base du segment cherché appartenant à la sphère du rayon R.

L'équation du problème est

$$\frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 y = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot D^3$$

ou $$y^3 + 3x^2y = \frac{1}{m} D^3$$

mais $$x^2 = y(D - y)$$

donc on a $2y^3 - 3Dy^2 + \frac{D^3}{m} = 0.$

Cette équation se transforme en

$$z^3 - \frac{3}{4} D^2 z - \left(\frac{m-8}{4m}\right) D^3 = 0.$$

Si l'on pose $$y = z + \frac{D}{2}.$$

ou si l'on remplace D par 2R

$$z^3 - 3R^2 z - 2\left(\frac{m-8}{m}\right) R^3 = 0. \qquad (A)$$

équation que l'on sait résoudre

QUESTION 192

Solution par M. GINO LORIA, à Mantoue (Italie).

Le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle formé en joignant les points de contact du cercle inscrit à un triangle ABC *a pour surface* $\frac{16\ T^5}{a^2 b^2 c^2 (a+b+c)^2}$, T *étant la surface du triangle* ABC *et* a, b, c *les longueurs des côtés.*

Soient A_1, B_1, C_1, les points de contact sur les côtés BC, CA, AB. On voit facilement que:

$$A_1 = \frac{1}{2}(B + C),\ B_1 = \frac{1}{2}(C + A),\ C_1 = \frac{1}{2}(A + B)$$

ou que

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},\quad B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},\quad C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Le problème est dès lors ramené à trouver la surface du triangle orthocentrique du triangle $A_1 B_1 C_1$. Or en appelant Δ_1 et Δ'_1 les surfaces des triangles $A_1 B_1 C_1$ et de son orthocentrique $A'_1 B'_1 C'_1$, on a (voir t. III p. 235)

$$\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} = 2 \cos A_1 \cos B_1 \cos C_1$$

ou à cause des égalités (1)

$$\Delta'_1 = 2\,\Delta_1 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Si r désigne le rayon du cercle inscrit au triangle ABC,

on a $$\Delta_1 = \frac{r^2}{2}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

mais $r = \frac{T}{p}$, donc

$$\Delta_1 = \frac{T^2}{2p^2}(\sin A + \sin B + \sin C);$$

par suite,

$$\Delta'_1 = \frac{2T^2}{p^2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Delta'_1 = \frac{2T^2}{p^2}\left[\frac{T}{bc} + \frac{T}{ca} + \frac{T}{ab}\right]\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$\Delta'_1 = \frac{2T^2 \,.\, T(a+b+c)(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2 a^2 b^2 c^2}$$

$$\Delta'_1 = \frac{4T^3 p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2 a^2 b^2 c^2} = \frac{16T^5}{(2p)^2 a^2 b^2 c^2}$$

enfin

$$\Delta'_1 = \frac{16\,T^5}{(a+b+c)^2 a^2 b^2 c^2}$$

QUESTION 199

Solution par M. Dupuy, élève au Lycée de Grenoble.

Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

Soit N un des nombres cherchés. Posons

$$N = 100c + 10b + a$$

a, b, c, étant les chiffres des unités, des dizaines et des centaines. En élevant un carré, il vient

$$N^2 = 10000c^2 + 1000(2bc) + 100(b^2 + 2ac) + 10(2ab) + a^2,$$

Les derniers chiffres de N^2 seront **les mêmes que ceux de** l'expression $10(2ab) + a^2$

Il suffit donc de chercher pour quelles valeurs de a et b cette expression finit par deux chiffres égaux.

Pour cela donnons à a les valeurs o, 1, 2, . . . 8, 9, on obtiendra le tableau suivant

Si $a = 0$,	$a^2 + 10(2ab)$	peut s'écrire	$0 + 10(0.b)$
— 1,	—	—	$1 + 10(2b)$
— 2,	—	—	$4 + 10(4b)$
— 3,	—	—	$9 + 10(6b)$
— 4,	—	—	$6 + 10(8b + 1)$
— 5,	—	—	$5 + 10(b + 2)$
— 6,	—	—	$6 + 10(2b + 3)$
— 7,	—	—	$9 + 10(4b + 4)$
— 8,	—	—	$4 + 10(6b + 6)$
— 9,	—	—	$1 + 10(8b + 8)$

A l'inspection de ce tableau, on voit que si $a = 0$, b peut être quelconque.

Que si $a = 2$, b doit être 1 ou 6.

— $a = 8$, — 3 ou 8.

— $a = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9$, b n'admet pas de valeur correspondante.

Ainsi les nombres cherchés sont de la forme

. . . 0	et leurs carrés	finissent par	00
. . . 12	—	—	44
. . . 62	—	—	44
. . . 38	—	—	44
. . . 88	—	—	44

NOTA. — M. Letellier, du lycée de Tarbes, a résolu la même question.

Note de la Rédaction. — On peut donner la formule générale des nombres répondant à la question, ils sont de la forme

$$50\,n \pm 12$$

en effet, le carré d'un nombre de cette forme est

$$2500\,n^2 \pm 1200\,n + 144$$

et il est facile de reconnaître que les nombres de cette forme sont terminés par les nombres 12, 62, 38 ou 88, comme l'indique M. Dupuy. A. M.

QUESTION 221

Solution par M. Tricon, élève du Lycée de Marseille.

Si x, y, z *sont les côtés d'un carré inscrit dans un triangle dont les côtés sont* a, b, c, *on a la relation suivante*

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + 1\right)^2 = 4\left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right).$$

Aux deux termes de l'expression

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = -16S^2,$$

ajoutons $4 \cdot 16S^2$, il vient

$$a^4 + b^4 + c^4 + 4 \cdot 16S^2 = 3 \cdot 16S^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2,$$

d'où

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4 \cdot 16S^2 = 3 \cdot 16S^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2$$

ou en ajoutant $16a^2S + 16b^2S + 16c^2S$ aux deux membres,

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4 \cdot 16S^2 + 16a^2S + 16b^2S + 16c^2S = 3 \cdot 16S^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 16a^2S + 16b^2S + 16c^2S,$$

le premier membre est le carré de

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 4S.$$

Le second membre peut s'écrire

$$4a^2b^2 + 8b^2S + 8a^2S + 16S^2 + 4a^2c^2 + 8c^2S + 8a^2S + 16S^2 + 4b^2c^2 + 8b^2S + 8c^2S + 16S^2$$

ou $$4(a^2 + 2S)(b^2 + 2S) + 4(a^2 + 2S)(c^2 + 2S) + 4(b^2 + 2S)(c^2 + 2S),$$

par suite $$(a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 4S)^2$$

$$= 4\left[(a^2+2S)(b^2+2S) + (a^2+2S)(c^2+2S) + (b^2+2S)(c^2+2S)\right]$$

en divisant par $4S^2$, le premier membre devient

$$\left(\frac{a^2}{2S} + \frac{b^2}{2S} + \frac{c^2}{2S} + 4\right)^2$$

$$= \left[\frac{a^2 + 2S}{2S} + \frac{b^2 + 2S}{2S} + \frac{c^2 + 2S}{2S} + 1\right]^2.$$

Par suite

$$\left[\frac{a^2+2S}{2S}+\frac{b^2+2S}{2S}+\frac{c^2+2S}{2S}+1\right]^2$$
$$=4\left[\frac{(a^2+2S)(b^2+2S)}{4S^2}+\frac{(a^2+2S)(c^2+2S)}{4S^2}+\frac{(b^2+2S)(c^2+2S)}{4S^2}\right]$$

Or $x=\frac{ah}{a+h}$, et comme $h=\frac{2S}{a}$, on a

$$\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{ah}{a+h}}=\frac{a+h}{h}=\frac{a^2+2S}{2S};$$

de même
$$\frac{b}{y}=\frac{b^2+2S}{2S},$$
$$\frac{c}{z}=\frac{c+2S}{2S}.$$

Donc on a

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+1\right)^2=4\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right).$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BORDEAUX

Les rayons des deux cercles dont les centres sont A et B ont pour longueur $r=12^m$, $r'=30^m$, la distance des centres AB est de 24^m. Calculer la portion d'aire commune aux deux cercles.

— Calculer la valeur de x qui satisfait à l'équation

$$\text{séc } x=\sin x+2\cos x$$

— On joint le sommet A d'un losange au milieu E du côté DC; la droite AE coupe la diagonale DB en F. Calculer le rapport $\frac{DF}{DB}$, sachant que $A=60°$.

— Deux mobiles m et n partent de deux points A et B, et vont à la rencontre l'un de l'autre; m se met en mouvement cinq secondes après n et parcourt 4^m de plus que lui par seconde. Ils se rencontrent au milieu de AB, dont la longueur est de 1,250 mètres; on demande combien chacun de ces mobiles parcourt de mètres par seconde.

— Connaissant les côtés a, b, c et la hauteur h d'un trapèze, calculer ses angles et sa surface. (b est la petite base, a et c les côtés obliques). Application

$$a=42^m;\ b=68;\ c=75;\ h=15.$$

— Trouver la valeur de x donnée par l'équation

$$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3.$$

— On coupe une sphère par un plan qui détache une calotte dont la surface est le quart de la surface de la sphère ; trouver l'expression du rapport du volume du segment qui a pour base la calotte, au volume de la sphère.

— L'angle d'un losange vaut 54° ; la plus grande diagonale vaut 1,250 mètres calculer le côté et la surface du losange.

— Etant donnés les quatre côtés d'un trapèze, calculer le volume engendré par la rotation du trapèze autour de la grande base a. Application : $a = 100^m$; $b = 40^m$; $c = 35^m$; $d = 48^m$. (a et c sont les deux bases).

— Vérifier que si x, y, z, sont en progression arithmétique, il en est de même de

$$x^2 + xy + y^2$$
$$x^2 + xz + z^2$$
$$y^2 + yz + z^2$$

Trouver le rapport des raisons.

— Deux circonférences dont les centres sont en A et en B et dont les rayons sont a et b, se touchent. On leur mène une tangente commune CD, qui coupe la ligne des centres en D, et touche en C la grande circonférence. Trouver l'expression des surfaces des deux triangles ACD, ECD, CE étant perpendiculaire sur AB. Application : $a = 62$; $b = 27$.

— Trouver la valeur de x donnée par l'équation

$$\log \sqrt{5x + 8} + \frac{1}{2} \log (2x + 3) = \log 15.$$

— Trouver, par une construction géométrique, le rayon d'un cercle dont la surface soit les $\frac{5}{16}$ de celle d'un cercle de rayon donné R.

— Déterminer le maximum de $\frac{2x + 3}{x^2 + 11}$

— Sur un triangle équilatéral de côté a pris comme base commune, on construit un prisme droit et une pyramide régulière de même hauteur que le prisme ; déterminer cette hauteur de telle sorte que la surface latérale du prisme soit égale à trois fois celle de la pyramide.

— Résoudre l'équation $\frac{x + 2}{1 + 2x} = \frac{3x + 4}{3 + 4x}$.

— La somme des côtés de deux cubes est a, la somme de leurs volumes est b^3. Calculer les longueurs des côtés de ces cubes. a étant supposé constant, trouver le minimum de b pour que le problème soit possible. Application :

$$a = 10 ; \; b = 7.$$

— Résoudre

$$(a + b) x + (a - b) y = 2ab$$
$$(a + c) y + (a - c) x = 2ac.$$

— On donne un tronc de cône à bases parallèles ; les rayons de bases sont a et b ; l'arête c est la somme des deux rayons. Quelles sont les propriétés de ce tronc de cône ? Trouver le rapport du volume à la surface totale.

— Quel est le maximum ou le minimum de l'expression $(x - 2)^2 + (2x - 1)^2$. Trouver la valeur correspondante de x. — Vérification.

— Calculer l'angle d'un secteur tel que l'aire du triangle formé par les deux rayons et la corde soit $\frac{1}{7}$ de l'aire du cercle.

— Dans un trapèze ABCD, on donne AB $= a$; BC $= b$; CD $= c$; DA $= d$. Calculer les angles A, B, C, D. Application : $a = 100$; $b = 16$; $c = 70$; $d = 28$. (a et c sont les bases).

— La différence des rayons de deux sphères est a, celle de leurs volumes est b^3. Calculer les rayons. Application : $a = 8$; $b = 12$.

— Résoudre
$$(a + bx)(b - ax) + (b - cx)(c + bx) + (c - ax)(a + cx) = 0.$$
— Trouver l'expression du poids d'un tronc de pyramide à bases carrées, la longueur des côtés de base étant a, b; la hauteur h. On donne la densité d de la substance dont est formée la pyramide. Application :
$$a = 11\,;\ b = 5\,;\ h = 12\,;\ d = 2{,}57.$$
— Résoudre le système $(2x + b)\cos l = a \sin 2l + y$;
$$(2y + a)\sin l = b \sin 2l + x.$$
Simplifier les valeurs de x et de y, et vérifier qu'elles satisfont aux équations.

PARIS

Novembre 1880.

Dans le triangle ABC, on donne les deux côtés AC $= b$, et AB $= c$, et l'on propose de calculer le troisième côté BC, sachant que le rapport des segments BD et DC, déterminés sur ce côté par la hauteur AD, est égal au rapport de deux lignes connues m et n.

— Etant donné un cercle de rayon R et un diamètre AB, mener à ce diamètre AB une parallèle CD telle que la surface du trapèze ABCD soit dans un rapport déterminé K avec le carré de la hauteur du trapèze.

— Dans un triangle ABC, le côté AB est égal à $\sqrt{3}$, le côté AC est égal à $\sqrt{2}$, et l'angle C est égal à 60°. Calculer sans tables : 1° le côté BC; 2° le sinus et le cosinus de chacun des angles A et B.

— On donne le rayon r du demi-cercle AOB; déterminer la distance AD au point A de la perpendiculaire CD au diamètre AOB, de telle façon que le rapport de la somme des volumes décrits par les segments AmC, CnB au volume décrit par le triangle ACB dans sa rotation autour de AB soit égal à un nombre donné.

— Partager un arc donné A en deux parties x et y telles que $tg\,x + tg\,y$ soit un minimum.

— Trouver toutes les valeurs de l'arc x satisfaisant à l'équation $\sin 2x = a \cos x$. On fera en particulier $a = 1$, $a = 2$, $a = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{3}$, et dans chacun de ces quatre cas, on donnera en degrés la plus petite valeur de l'arc x répondant à la question.

— Étant donné un cône circulaire droit dont le rayon de base est a, et le côté b, calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône de même hauteur que le cône donné, sachant que la somme des surfaces des deux bases du tronc de cône est égale à la surface totale du cône, et que la différence entre le volume du tronc de cône et celui du cône est égale au volume d'un cylindre de même hauteur, ayant pour base la section faite dans le tronc de cône par un plan parallèle aux bases mené par le milieu de la hauteur.

— Étant donné un triangle isoscèle ABC, dont la base BC est égale à a, et la hauteur AD est égale à b, on mène une parallèle à la base BC, on joint le milieu D de la base aux points E, F où cette parallèle rencontre les deux côtés égaux du triangle, et on fait tourner la figure autour de la base BC; on demande de calculer la longueur de cette parallèle EF de façon que le volume engendré par le triangle AEF tournant autour de BC, soit égal à deux fois le volume engendré par le triangle EDF tournant autour de la même droite BC.

— Résoudre les équations $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y = a$
$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y = b$$

QUESTIONS D'EXAMEN

POSÉES EN 1877 POUR LES EXAMENS DE LICENCE DANS LES INSTITUTS TECHNIQUES, LES ÉCOLES DE MARINE MARCHANDE ET LES ÉCOLES SPÉCIALES DU ROYAUME D'ITALIE

I

La longitude de Rome à l'ouest de Berlin est 0,003, et celle de Vienne à l'est de la même ville est 0,008 ; on suppose les longitudes exprimées en parties décimales du jour (360 degrés). Les latitudes de Rome et de Vienne exprimées en degrés et parties décimales de degré sont respectivement 41,902 et 48,210. Calculer la plus courte distance de Rome à Vienne en supposant la surface de la terre sphérique.

— Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse inscrire un cercle dans un parallélogramme? En supposant cette condition remplie, construire le centre du cercle, et en trouver le rayon en fonction du périmètre et de la surface du parallélogramme.

II

Un observateur placé sur la cime d'une colline voit devant lui, dans une même direction, deux pierres miliaires. L'angle de dépression pour l'une est de 5°, pour l'autre il est de 15°. On demande la hauteur de la colline au-dessus du plan horizontal de la route. On suppose que le mille, distance entre les deux pierres, vaut 1.500 mètres.

— Démontrer que les points de concours des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un autre tétraèdre semblable au tétraèdre donné. Trouver le rapport de leurs volumes.

III

On donne un demi-ellipsoïde de révolution à axe vertical, et une droite donnée par ses deux projections. Trouver en projection et en vraie grandeur l'intersection de ce solide avec un plan qui passe par un point de la surface ellipsoïdale donné en projection horizontale, et qui soit perpendiculaire à la droite.

— On a deux plans dont les traces horizontales ne se rencontrent pas dans les limites de la figure. Par un point donné, mener un plan qui soit perpendiculaire aux deux plans donnés.

IV

Par deux points donnés, mener un plan tangent à un ellipsoïde de révolution.

— On donne un cône droit, et un plan donné par ses traces. Déterminer un plan passant par un point donné de la surface conique, et parallèle au plan donné : puis trouver les projections et la vraie grandeur de l'intersection du plan et de la surface conique, ainsi que la transformée de la ligne d'intersection dans le développement de la surface.

V

— Calculer les angles et la surface d'un trapèze dont on donne les côtés :

$$ab = 60\,; \quad cd = 102{,}1\,; \quad bc = 45{,}3\,; \quad da = 48{,}9.$$

Les côtés parallèles sont ab et dc ; l'unité de longueur est le mètre.

— Un observateur est situé à une hauteur donnée au-dessus de la surface de

la terre supposée sphérique. Quelle est la partie de cette surface qu'il voit. et quel est le volume du segment compris sous la surface vue?

— Un tronc de pyramide triangulaire a $2^m,56$ de hauteur, les côtés de la base inférieure sont 0,76; 0,48; 0.34; ceux de la base supérieure sont 0,38; 0,24; 0,17. Calculer le volume du tronc.

VI

— On donne deux plans qui ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure, et un point hors de ces deux plans. Déterminer: l'intersection des deux plans; la perpendiculaire menée du point sur cette intersection, et les angles de cette perpendiculaire avec chacun des deux plans.

— Construire un trièdre connaissant les deux angles plans $\alpha = 65°$; $\beta = 83°$: et l'angle dièdre $A = 75°$ opposé à la face α.

VII

— On connaît les côtés $AB = 8^m,95$; $BC = 12^m,10$; $CD = 7^m,20$; et $AD = 18^m,50$ d'un trapèze quelconque, dont les bases sont BC et DA. On demande: 1° la surface de ce trapèze; 2° le rayon du cercle équivalent.

— Quel doit être le rayon d'un cercle pour que la surface du carré inscrit soit de $86^{mq},509$.

VIII

— On donne un plan quelconque déterminé par ses deux traces, et la projection horizontale d'un point du plan. On demande de mener par ce point une horizontale du plan, et de faire passer par cette horizontale un plan qui fasse avec le premier un angle de 56 degrés.

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR

Par M. **G. de Longchamps**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne (*).

---

1. — Considérons l'identité:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$$

et posons $$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On aura par des dérivations successives :

$$f(x) = (x - a)\,\varphi(x) + f(a)$$
$$f'(x) = (x - a)\,\varphi'(x) + \varphi(x)$$

(*) Cette démonstration de la série de Taylor, trouvée par nous récemment n'est peut-être pas nouvelle; au moins dans quelques-unes de ses parties. M. Catalan, à qui nous l'avons communiquée, croit qu'elle était donnée en 1831 par M. Lefébure, dans son cours; il l'attribuait à Ampère.

$$f''(x) = (x - a)\,\varphi''(x) + 2\varphi'(x)$$

. . . .

$$f^{(p)}(x) = (x - a)\,\varphi^{(p)}(x) + p\varphi^{(p-1)}(x)$$

Multiplions ces égalités respectivement, par

$$1,\quad \frac{a - x}{1}.\quad \frac{(a - x)^2}{1.2},\ \ldots\ \frac{(a - x)^p}{1.2\ldots p};$$

On aura l'identité, qui est une forme de la série de Taylor :

$$f(a) = f(x) + \frac{a - x}{1}\,f'(x) + \frac{(a - x)^2}{1.2}\,f''(x) + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{(a - x)^p}{1.2\ldots p} f^p\,(x) + \frac{(a - x)^{p-1}}{1.2\ldots p}\,\varphi^p\,(x).\ (1)$$

Pour retrouver la notation habituelle, on voit qu'il suffit de remplacer $(a - x)$ par h.

2. — Examinons le cas particulier de la fonction entière, et posons $f(x) = A_0\,x^m + \ldots + A_m$

on aura $\varphi(x) = A_0\,x^{m-1} + \ldots$

et $\varphi^{m-1}(x) = 1.2\ldots\,(m - 1)\,A_0$

ou $\varphi^{m-1}(x) = \frac{1}{m}\,f^m\,(x)$.

La formule (1) devient, après avoir remplacé $a - x$, par h,

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1}\,f'(x) + \frac{h^2}{1.2}\,f''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^m}{12\ldots m}\,f^m\,(x).$$

3. — Dans l'hypothèse où

on a

$$f(x) = x^m,$$
$$f'(x) = mx^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m - 1)x^{m-2},$$

. . . .

$$f^m(x) = 1\ .\ 2\ \ldots\ m.$$

et la formule devient

$$(x + h)^m = x^m + \frac{mh}{1}x^{m-1} + \frac{m(m - 1)h^2}{1\ .\ 2}x^{m-2} + \ldots + h^m.$$

C'est la formule du binôme, qui, dans cette manière de faire et à l'inverse de ce qui se fait ordinairement, est considérée comme une conséquence de la formule de Taylor.

4. — Pour établir la série de Taylor, dans le cas général, nous nous appuyerons uniquement sur cette remarque qui est, on le sait, fondamentale dans la théorie des équations et constamment usitée : *qu'entre deux racines consécutives de l'équation*

$$f(x) = o$$

existe au moins une racine de l'équation $f'(x) = o$.

L'interprétation géométrique de cette proposition est encore bien connue et peut se formuler en disant que si la courbe $y = f(x)$ coupe l'axe Ox aux deux points consécutifs A, B ; il existe, entre A et B, un point M de la courbe, point dont l'abcisse est comprise entre OA et OB et pour lequel la tangente est parallèle à Ox.

Si l'on remarque maintenant que le rapport

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{B'P}{A'P},$$

il sera prouvé qu'il existe, entre les points A', B', un point M' pour lequel la fonction b' prend une valeur égale à celle de $\frac{B'P}{A'P}$; ayant posé $OB = a$; $OA = x$,

on a $$OM = x + \theta(a - x),$$

et l'on peut écrire (θ désignant un nombre compris entre o et 1), $$\varphi(x) = f'[x + \theta(a - x)].$$

5° — Ceci posé, on aura donc, en décrivant et considérant $f'[n + \theta(a - x)]$, comme une fonction de fonction,

$$\varphi'(x) = (1 - \theta)\ f''[x + \theta(a - x)]$$
$$\varphi''(x) = (1 - \theta)^2\ f'''[x + \theta(a - x)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^p(x) = (1 - \theta)^p f^{p+1}[x + \theta(a - x)]$$

et l'identité (1) devient :

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^p}{1 \cdot 2 \ldots p} b^{(p)}(x) + \frac{h^{p+1}(1 - \theta)^p}{1 \cdot 2 \ldots p} b^{p+1}(x + \theta h)$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre o et 1. C'est la série de Taylor avec la forme du reste donnée par Cauchy.

6. — Nous ferons une dernière remarque.

Si nous désignons par R_p, le terme complémentaire de la série, celui qui représente la somme de tous les termes qui suivent
$$\frac{h^p}{1 . 2 \dots p} f^{(p)}(x),$$
la première forme que nous avons obtenue pour le développement, la forme (1), prouve que l'on a exactement :
$$R_p = \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots p} \varphi^{(p)}(x) \qquad (\alpha)$$
Pour calculer ce reste, il faudrait donc prendre la dérivée d'ordre p, de la fonction $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ce qui peut se faire par la formule de Leibnitz, si l'on sait, bien entendu, et comme nous le supposons, calculer les dérivées successives de $f(x)$.

Mais on peut aussi, et plus simplement, calculer les dérivées de φ, de proche en proche, par voie récurrente en s'appuyant sur la remarque suivante.

L'équation (1) peut s'écrire
$$f(a) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1 . 2} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots (p+1)} f^{p+1}(x)$$
$$+ \left[\frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots} \varphi^p(x) - \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots (p+1)} f^{p+1}(x)\right]$$
ayant ajouté et retranché, comme on voit, le terme en $f^{p+1}(x)$; mais alors
$$R_{p+1} = \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots p} \varphi^p(x) - \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots (p+1)} f^{p+1}(x)$$
mais, d'après la formule (α),
$$R_{p+1} = \frac{(a-x)^{p+2}}{1 . 2 \dots (p+1)} \varphi^{p+1}(x).$$
On a donc
$$\frac{(a-x)^{p+2}}{1 . 2 \dots (p+1)} \varphi^{p+1}(x)$$
$$= \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots p} \varphi^p(x) - \frac{(a-x)^{p+1}}{1 . 2 \dots (p+1)} f^{p+1}(x),$$
ou en simplifiant
$$(a-x)\varphi^{p+1}(x) - (p+1)\varphi^p(x) + f^{p+1}(x) = 0.$$

C'est la relation de récurrence dont nous voulions parler : elle permet de calculer $\varphi^{(p+1)}$, quand on connaît $\varphi^{(p)}$ et $f^{(p+1)}$. On retrouve ainsi, et il ne pouvait en être différemment, la relation entre $f^{(p)}$ et les deux fonctions φ^{p}, φ^{p-1}, que nous avons établie au début de cette note.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*suite*, voir page 40).

— *Équation générale des points situés sur la droite qui joint deux points donnés par leurs équations.* — On sait qu'en coordonnées cartésiennes, l'équation générale des droites qui passent par le point de rencontre de deux droites données par leurs équations $Ax + By + C = 0$ et $A'x + B'y + C' = 0$ est $Ax + By + C + \lambda (A'x + B'y + C') = 0$; de même, en coordonnées tangentielles, l'équation générale des points situés sur la droite qui joint deux points donnés par leurs équations $ux_0 + vy_0 - 1 = 0$, $ux_1 + vy_1 - 1 = 0$, est $ux_0 + vy_0 - 1 + \mu (ux_1 + vy_1 - 1) = 0$. En effet, cette équation représente des points, puisqu'elle est de la forme $uX + vY - 1 = 0$; ces points appartiennent à la droite qui joint les deux points donnés, puisque l'équation dont il s'agit est vérifiée quel que soit μ pour la droite dont les coordonnées annulent à la fois $ux_0 + vy_0 - 1$ et $ux_1 + vy_1 - 1$, et elle les représente tous, puisqu'on peut toujours disposer du paramètre μ de manière à faire coïncider le point variable avec un point donné sur la droite qui joint $(x_0 y_0)$ et $(x_1 y_1)$. Un tel point ayant pour coordonnées $x = \dfrac{x_0 + Kx_1}{1 + K}$, $y = \dfrac{y_0 + Ky_1}{1 + K}$, il suffit, en effet, pour cela, de prendre $\mu = K$.

Notation symbolique. — D'une manière générale, l'équation $Au + Bv + C = o$ est l'équation du point ayant pour coordonnées cartésiennes $x = -\frac{A}{C}$ et $y = -\frac{B}{C}$; on peut aussi l'écrire sous la forme homogène $Au + Bv + Cw = o$ $(w = 1)$.

On la représente souvent par une seule lettre, désignant une fonction linéaire en u et v, π par exemple, par analogie avec P qui représentera la fonction linéaire en x et y, $Ax + By + C$ ou $Ax + By + Ct$ $(t = 1)$.

Les équations de deux points étant alors $\pi = o$ et $\chi = o$, l'équation générale des points situés sur la droite qui joint les deux points donnés sera $\pi + \mu\chi = o$ en coordonnées tangentielles, de même qu'en coordonnées cartésiennes l'équation générale des droites qui passent par le point de rencontre des deux droites $P = o$ et $Q = o$ est $P + \lambda Q = o$.

Les coordonnées cartésiennes du point particulier qui correspond à une certaine valeur de μ sont alors $x = -\frac{A + \mu A'}{C + \mu C'}$, $y = -\frac{B + \mu B'}{C + \mu C'}$.

Interprétation de μ. — Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Soient respectivement $\pi = o$ et $\chi = o$ les équations de deux points prises sous la forme $ux_0 + vy_0 - 1 = o$ et $ux_1 + vy_1 - 1 = o$; un point quelconque de la droite qui les joint est représenté par l'équation $\pi + \mu\chi = o$, et nous avons vu plus haut que, pour faire coïncider ce point avec celui dont les coordonnées cartésiennes sont : $x = \frac{x_0 + Kx_1}{1 + K}$, $y = \frac{y_0 + Ky_1}{1 + K}$, il faut prendre $\mu = K$.

Or on sait que K représente le rapport des distances du point (x, y) aux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) (*), ce rapport ayant un certain signe quand le point (xy) est entre les deux

(*) On démontre, en effet, ces formules dans tous les cours élémentaires de géométrie analytique.

points donnés, et le signe contraire quand il laisse ces deux points d'un même côté de lui-même.

Puisque μ n'est autre chose que K, on a donc ainsi la signification de μ.

Si l'on veut introduire dans les calculs les distances MM_0 et MM_1 elles-mêmes, on pourra poser $\frac{MM_0}{MM_1} = K = \frac{n}{m} = \mu$, et l'on aura :

$$x = \frac{mx_0 + nx_1}{m+n}, \quad y = \frac{my_0 + ny_1}{m+n}.$$

Soient maintenant les quatre points en ligne droite $\pi = 0$, $\chi = 0$, $\pi + \mu\chi = 0$, $\pi + \mu'\chi = 0$, μ et μ' ayant la signification que nous venons d'obtenir. Nous appellerons *rapport anharmonique* de ces quatre points le quotient $\frac{\mu}{\mu'}$, et nous retomberons ainsi d'une manière purement analytique sur la définition de M. Chasles. Car $\frac{\mu}{\mu'} = \frac{n}{m} : \frac{n'}{m'} = \frac{MM_0}{MM_1} : \frac{M'M_1}{M'M_0}$ c'est donc le quotient du rapport des distances du troisième point M aux deux premiers M_0 et M_1, par le rapport des distances du quatrième point M' aux deux premiers.

Mais il est bien certain que les numéros des points considérés sont absolument arbitraires; par conséquent, il y aura, *à priori*, autant de rapports anharmoniques de quatre points en ligne droite que l'on pourra former de permutations de quatre lettres, c'est-à-dire vingt-quatre; mais ces rapports se réduisent d'abord à six distinctes, et, de plus, ils sont tous fonctions de l'un d'eux, de sorte que, l'un étant déterminé, les autres le sont également. On peut donc n'en considérer qu'un (*).

Valeur générale du rapport anharmonique en fonction des paramètres des quatre points considérés. — Dans la valeur précédente du rapport anharmonique, les deux points qui déterminent primitivement la droite des quatre points, et

(*) Nous avons donné dans notre Géométrie analytique, la démonstration complète de ce fait, dans le § intitulé : « *Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite* ».

auxquels convient parfaitement le nom de *points de base* adopté par Clebsch, interviennent par eux-mêmes; il est important d'obtenir une expression plus générale, se rapportant à quatre points absolument quelconques sur la droite dont il s'agit. Soient donc μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 les paramètres des quatre points considérés. Si l'on considérait les deux premiers comme points de base, en posant $\pi + \mu_1\chi = \xi$, et $\pi + \mu_2\chi = \eta$, les deux derniers s'écriraient $\xi + \nu\eta = 0$ et $\xi + \nu'\eta = 0$, et le rapport anharmonique aurait pour valeur $\frac{\nu}{\nu'}$. Or, il suffit pour cela de poser :

$$\pi + \mu_3\chi = \pi + \mu_1\chi + \nu(\pi + \mu_2\chi) = 0$$
$$\pi + \mu_4\chi = \pi + \mu_1\chi + \nu_1 \text{ et } (\pi + \mu_2\chi) = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{\mu_1 + \nu\mu_2}{1 + \nu} = \mu_3 \text{ et } \frac{\mu_1 + \nu'\mu_2}{1 + \nu'} = \mu_4$$

d'où l'on tire :

$$\nu = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2} \quad \text{et } \nu' = \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2}.$$

Dès lors $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2}$.

Cette expression fournit le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, en fonction des paramètres qui définissent ces points en coordonnées tangentielles, et cela indépendamment des points pris comme points de base sur la droite.

— Dans la suite, nous supposerons bien connue la théorie du rapport anharmonique, telle qu'on l'expose ordinairement en géométrie, et conséquemment aussi, nous admettrons comme parfaitement acquises les propriétés de son cas particulier le plus remarquable, qui est la *division harmonique*.

Pour simplifier les notations, nous représenterons dorénavant par $M_0 = 0$, l'équation d'un point M_0, cette équation étant de l'une ou l'autre des deux formes $ux_0 + vy_0 - 1 = 0$, ou $Au_0 + Bv_0 + C_0 = 0$; et de même nous désignerons par $P_0 = 0$, l'équation d'une droite P_0, cette équation étant de la forme $u_0x + v_0y - 1 = 0$, ou de la forme $A_0x + B_0y + C_0 = 0$.

De la correspondance. — Un point M de la droite M_0 M_1 ayant ainsi pour équation $+M_0\ \mu M_1 = o$ et une droite P du faisceau $P_0 P_1$ (c'est-à-dire passant par le point de rencontre des deux droites P_0 et P_1) étant représentée par l'équation $P_0 + \lambda P_1 = o$, on peut considérer un point et une droite pour lesquels on ait $\lambda = \mu$, et les appeler *correspondants.*

Conditions de projectivité des figures. — Si l'on considère ainsi sur une même base, trois points quelconques, et dans un même faisceau trois droites qui soient en correspondance avec les trois points, on reconnaît facilement que pour qu'un quatrième point de la base soit en correspondance avec une quatrième droite du faisceau, il faut et il suffit qu'il y ait entre les paramètres λ *et* μ *en relation du premier degré par rapport à ces paramètres considérés séparément, c'est-à-dire une relation de la forme*

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = o$$

telle qu'à une valeur donnée de λ *corresponde* une seule valeur *de* μ *et réciproquement.*

Soient, en effet, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. les paramètres des trois premières droites ; μ_1, μ_2, μ_3, paramètres des trois premiers points, seront, par hypothèse, respectivement égaux à λ_1, λ; λ_3, λ_4 et μ_4 étant les paramètres de la quatrième droite et du quatrième point, on devra avoir identiquement

$$\left\{\begin{array}{l} a\lambda^2_1 + b\lambda_1 + c\lambda_1 + d = o \\ a\lambda^2_2 + b\lambda_2 + c\lambda_2 + d = o \\ a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c\lambda_3 + d = o \\ a\lambda_4\mu_4 + b\lambda_4 + c\mu_4 + d = o \end{array}\right.$$

Ces quatre relations sont homogènes et linéaires en a, b, c, d, quantités qui ne sont pas nulles, simultanément; donc il faut et il suffit, pour qu'elles aient lieu à la fois que le déterminant de leurs coefficients soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & \lambda_3 & 1 \\ \lambda_4\mu_4 & \lambda_4 & \mu_4 & 1 \end{vmatrix} = o$$

Ce que l'on peut écrire, en retranchant les éléments de la deuxième colonne de ceux de la troisième :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 0 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 0 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 0 & 1 \\ \lambda_4\mu_4 & \lambda_4 & \mu_4 - \lambda_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ce déterminant se réduit à :

$$(\lambda_4 - \mu_4) \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Or, le deuxième facteur de ce produit est identiquement égal à $-(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$ et comme on suppose $\lambda_1 \gtrless \lambda_2 \gtrless \lambda_3$, il faut que l'autre facteur soit nul, c'est-à-dire que l'on ait $\lambda_4 = \mu_4$.

Le quatrième point et la quatrième droite sont donc correspondants, c. q. f. d.

Il est clair que la démonstration précédente s'applique, sans modifications, à deux bases différentes dont les points sont unis chacun à chacun par une pareille relation, et aussi à deux faisceaux différents dont les rayons satisfont à cette relation.

Les figures présentant la correspondance que nous venons d'étudier s'appellent *figures projectives*. On trouve dans les *Leçons sur la géométrie* de Clebsch une autre démonstration de ce principe de projectivité ; mais celle que nous venons d'exposer nous semble plus précise.

Deux figures projectives par rapport à une même troisième sont projectives entre elles. — Les éléments correspondants de la première et de la troisième figure ont, en effet, même paramètre ; il en est de même des éléments correspondants de la deuxième et de la troisième figure ; ces éléments sont donc aussi correspondants dans la première et la deuxième figure, comme ayant même paramètre.

(A suivre.)

QUESTION 213

Solution par M. Liégeois, élève au Lycée Saint-Louis.

Soit l'équation à coefficients positifs.

$$x^m - a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} - a_3x^{m-3} + \ldots + (-1)^p a_p x^{m-1} + \ldots$$

Il y aura des racines imaginaires si l'une des conditions suivantes est remplie.

$$a_2 > \frac{m-1}{1 \cdot 2 \cdot m} a^2$$

$$a_3 > \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^2}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$a_p > \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p \cdot m^{p-1}} a^p$$

. . . . *(Laurent.)*

Les coefficients a_1, a_2, ... a_p étant positifs, le premier membre de l'équation proposée ne présente que des variations. La transformée en $-x$ ne présente que des permanences. Donc l'équation proposée n'admet pas de racines négatives. Si toutes les racines sont réelles, elles sont positives. Supposons qu'elle ait toutes ses racines réelles et soient x_1, x_2 ... x_m ses racines.

On a $$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = a_1$$
$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_m = (-1)^{m+1} a_m$$

Si nous considérons x_1, x_2, x_m comme ayant une somme constante a_1 le produit de ces m quantités sera maximum quand elles seront toutes égales entre elles. Le maximum du produit $x_1\, x_2 \ldots x_m$ est $\left(\frac{a_1}{m}\right)^m$

Or, ces quantités ne sont pas toutes égales, car le premier membre de l'équation donnée serait le développement de la puissance m^{me} d'un binôme, ce qu'on ne doit pas supposer.

Donc
$$a_m < \left(\frac{a_1}{m}\right)^m$$
quand toutes les racines sont réelles.

Si l'on avait
$$a_m > \left(\frac{a_1}{m}\right)^m$$
c'est qu'il y aurait des racines imaginaires.

Prenons maintenant la dérivée d'ordre $m - p$ et égalons-la à zéro, nous aurons

$$m(m-1)\ldots(p+1)x \; -(m-1)(m-2)p\, a_1\, x^{p-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^p (m-p)\ldots 2 \,.\, 1 \,.\, a_p = 0$$

Cette équation ne peut avoir de racines négatives. Si elle avait toutes ses racines réelles, elles seraient positives et l'on aurait,

$$a_p \frac{1\,.\,2\ldots p}{m(m-1)\ldots(m-p+1)} < \left(\frac{p}{m-p}\right)^p a_1^p$$

ou
$$a_p < \frac{(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\,.\,2\,.\,p\,.\,m^{p-1}}\, a_1^p$$

Si donc l'on a
$$a_p > \frac{(m-1)\ldots m-(p+1)}{1\,.\,2\,.\ldots p\,.\,m^{p-1}}\, a_1^p$$
c'est que l'équation a des racines imaginaires.

Puisque $f^{m-p} = 0$ a des racines imaginaires $4f^{m-p+1} = 0$ a aussi des racines imaginaires et ainsi de suite en remontant $f(x)$ a des racines imaginaires.

Si nous faisons $p = 2$, nous aurons
$$a_2 > \frac{m-1}{1\,.\,2\ldots m}\, a_1^2$$

Si nous faisons $p = 3$, nous aurons
$$a_3 > \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,m^2}\, a_1^3$$

NOTA. — A résolu la même question : M. du Motel, du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

QUESTION 226

Solution par M. Le Pont, élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. E. Lucas).

Démontrer que si l'on a la relation

$$(fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = o,$$

les deux coniques $\quad fyz + gzx + hxy = o,$

$$\sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{nz} = o.$$

sont tangentes. Trouver les coordonnées de leur point de contact.

Les équations des tangentes aux deux coniques au point X, Y, Z, sont

$$X(gz + hy) + Y(hx + fz) + Z(fy + gx) = o,$$

$$X\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{x}} + Y\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{y}} + Z\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{z}} = o.$$

Identifiant ces deux équations, nous aurons les égalités

$$\frac{x(gz + hy)}{\sqrt{lx}} = \frac{y(hx + fz)}{\sqrt{my}} = \frac{z(fy + gx)}{\sqrt{nz}}$$

ou

$$\frac{fyz}{\sqrt{lx}} = \frac{gzx}{\sqrt{my}} = \frac{hxy}{\sqrt{nz}}$$

ou en divisant par xyz

$$\frac{f}{x\sqrt{lx}} = \frac{g}{y\sqrt{my}} = \frac{h}{z\sqrt{nz}}$$

ou

$$\frac{fl}{(lx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{gm}{(my)^{\frac{3}{2}}} = \frac{hn}{(nz)^{\frac{3}{2}}}$$

par suite

$$\frac{(fl)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{lx}} = \frac{(gm)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{my}} = \frac{(hn)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{nz}};$$

et comme $\quad \sqrt{lx} + \sqrt{my} + \sqrt{nz} = o,$

on a aussi $\quad (fl)^{\frac{1}{3}} + (gm)^{\frac{1}{3}} + (hn)^{\frac{1}{3}} = o.$

Les coordonnées du point de contact sont

$$x = \frac{f}{l^{\frac{1}{2}}}, \qquad y = \frac{g}{m^{\frac{1}{2}}}, \qquad z = \frac{h}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

NOTA. — **M. Simon, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas), a résolu également cette question.**

QUESTION 265

Solution par M. VERNAY, du Lycée de Lyon.

Étant donnée la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^m + \left[\frac{y}{b}\right]^m = 1$, *on mène en un point* M *de cette courbe une tangente qui rencontre les axes de coordonnées en* A *et* B. *On achève le rectangle ayant pour côtés* OA *et* OB; *soit* M′ *le sommet opposé à* O. *On propose de trouver le lieu décrit par* M′ *quand* M *décrit la courbe donnée.*

Cela fait, on projette un point quelconque de la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^p + \left[\frac{y}{b}\right]^p = 1$ *sur les axes en* C *et* D; *on joint* CD: *trouver immédiatement l'enveloppe de* CD.

Soit $M(x',y')$ un point de la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^m + \left[\frac{y}{b}\right]^m = 1$ (1).
Ce point satisfait à la relation

$$\left[\frac{x'}{a}\right]^m + \left[\frac{y'}{b}\right]^m = 1 \qquad (1)'.$$

La tangente en ce point est $\frac{xx'^{m-1}}{a^m} + \frac{yy'^{m-1}}{b^m} = 1$.

En faisant $y = 0$ puis $x = 0$, on obtient les coordonnées du point M′ (2)

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a^m}{x'^{m-1}} \\ y &= \frac{b^m}{y'^{m-1}} \end{aligned}\right.$$

Éliminons x' et y' entre les équations (1)′ et (2) on a pour lieu du point M′.

$$\left[\frac{a}{x}\right]^{\frac{m}{m-1}} + \left[\frac{b}{y}\right]^{\frac{m}{m-1}} = 1 \qquad (3)$$

2° On considère la courbe $\left[\frac{x}{a}\right]^p + \left[\frac{y}{b}\right]^p = 1$ et on propose de trouver l'enveloppe de CD. C'est le problème précédent renversé. On connaît l'équation (3) et il s'agit d'en déduire l'équation (1).

On voit, en posant $p = \frac{m}{m-1}$, d'où $m = \frac{p}{p-1}$, que l'enveloppe cherchée a pour équation

$$\left[\frac{x}{a}\right]^{\frac{p}{p-1}} + \left[\frac{b}{y}\right]^{\frac{p}{p-1}} = 1$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Gilly, à Montpellier; Cardot, à Nancy; Boudénes, à Grenoble; Baron, lycée Henri IV.

QUESTION 271

Solution par M. ANDRIEUX, élève du Lycée de Rouen.

Trouver le coefficient du terme en x^p *dans le développement suivant :* $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{n-1})^2$.

Supposons d'abord que ce terme se trouve entre 1 et x^{p-1} on a à faire le produit

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p + \ldots + x^{n-1}$$
$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p + \ldots + x^{n-1}$$

on multiplie les termes de la première ligne successivement par ceux de la seconde; considérons le terme en x^p.

Tous les termes de la seconde ligne compris entre 1 inclusivement et x^p en donnent chacun un qui résulte de l'addition des exposants pour former p, ainsi 1 en donne un multiplié par x^p, x en donne un multiplié par x^{p-1}, x^2 par x^{p-2} et ainsi de suite ; or comme il y a $p + 1$ termes le coefficient de x^p est $(p + 1)$. Il n'y a que les termes qui ont des exposants inférieurs à p qui puissent donner x^p par une multiplication, puisqu'on ajoute les exposants et chacun ne peut en donner qu'un, car avec un nombre donné il n'y a qu'une manière d'avoir p.

Supposons maintenant que le terme en x^p soit en dehors de $(1 + x + \ldots + x^{n-1})$.

$$\begin{array}{l|l} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} & + \ldots \ldots + x^p \\ 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} & + \ldots \ldots + x^p \end{array}$$

Si on ne considérait pas le développement jusqu'à x^{n-1} le coefficient de x^p serait $p + 1$; mais dans le cas qui nous occupe le coefficient est trop fort, car on a ajouté en trop des termes qui résultent de la multiplication des $(p + 1 - n)$ premiers termes de la seconde ligne par les $(p + 1 - n)$ termes de la première qui suivent x^{n-1} et des $(p + 1 - n)$ derniers termes de la première ligne par les $(p + 1 - n)$ premiers termes de la première ligne, donc le coefficient de x^p est $p + 2 - 2(p + 1 - n) = 2n - (p + 1)$.

Il faut évidemment que x^p se trouve dans les n termes qui suivent x^{n-1} sans quoi il n'y aurait pas de termes en x^p dans le développement.

QUESTION 274

Solution par M. Gino-Loria, à Mantoue (Italie).

Étant donné l'arc 2a, *effectuer la somme* S *déterminée par la formule*

$$S = 3 + \sin^4 a + \cos^4 a + \sin^6 a + \cos^6 a + \ldots + \sin^{2n} a + \cos^{2n} a + \ldots$$

La série donnée peut s'écrire

$$S = 1 + \sin^2 a + \sin^4 a + \sin^6 a + \ldots \sin^{2n} a + 1 + \cos^2 a + \cos^4 a + \cos^6 a + \ldots \cos^{2n} a$$

ou $$S = \frac{1}{1 - \sin^2 a} + \frac{1}{1 - \cos^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a \cdot \cos^2 a},$$

d'où $$S = \frac{4}{4 \sin^2 a \cos^2 a} = 4 \operatorname{coséc}^2 2a.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Boulogne, de Lille; Joly, de Tarbes; Daguillon, du lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay.)

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

299. — Tout triangle dans lequel les rapports du périmètre aux diamètres des trois cercles ex-inscrits sont exprimés par des nombres entiers est rectangle. Dire la forme de ce triangle. *(Geoffroy.)*

300. — On donne dans une circonférence O une corde CD et un diamètre AB. Déterminer un point M sur la circonférence, de telle manière que les lignes MC et MD déterminent sur le diamètre AB des segments OH et OI dont le rapport soit égal à un rapport donné. *(Delpit.)*

301. — Construire un triangle connaissant un angle, la médiane et la bissectrice partant du sommet de l'angle. *(Desmons.)*

302. — Étant donné un segment de cercle ACB, C étant le milieu de l'arc du segment, on décrit sur les droites AC et BC des circonférences qui se coupent sous un angle égal à l'angle dont le segment est capable. Quel est le lieu du point de rencontre M de ces circonférences? *(Desmons.)*

303. — On donne un cercle, et un point fixe P, intérieur au cercle. On demande : 1° quel est le lieu des points symétriques du point P par rapport aux quadrilatères inscrits ABCD, dont les diagonales sont rectangulaires et passent par le point P; 2° quel est le lieu des sommets des quadrilatères obtenus en menant par les sommets des quadrilatères ABCD des parallèles aux diagonales. *(Desmons.)*

304. — On donne deux cercles O et O', et on mène une sécante SAA' par un centre de similitude S. Par les points antihomologues A et A', on mène les rayons OA et O'A' qui se coupent en I, de même les tangentes respectives AH, A'H, qui se coupent en H. On joint SH et S'I, S' étant le

second centre de similitude. On demande le lieu du point de rencontre des droites SH et S'I. Si l'on prend pour centre d'inversion le point S et pour module d'inversion un module tel que chaque circonférence se change dans l'autre, on demande quelle est la figure inverse de l'axe radical des deux cercles. *(Desmons.)*

305. — On donne un cercle O, et par le centre de ce cercle on mène deux rayons rectangulaires OA et OB; par les extrémités de ces rayons on mène deux droites parallèles à deux directions fixes et rectangulaires. Ces deux droites se coupent en un point I dont on demande le lieu lorsque le système AOB tourne autour du point O.

(De Longchamps.)

306. — Par le sommet A d'un triangle isoscèle ABC, on mène une sécante AL; on prend le symétrique M du point C par rapport à la droite AL, et on mène la droite BM, qui coupe AL en P. Lieu du point P lorsque AL tourne autour du point A. *(Malloizel.)*

Mathématiques spéciales.

307. — Former les dérivées successives de la fonction

$$y = e^{\frac{a}{2}x^2}$$

a. Etablir que la dérivée d'ordre n est égale au produit de la fonction elle-même par un polynôme entier en x, P_n, du degré n;

b. Démontrer que entre les divers polynômes P existent les relations suivantes:

$$P_n = P'_{n-1} + axP_{n-1}$$
$$P'_n = naP_{n-1}$$
$$P_{n-1} - axP_n - naP_{n-1} = o.$$
$$P''_n + axP'_n - naP = o;$$

c. Démontrer que, si a est négatif, l'équation $P_n = o$ a toutes ses racines réelles;

d. Former le polynôme P_n, en se servant de la troisième relation.

308. — a et b étant deux quantités réelles, on considère la fonction $$y = (x - a)^m (x - b)^m;$$

On demande combien l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée m^{me} de y a de racines réelles.

309. — Étudier la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3^2} + \dots$$

310. — Sur une corde AB de l'ellipse comme diamètre, on décrit un cercle qui coupe l'ellipse en deux autres points C et D. On demande le lieu des points M où les sécantes communes AB et CD se rencontrent, lorsque AB se meut parallèlement à elle-même.

311. — Par l'un des foyers d'une ellipse, on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, et coupant la courbe en A, A', d'une part, en B, B' d'autre part; démontrer que la somme AA' + BB' est constante, et trouver sa valeur.

312. — On considère une ellipse et le cercle lieu des sommets des angles droits qu'on peut lui circonscrire. Par un point P, extérieur à l'ellipse, on mène les deux tangentes PA et PB à l'ellipse. On prolonge la corde des contacts AB jusqu'à sa rencontre en C et D avec le cercle. Faire voir analytiquement et géométriquement que les angles CPA, BPD sont égaux.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons d'algèbre élémentaire, *par* **M. Vacquant**, *inspecteur général de l'instruction publique. — 3e édition. — Paris, librairie Delagrave.*

Les leçons d'algèbre dont nous signalons aujourd'hui une nouvelle édition, ont pris rapidement, par suite de leurs qualités, place parmi les meilleurs traités classiques que nous possédions actuellement. Cependant, les exigences des examens, et principalement des programmes de l'école Saint-Cyr, faisaient désirer plus de développement pour certaines questions; aussi voyons-nous avec plaisir la nouvelle édition complétée par l'étude de théories très souvent demandées dans les examens, présentées ici avec un degré de rigueur qui n'exclut pas

cependant une exposition très élémentaire, mise à la portée de tous les élèves qui veulent travailler avec un peu d'attention. Nous citerons plus particulièrement :

Les conditions pour qu'un polynôme soit identiquement nul, ou pour que deux polynômes soient identiques ;

Les valeurs d'une expression algébrique qui prend des formes illusoires ;

La discussion des formules qui permettent de résoudre un système de trois équations à trois inconnues ;

L'étude de la variation de la fraction du second degré ;

La recherche des maxima et minima par la méthode des coefficients indéterminés.

Nous avons la certitude que cet ouvrage, étudié avec soin par les élèves de mathématiques élémentaires, qui se préoccuperont de faire les exercices gradués proposés à la fin de chaque chapitre, les mettra en état de comprendre, et de pouvoir résoudre la plus grande partie des difficultés que peut présenter un examen, de la force de ceux qu'ils ont à subir.

Eléments de géométrie, *suivis d'un* complément, *par* **M. Amiot.** — *Nouvelle édition revue et augmentée par* **M. Vintéjoux**, *professeur au Lycée Saint-Louis.* — *Paris, librairie Delagrave.*

Le succès légitime obtenu par l'ouvrage de M. Amiot nous dispense d'en faire l'éloge. Il est probable cependant, que l'auteur ne lui aurait pas laissé, dans ses diverses éditions, constamment la même forme, et qu'il aurait apporté dans la rédaction, les modifications exigées par les changements mêmes qu s'introduisent peu à peu dans l'enseignement de la géométrie. Il était difficile de tenter de se substituer à l'auteur primitif, et de changer son œuvre, sans craindre d'en modifier l'esprit. C'est ce qu'a fait M. Vintéjoux, avec grand succès. Nous signalerons en particulier son cinquième livre, dans lequel il généralise déjà les questions sur la droite et le plan dans l'espace. La partie la plus importante de cette nouvelle édition est certainement l'introduction, dans le complément, de quelques-unes des théories qui forment ce que l'on appelle encore *géométrie moderne*, telles que les transversales, les axes radicaux, la division harmonique et l'inversion. Ces diverses théories devraient être maintenant couramment enseignées en mathématiques élémentaires. Déjà, dans le corps de l'ouvrage l'auteur a donné plus de développements que ne l'avait fait M. Amiot dans les éditions précédentes aux figures homothétiques à deux et trois dimensions, à la symétrie et aux propriétés métriques des figures planes.

La lecture de cet ouvrage nous fait vivement désirer de voir le professeur, qui a si bien interprété la pensée de M. Amiot, reprendre et compléter un autre ouvrage du même auteur, maintenant introuvable, les *Leçons nouvelles de Géométrie*, où précisément M. Amiot avait étudié au point de vue des élèves, les théories qui constituent la base de la géométrie moderne. Il nous semble qu'en faisant entrer dans cet ouvrage les modifications que le développement de la géométrie a rendues nécessaires, on pourrait en faire une bonne introduction à l'étude de la géométrie supérieure.

Exercices et problèmes d'Algèbre, *par* **M. Tzaut,** *professeur à l'école cantonale à Lausanne.* — *Seconde partie.* — *Paris, librairie Gauthier-Villars.*

Cet ouvrage, dont nous avons signalé autrefois la première partie comprend des exercices sur les radicaux, les équations du second degré, le binôme et les déterminants. Les exemples numériques y sont très nombreux ; les systèmes d'équations simultanées présentent parfois des difficultés dans leurs solutions. Nous devons dire que nous aurions aimé voir dans ce recueil un nombre plus considérable de problèmes proprement dits, et surtout de ces problèmes si intéressants, tant par eux-mêmes qu'au point de vue des examens, de l'application de l'algèbre aux questions de géométrie. L'ouvrage aurait ainsi mieux répondu aux besoins de notre enseignement en France.

A. M.

ERRATUM

La question 281 doit être rectifiée comme il suit :
Résoudre le système

$$\frac{1}{ax - by - 1} + \frac{1}{by - ax - 1} = \frac{1}{ax + by - 1}$$
$$bx + ay = m.$$

Dans le numéro de Janvier, page 8, ligne 9, au lieu de $\frac{v}{\pi}$, il faut lire $\frac{N}{\pi}$.

AVIS

Nous n'avons pas reçu la solution des questions nos 227, 233, 236, 237, 241, 246, 247, 262. Nous prions nos lecteurs de nous les envoyer; nous les prions aussi de nous envoyer les questions du baccalauréat données aux sessions de Juillet et de Novembre.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KOEHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 990-1

NOUVELLE MÉTHODE

POUR LE CALCUL

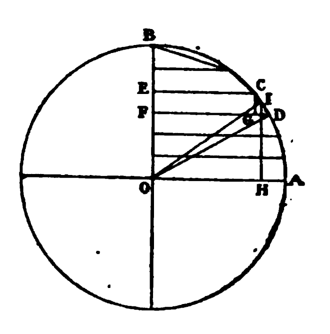
DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE

Par **L. Geoffroy,**
Répétiteur à l'École Centrale, Professeur au Collège Chaptal.

(*Suite*, v. page 49.)

Nous avons exposé, précédemment, une méthode permettant d'obtenir par des considérations élémentaires, le développement du nombre π en série convergente. Nous nous proposons d'établir, par des considérations du même ordre d'autres expressions en série de la valeur de π.

Supposons qu'on ait partagé le rayon $OB = 1$, d'une circonférence, en n parties égales, et qu'on ait mené par les points de division des parallèles au rayon OA perpendiculaire à OB.



Nous aurons divisé ainsi l'arc AB de longueur $\frac{\pi}{2}$ en n divisions inégales. Les cordes telles que CD soutendant ces n arcs forment une ligne polygonale irrégulière inscrite, de longueur P, qui tend vers $\frac{\pi}{2}$ à la limite, c'est-à-dire lorsque le nombre n augmente indéfiniment. Soit EF la division du rayon OB, correspondant à l'arc CD. — En menant OI perpendiculaire à CD, IH perpendiculaire à OA, et enfin CG parallèle à FE nous avons, en raison des triangles semblables CDG et OIH

$$\frac{CG}{CD} = \frac{OH}{OI}$$

et comme CG = EF on aura

$$\lim \frac{EF}{CD} = \lim \frac{OH}{OI} = \frac{FD}{1}$$

par conséquent $\lim CD = \lim \frac{EF}{FD}$

or $$EF = \frac{OB}{n} = \frac{1}{n}$$

et $$FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$$

en appelant p le nombre des divisions comptées de O en F.

On aura donc :

$$\lim CD = \frac{1}{\lim n \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}.$$

Par conséquent le périmètre P étant la somme des éléments tels que CD, on aura

$$P = \sum_0^{n-1} CD = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}$$

et comme $\frac{\pi}{2}$ est la limite de P, on aura

$$\frac{\pi}{2} = \lim \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}\right].$$

Développement en série de la limite précédente.

Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} = (n^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

on sait qu'on a

$$(n^2-p^2)^{-\frac{1}{2}} = n^{-1} + \frac{\frac{1}{2}}{1}p^2n^{-3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}p^4n^{-5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}p^6n^{-7} + \dots$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{p^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{p^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{p^6}{n^7} + \dots$$

Nous pouvons donc écrire, en développant successivement chaque terme de la quantité entre crochets

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{1}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{n^7} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{2^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{2^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{2^6}{n^7} + \dots$$

. . . .

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-p^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{p^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{p^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{p^6}{n^7} + \dots$$

. . . .

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{(n-1)^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(n-1)^6}{n^7} + \dots$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient, à la limite

$$\frac{\pi}{2} = \lim\left[1 + \frac{1}{2}\frac{S_2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{S_4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{S_6}{n^7} + \dots\right]$$

En désignant par S_2, S_4, S_6, etc. La somme des puissances semblables des nombres entiers de 1 à $n - 1$, inclusivement, l'exposant de la puissance étant marqué par l'indice.

Or nous avons démontré précédemment les égalités :

$$\lim\frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3} \qquad \lim\frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim\frac{S_6}{n^7} = \frac{1}{7} \text{ etc. } \dots$$

En remplaçant dans l'expression de $\frac{\pi}{2}$, il viendra :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2}\frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{1}{9} + \dots$$

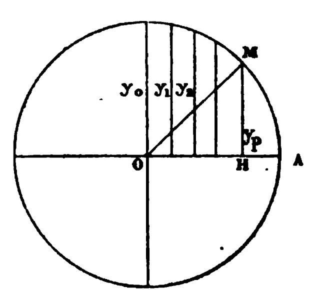
on retrouve la forme ordinaire donnée à cette série dans les traités de calcul intégral :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{1}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\frac{1}{9} + \text{etc.} \dots$$

Autre expression du rapport de la circonférence au diamètre.

Au lieu de considérer la circonférence comme la limite d'une ligne polygonale irrégulière inscrite, nous considérerons la surface du cercle comme la limite de l'aire d'un polygone irrégulier inscrit.

Supposons le rayon OA $= 1$, partagé en n parties égales, menons par les points de division des ordonnées que nous désignerons successivement en partant du point O, par y_0, y_1, y_2, etc., y_{n-1} ; l'indice exprimant le nombre des subdivisions du rayon comptées du point O, au pied de l'ordonnée correspondante.



Evaluons la somme des surfaces des trapèzes obtenus en joignant les extrémités de ces ordonnées ; la limite de cette somme, lorsque n augmente indéfiniment, nous donnera l'aire du quart de cercle de rayon 1, c'est-à-dire la valeur $\frac{\pi}{4}$.

Les trapèzes successifs ont pour hauteur commune une division du rayon, soit $\frac{1}{n}$; la somme des surfaces S, de ces trapèzes est :

$$S = \frac{1}{n}\left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1} + 0}{2}\right]$$

ou

$$S = \frac{1}{n}\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1}\right]$$

Calculons une ordonnée de rang quelconque y_p on a :

$$y_p = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{n}\right)^2}.$$

$$y_p = \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - p^2}$$

par suite :

$$S = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{2} + \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}\right]$$

Développons en série le terme général de la parenthèse, c'est-à-dire $\sqrt{n^2 - p^2}$.

On a

$$\sqrt{n^2 - p^2} = (n^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} = n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{p^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{p_4}{n_3}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{p^6}{n^5} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{p^8}{n^7} - \text{etc.}$$

Appliquons cette formule à tous les termes de la parenthèse nous aurons :

$$S = \frac{1}{n^2}\left[\begin{array}{l}
\frac{n}{2} \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{1}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{1}{n^5}\ \ldots \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{2}\,\frac{2^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{2^4}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{2^6}{n^5}\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{p^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{p^4}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{p^6}{n^5}\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n - \frac{\frac{1}{2}}{1}\,\frac{(n-1)^2}{n} - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}{1\,.\,2}\,\frac{(n-1)^4}{n^3} \\
\qquad - \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(n-1)^6}{n^5}\ \ldots
\end{array}\right]$$

En multipliant la quantité entre crochets par $\frac{1}{n^2}$, et en ajoutant par colonnes verticales on obtient :

$$S = \frac{n-1}{n}\ \frac{1}{2n} - \frac{\frac{1}{2}}{1}\ \frac{S_2}{n^3} - \frac{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}{1\ .\ 2}\ \frac{S_4}{n^5}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ \frac{S^6}{n^7} - \frac{\frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{3}{2}\ .\ \frac{5}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ \frac{S^8}{n^9} - \dots$$

S_2, S_4, S_6, ayant le même sens que précédemment. En passant à la limite, c'est-à-dire en faisant croître n indéfiniment, on pourra remplacer $\frac{S_2}{n^3}$, $\frac{S_4}{n^5}$ etc., par leurs limites $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, etc. on aura, à la place de S la valeur $\frac{\pi}{4}$ du quart de cercle; don

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1}\ \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}}{1\ .\ 2}\ \frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{3}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ \frac{1}{7}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

ou en multipliant les deux membres par 2

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{1}{1}\ \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{1.2}\ \frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ \frac{1}{7}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} - \frac{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ .\ \frac{5}{2}\ .\ \frac{7}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}\ \frac{1}{11} - \dots \text{etc.}$$

En calculant les huit premiers termes, on trouve :

$\frac{\pi}{2} = 1{,}5799\ \dots$ au lieu de $1{,}5707\ \dots$ valeur véritable.

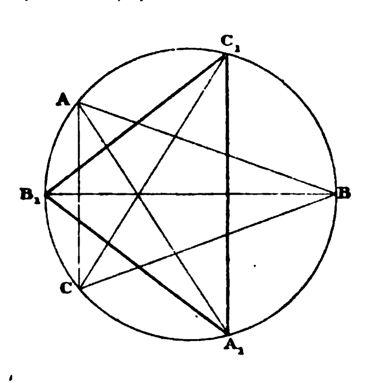
Nous croyons que cette dernière formule est nouvelle.

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

(*Suite*, voir p. 62.)

7. — (R) *Les bissectrices des angles* A, B, C, *d'un triangle coupent le cercle circonscrit aux points* A_1, B_1, C_1. *Calculer les côtés, les angles et l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$ *en fonction des éléments du triangle* ABC.



L'angle A_1 (*fig. 1*) est mesuré par la demi-somme des deux arcs AB_1, AC_1; comme $AB_1 = \frac{1}{2}AC$ et $AC_1 = \frac{1}{2}AB$ l'angle A_1 sera égal à la demi-somme des angles B, C. Nous aurons donc $A_1 = \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}A$.

De même $B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}B$; $C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}C$.

En appelant a_1, b_1, c_1, les côtés du nouveau triangle, nous aurons
$$\frac{a_1}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{b_1}{\cos\frac{1}{2}B} = \frac{c_1}{\cos\frac{1}{2}C} = 2R.$$
d'où
$$a_1 = 2R\cos\frac{1}{2}A;\quad b_1 = 2R\cos\frac{1}{2}B;\quad c_1 = 2R\cos\frac{1}{2}C$$
et, si S_1 est la surface du nouveau triangle, on aura
$$S_1 = 4R^2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$$

Remarque. — Le triangle ayant pour sommets les points de rencontre des bissectrices extérieures des angles du triangle avec le cercle circonscrit, est égal au précédent.

8. — (R) *Étant donné un triangle circonscrit à un cercle, on désigne par* A_1, B_1, C_1, *les points de contact sur les côtés* BC, CA, AB; *on propose de calculer les côtés, les angles et la surface du triangle* $A_1B_1C_1$ *en fonction des éléments du triangle* ABC.

Posons (*fig. 2*) : $B_1C_1 = a_1$; $C_1A_1 = b_1$; $A_1B_1 = c_1$.

Du triangle isoscèle AB_1C_1 on tire (*)

$$a_1 = 2(p - a) \sin \frac{1}{2}A.$$

De même

$$b_1 = 2(p - b) \sin \frac{1}{2}B ;$$

$$c_1 = 2(p - c) \sin \frac{1}{2}C.$$

Pour calculer les angles, considérons les triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 ; nous en tirerons

$$AB_1C_1 = AC_1B_1 = \frac{\pi - A}{2};$$

$$BC_1A_1 = BA_1C_1 = \frac{\pi - B}{2}; \quad CA_1B_1 = CB_1A_1 = \frac{\pi - C}{2}.$$

Par conséquent,

$$C_1 = \pi - \left(\frac{\pi - A}{2} + \frac{\pi - B}{2}\right) = \frac{A + B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$$

$$A_1 = \frac{\pi - A}{2}; \qquad B_1 = \frac{\pi - B}{2}.$$

En appelant S_1 l'aire du nouveau triangle, et en nous rappelant que

$$a_1 = 2r \cos \frac{1}{2} A, \qquad b_1 = 2r \cos \frac{1}{2} B$$

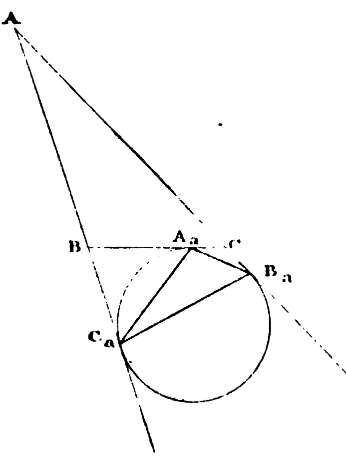
on aura $S_1 = 2r^2 \cos\frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$

Si on veut S_1 exprimée au moyen des côtés on trouvera

$$S_1 = \frac{4 S^3}{(a + b + c) abc}$$

(*) Desboves, *Questions de Trigonométrie rectiligne*, 2e éd., p. 221.

9. — *Étant donnés un triangle et un des cercles ex-inscrits, on désigne par* A_a B_a C_a *les points de contact sur les côtés* BC, CA, AB. *On demande de calculer les côtés, les angles et la surface du triangle* A_a B_a C_a *en fonction des éléments du triangle* ABC.



Posons *(fig. 3)*: $B_a C_a = a_a$: $C_a A_a = b_a$; $A_a B_a = c_a$.

Le triangle isoscèle A B_a C_a donne :

$$a_a = 2p \sin \frac{1}{2} A$$

de même

$$b_a = 2(p - b) \cos \frac{1}{2} B;$$

$$c \quad = 2(p - c) \cos \frac{1}{2} C.$$

Des triangles isoscèles AB_aC_a, BC_aA_a, CA_aB_a, on tire :

$$AC_aB_a = AB_aC_a = \frac{\pi - A}{2}; \quad BA_aC_a = BC_aA_a = \frac{B}{2};$$

$$CB_aA_a = CA_aB_a = \frac{C}{2}$$

et par conséquent,

$$A_a = \frac{\pi + A}{2}; \quad B_a = \frac{B}{2}; \quad C_a = \frac{C}{2}.$$

En appelant S_a la surface du nouveau triangle, et en nous rappelant que :

$$a_a = 2r' \cos \frac{1}{2} A; \quad b_a = 2r' \sin \frac{1}{2} B$$

on aura $S_a = 2r'^2 \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$,

si on veut S_a exprimée au moyen des côtés, on trouvera

$$S_a = \frac{4S^3}{(-a + b + c)\, abc}.$$

0. — Nous avons trouvé dans les n[os] 8, 9 :

$$S_1 = \frac{4S^3}{(a + b + c)\, abc}; \qquad S_a = \frac{4S^3}{(-a + b + c)\, abc}$$

D'une manière analogue on trouverait :

$$S_b = \frac{4S^3}{(a-b+c)\,abc}; \qquad S = \frac{4S^3}{(a+b+c)\,abc};$$

On tire donc : $\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c} = \frac{1}{S_1}$.

Cette égalité donne le théorème qui suit, que nous croyons nouveau :

L'inverse de l'aire du triangle formé en joignant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés d'un triangle, est égale à la somme des inverses des aires des triangles formés en joignant les points de contact des cercles ex-inscrits.

11 (R). — *Si* a, b, c, *sont les côtés d'un triangle* ABC, *on propose de calculer les angles du triangle* $A_1B_1C_1$ *dont les côtés sont* : $a_1 = a \cos A$; $b_1 = b \cos B$; $c_1 = c \cos C$.

Les relations données peuvent s'écrire :

$a_1 = 2R \sin A \cos A$; $b_1 = 2R \sin B \cos B$; $c_1 = 2R \sin C \cos C$

ou $a_1 = R \sin 2A$; $b_1 = R \sin 2B$; $c_1 = R \sin 2C$.

Il s'ensuit que :

$2p_1 = a_1 + b_1 = c_1 + R\,(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

c'est-à-dire (*) $p_1 = 2R \sin A \sin B \sin C$.

On a encore

$$2(p_1 - a_1) = R\,(-\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C),$$

d'où (**) $p_1 - a_1 = 2R \sin A \cos B \cos C$.

De même :

$p_1 - b_1 = 2R \cos A \sin B \cos C$; $p_1 - c_1 = 2R \cos A \cos B \sin C$.

On déduit donc :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A_1 = \sqrt{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} = \operatorname{cotg} A = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

donc $A_1 = \pi - 2A$.

D'une manière analogue :

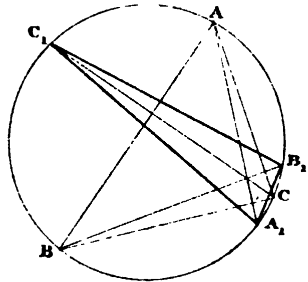
$$B_1 = \pi - 2B; \quad C_1 = \pi - 2C.$$

12 (R). — *Les hauteurs du triangle* ABC *coupent le cercle circonscrit aux points* A_1, B_1, C_1. *Calculer les angles, les côtés*

(*) Desboves. *Questions de Trigonométrie*, p. 119

(**) *Ibid.*

et la surface du triangle $A_1B_1C_1$ *en fonction des éléments du triangle* ABC.



On a *(Fig. 4.)* :

$$A_1 = C_1A_1A + B_1A_1A = C_1CA + B_1BA = 2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \pi - 2A.$$

De même on aurait :

$$B_1 = \pi - 2B; \qquad C_1 = \pi - 2C$$

Les côtés a_1, b_1, c_1, du nouveau triangle seront donnés par les relations :

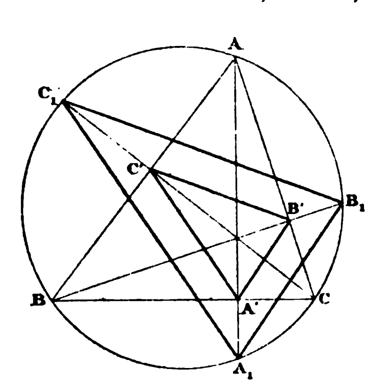
$$\frac{a_1}{\sin(\pi - 2A)} = \frac{b_1}{\sin(\pi - 2B)} = \frac{c_1}{\sin(\pi - 2C)} = 2R;$$

d'où l'on déduit :

$$b_1 = 2R \sin 2A; \quad b_1 = 2R \sin 2B; \quad c_1 = 2R \sin 2C.$$

La surface S_1 du triangle $A_1B_1C_1$ sera donnée par la relation $\quad S_1 = 2R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

Remarque.— Il est facile de reconnaître que le triangle dont les côtés sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$ (nº **11**) n'est autre que le triangle A′B′C′ *(fig. 5)* formé en joignant les pieds des hauteurs. Si nous appelons $A_1B_1C_1$ les points de rencontre des hauteurs avec le cercle circonscrit, et si nous nous rappelons le résultat obtenu aux nᵒˢ **11**, **12**, nous déduirons que les triangles A′B′C′, $A_1B_1C_1$ sont semblables. Mais ils sont aussi homologiques, donc ils sont homothétiques. Or les deux angles ACC_1 ABB_1 sont égaux comme suppléments du même angle, donc les arcs AB_1, AO_1 sont égaux, et la droite AA_1 est la bissectrice de l'angle A_1. AA_1 est par conséquent la bissectrice de l'angle A′ dont les côtés sont parallèles à ceux de l'angle A_1. De même on prouverait que les droites BB_1,



CC_1 sont les bissectrices des angles B′, C′. Nous arrivons donc au théorème bien connu : *Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle formé en joignant leurs pieds.*

(A suivre.)

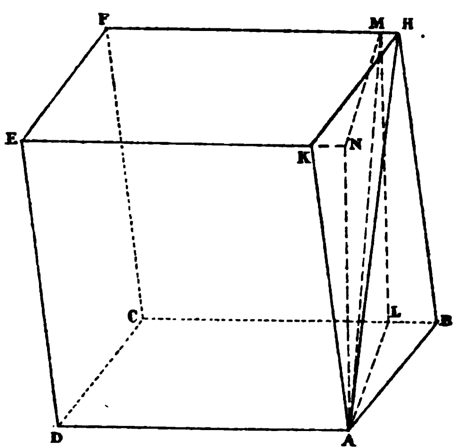
NOTE DE GÉOMÉTRIE

Problème I. — *Exprimer le volume du parallélipipède en fonction des trois arêtes issues du même sommet et des angles qu'elles font entre elles.*

Nous supposons connus, dans le parallélépipède les trois arêtes $BA = a,\ BH = b,\ BC = c.$

et les angles $ABH = \gamma,\ ABC = \beta,\ CBH = \alpha.$

Considérons la section droite ALMN, perpendiculaire à l'arête BC; le volume du solide est égal au produit de cette section droite par l'arête BC. Or, la surface de la section a pour expression $AL \times LM \sin ALM$.



Il faut donc exprimer, au moyen des données, les quantités AL, LM et l'angle ALM.

On a d'abord

$AL = a \sin \beta;$

$LM = b \sin \alpha;$

puis, l'angle ALM sera déterminé si je puis connaître le côté AM.

Or, d'une part, le triangle ALM donne

$$AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2AL \cdot LM \cdot \cos ALM;$$

d'autre part on a, par le triangle rectangle AMH :

$$AM^2 = AH^2 - HM^2.$$

On a facilement les deux égalités suivantes :

$$AH^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$
$$HM = a \cos \beta - b \cos \alpha.$$

Donc, en égalant les deux valeurs de AM^2 que l'on obtient ainsi, on a

$$a^2 \sin \beta + b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \sin \beta \cos ALM$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma - (a \cos \beta - b \cos \alpha)^2$$

En réduisant, on trouve :

$$\sin \alpha \sin \beta \cos ALM = \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta.$$

D'où l'on tire facilement :

$$\sin ALM = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}}.$$

Or, le numérateur de cette expression peut s'écrire comme il suit :

$$(\cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta)(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma)$$

ou encore :

$$[\cos \gamma - \cos (\alpha + \beta)] [\cos (\alpha - \beta) - \cos \gamma],$$

ce que l'on peut écrire :

$$4 \sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}\right) \sin \left(\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}\right).$$

Par suite, si l'on fait sortir le dénominateur du radical, et que l'on remplace $\frac{AL}{\sin \beta}$ par a, $\frac{LM}{\sin \alpha}$ par b, on trouve pour l'expression cherchée du volume :

$$V = 2abc \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha - \beta}{2}}$$

Problème II. — *Trouver le volume du tétraèdre en fonction de trois arêtes issues du même sommet et des angles qu'elles font entre elles.*

On déduit facilement ce volume du précédent, dont il est la sixième partie. Si on veut le trouver directement, on construira le prisme ayant pour base une des faces du tétraèdre contenant deux des arêtes données, et ses arêtes latérales, égales et parallèles à la troisième arête. Puis, on

cherchera comme précédemment la section droite de ce prisme; on continuera le calcul comme nous l'avons fait plus haut, et on trouvera en définitive, pour le tétraèdre qui est le tiers du prisme :

$$V' = \frac{1}{3}abc\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN

I. — ***On a deux droites rectangulaires* Ox, Oy; *par un point* B *de* Ox, *on mène une parallèle* BD *à* Oy, *jusqu'à sa rencontre en* D *avec une parallèle* CD *à* Ox, *menée par un point* C *de* Oy; *par le point* D *on mène une sécante* MDN, *qui détermine deux triangles* BDM, CDN. *On demande la position de la droite* MDN, *pour laquelle la somme des deux triangles est minima.***

Nous prendrons pour inconnues les segments déterminés sur les droites Ox et Oy par la droite MDN ; nous poserons donc $ON = y$; $OM = x$, puis $OB = a$; $OC = b$.

Il est facile de voir que les deux quantités x et y sont liées par la relation

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1.$$

La somme des surfaces des deux triangles est

$$a(y - b) + b(x - a)$$

ou

$$ay + bx - 2ab.$$

Or, d'après la première relation, on a

$$ay + bx = xy.$$

Donc, l'expression dont on cherche le minimum est

$$xy - 2ab,$$

ou

$$ab\left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} - 2\right).$$

La quantité $\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}$ passe par un minimum lorsque son inverse passe par un minimum, et puisque la somme

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ est constante, le produit sera maximum quand on aura :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

c'est-à-dire que la droite cherchée sera parallèle à BC.

II. — *Un nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, le décomposer en une différence de deux carrés.*

Il suffit de supposer le nombre n'ayant que des facteurs premiers à la première puissance, car si un facteur premier entre avec une puissance paire, on le mettra en facteur. S'il entre avec une puissance impaire $2n + 1$, on mettra en facteur la puissance $2n$ de ce facteur premier; il est bien évident en effet que si $a^2 - b^2$ est une différence de carrés, il en sera de même de $p^2(a^2 - b^2)$.

Cela posé, si je décompose le nombre en un produit de deux facteurs, qui seront premiers entre eux, j'ai facilement une solution de la question, puisque j'ai identiquement en appelant A et B ces deux facteurs :

$$AB = \frac{(A + B)^2}{4} - \frac{(A - B)^2}{4}.$$

Si le facteur 2 n'est pas affecté d'un exposant impair, les deux facteurs A et B seront tous deux impairs, et les deux carrés seront entiers; dans le cas contraire, ils seront fractionnaires, mais le dénominateur 4 peut disparaître, si le facteur 2 entre dans le facteur carré parfait que nous avons négligé.

On peut se demander combien il y a de solutions au problème. Il est évident qu'il y en a autant que l'on peut former de facteurs de la forme A et B; et, puisque l'un de ces facteurs donne immédiatement l'autre, on voit que le nombre des solutions est la moitié de la somme des nombres de combinaisons que l'on peut former avec k objets pris 1 à 1, 2 à 2, . . . , k étant le nombre des facteurs qui entrent avec un exposant impair. Par suite, le nombre de solutions cherchées est 2^{k-1}, car il faut compter la solution obtenue en prenant tous les facteurs pour former l'un des facteurs du produit, l'autre étant l'unité.

3. *Étant donné un secteur* AOB *dont l'un des côtés est horizontal, trouver sur l'arc* AB *un point* M *tel qu'en menant* ME *parallèle à* OA, *et rencontrant* OB *en* E, *et par les points* M, E, *des perpendiculaires* MM', EE' *à* OA, *la figure* MEE'M' *soit un carré.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Soit α l'angle du secteur, x l'angle AOM. On a d'abord, en prenant le rayon pour unité,

$$MM' = \sin x$$

puis, le triangle MEO, dans lequel l'angle MEO est le supplément de α, donne

$$\frac{ME}{MO} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}.$$

Donc l'équation du problème est

$$\sin \alpha \sin x = \sin(\alpha - x)$$

On en tire $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

4. *On donne un triangle* ABC, *et un point* P *sur la base* BC; *on demande de mener une parallèle* MN *à* BC, *qui rencontre les côtés* AB *et* AC *aux points* M *et* N, *de telle sorte que l'angle* MPN *soit droit.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Menons la médiane AD du triangle ABC; elle rencontre la ligne inconnue MN en son milieu H, et on a PH = HM, puisque le triangle MPN est rectangle en P. Prenons pour inconnue AH $= x$; l'angle DAP est connu, appelons le α; le triangle HAP nous donne

$$PH^2 = x^2 + PA^2 - 2PA \,.\, x \cos \alpha;$$

d'autre part, on a, m étant la médiane, a le côté BC

$$\frac{2HM}{a} = \frac{x}{m};$$

d'où $$HM = PH = \frac{ax}{2m}.$$

l'équation du problème est donc, en appelant d la distance PA

$$\frac{a^2x^2}{4m} = x^2 + d^2 - 2dx \cos \alpha$$

ou sous forme entière

$$(a^2 - 4m^2)x^2 + 8dm^2 \cos \alpha \,.\, x - 4d^2m^2 = 0.$$

On reconnaîtra que l'équation a deux racines de signe contraire si $a^2 - 4m^2$ est positif; les racines sont de même signe lorsque $a^2 - 4m^2$ est négatif. L'équation s'abaisse au premier degré si $a^2 - 4m^2$ est nul; or, on sait que $a^2 - 4m^2$ est positif si l'angle A est obtus, négatif s'il est aigu, nul si l'angle est droit. On peut donc facilement voir, d'après la valeur de l'angle en A, les différentes solutions du problème.

Nous indiquerons ici une construction géométrique de la figure, construction que nous avons trouvée signalée dans un journal américain (*the Mathematical Visitor*) et qui donne les particularités de la solution algébrique: sur la base BC comme diamètre, nous décrivons une circonférence; nous cherchons l'intersection I de la ligne AP avec cette circonférence; la droite DI et la droite PH sont parallèles, comme il est facile de s'en assurer, car on a bien

$$\frac{2\text{PH}}{a} = \frac{x}{m}.$$

On verra facilement que:

Si l'angle A est aigu, la ligne AP rencontre la circonférence en deux points situés du même côté du point A, et que l'on en déduira deux positions de H, aussi du même de A; si l'angle est obtus, l'un des points d'intersection se trouvera sur le prolongement de AP; enfin, si l'angle est droit, l'un des points d'intersection sera en A et si par le point P on mène une parallèle au rayon, qui est alors DA, on n'aura plus d'intersection avec la médiane.

5. *Étant donné un demi-cercle, on demande de mener une corde parallèle au diamètre qui soit vue sous un angle droit d'un point* P *pris sur le diamètre du cercle.*

Nous prendrons pour inconnues la distance x du centre du cercle à la corde cherchée, et la demi-corde y; on a donc d'abord $$x^2 + y^2 = r^2$$ puis la distance du point P au milieu de la corde étant égale à la moitié de cette corde, puisque l'angle est droit, on a aussi $$x^2 + d^2 = y^2$$ d étant la distance du point au centre.

On en tire facilement

$$2x^2 = r^2 - d^2.$$

qui est l'équation du problème. On voit qu'il faut que l'on ait $d^2 < r^2$.

6. *Étant donné un cercle* O, *et deux points* A *et* B *sur un diamètre, l'un* A *intérieur, l'autre* B *extérieur au cercle, mener par* B *une corde telle que la partie interceptée soit vue du point* A *sous un angle droit.*

Je prends pour inconnues l'angle que fait avec le diamètre OAB la perpendiculaire menée du centre sur la corde, cette perpendiculaire et la demi-corde; je pose en outre

$$OA = d\,;\ OB = d'\,;$$

J'ai les relations, puisque la distance du point A au milieu de la corde est égal à la moitié de cette corde:

$$y^2 = x^2 + d^2 - 2dx \cos z$$
$$y^2 = r^2 - x^2.$$
$$x = d' \cos z.$$

Par suite l'équation devient, en éliminant y et $\cos z$.

$$x^2 = \frac{d^2(r^2 - d^2)}{2(d' - d)}$$

Il faut donc que l'on ait d'abord $d < r$, pour que x soit réel. En outre, on doit avoir

$$\frac{d(r^2 - d^2)}{2(d' - d)} < r^2.$$

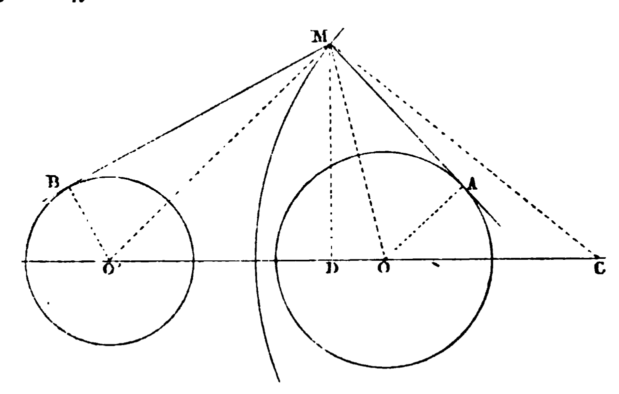
On trouve, en cherchant à résoudre cette inégalité par rapport à d, qu'elle est toujours vraie si d' est extérieur au cercle, comme nous l'avons supposé dans l'énoncé.

QUESTION 241

Solution par M. Callon, élève du lycée Louis-le-Grand.

Trouver le lieu des points M *tels que les tangentes menées de ce point à deux cercles* O *et* O' *soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soient $OA = R$, $O'B = r$. M est un point de lieu. On a $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$ (1).



Elevant au carré les deux membres de cette égalité et remplaçant $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ par leurs valeurs, on a

$$\frac{\overline{MO}^2 - R^2}{\overline{MO'}^2 - r^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

ou
$$n^2\,\overline{MO}^2 - m^2\,\overline{MO'}^2 = n^2R^2 - m^2r^2.$$

Soit C un point quelconque pris sur OO' et MD perpendiculaire à OO'. On a

$$\overline{MO}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC\,.\,CD$$
$$\overline{MO'}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{O'C}^2 - 2O'C\,.\,CD$$

multiplions les deux membres de la première de ces relations par n^2, ceux de la seconde par m^2 et retranchons membre à membre ; il vient

$$n^2.\overline{MO}^2 - m^2\overline{MO'}^2 = (n^2 - m^2)\,\overline{MC}^2 + n^2\overline{OC}^2 - m^2\overline{O'C}^2$$
$$- 2CD(n^2OC - m^2O'C).$$

Si l'on détermine le point C par la condition

$$n^2OC = m^2O'C$$

ou
$$\frac{OC}{O'C} = \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{(A)}$$

le terme qui renferme CD disparaît, et l'on a en résolvant par rapport à $\overline{MC}^2$

$$\text{(B)} \qquad \overline{MC}^2 = \frac{m^2\overline{O'C}^2 - n^2\overline{OC}^2 + n^2R^2 - m^2r^2}{n^2 - m^2} = \textbf{constante}.$$

Le lieu est donc un cercle décrit de C comme centre avec un rayon égal à MC. Le point C étant déterminé par la relation (A).

Lorsque $m = n$, le rayon devient infini, le lieu est alors l'axe radical des deux cercles.

La relation (A) montre que OC et O'C sont deux segments de même sens, le point C est donc toujours extérieur à OO'. On voit en outre que si $m \gtrless n$, on a également $OC \lessgtr O'C$. C'est-à-dire que si $m < n$, C est à droite de O, et à gauche si m est plus grand.

Si l'on résolvait le problème en permutant m et n et en posant par conséquent $\frac{MA}{MB} = \frac{n}{m}$, on trouverait comme lieu un cercle de centre C' symétrique de C par rapport au milieu de OO', mais de rayon différent de MC.

Pour que le problème soit possible, il faut que la valeur de $\overline{MC}^2$ donnée par (B) soit positive.

Remarque. — M. Mayon, du Lycée Henri IV, tire de la solution précédente la conséquence suivante :

Etant donnés trois cercles O, O', O'', *les lieux géométriques des points dont les puissances par rapport à* O *et* O' *d'une part, à* O'' *et* O' *de l'autre, sont dans un rapport donné, et l'axe radical des cercles* O *et* O'' *se coupent en un même point.*

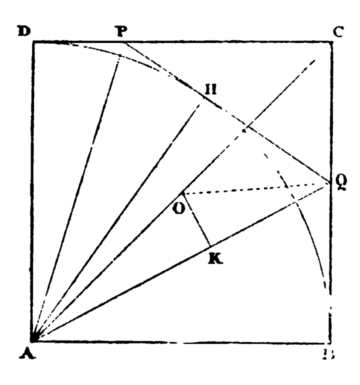
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Mayon, Lapareillé du lycée Henri IV (classe de M. Colas) ; Vazou, au collège Rollin ; Al. Joly, de Tarbes ; Bois, du lycée de Montauban ; Bonneville, du lycée de Toulouse ; Pierron, à Nantes ; Santol, à Perpignan ; Marit, lycée Louis le Grand ; H. Bourget à Aix.

QUESTION 251

Solution par M. Ch. Bonneville, élève du Lycée de Toulouse.

On donne un carré ABCD *et un cercle ayant pour centre le sommet* A *de ce cercle et pour rayon le côté du carré ; à ce cercle on mène une tangente quelconque* PQ *qui rencontre les côtés* BC, CD *du carré aux points* P *et* Q. *Trouver le lieu géométrique décrit par le centre du cercle circonscrit au triangle* APQ.

Soient O le centre du cercle dont il faut chercher le lieu.



Posons BAQ $= \alpha$, HAQ $= \beta$, HAP $= \gamma$, PAD $= \delta$.

Les droites AQ et AP sont bissectrices des angles HAB, HAD.

On a
$$\alpha + \frac{Q}{2} = 90$$
$$\beta + \frac{Q}{2} = 90$$
$$\gamma + \frac{P}{2} = 90$$
$$\delta + \frac{P}{2} = 90$$

d'où $\beta + \gamma = \alpha + \delta.$

mais $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 90^\circ.$

donc $\beta + \gamma = 45^\circ.$

Soit OK la perpendiculaire sur AQ. Joignons OQ, l'angle AOQ $=$ 2APQ, donc AOK $=$ APQ, donc les triangles AOK et APH sont équiangles et PAH $=$ OAK et PAO $=$ HAQ $=$ QAB, donc

PAQ $=$ OAB $= 45^\circ$, donc le lieu du point O est la diagonale du carré. Le lieu est du reste la diagonale tout entière puisque tous les points D et A en font partie lorsque la tangente se confond avec les autres côtés du carré.

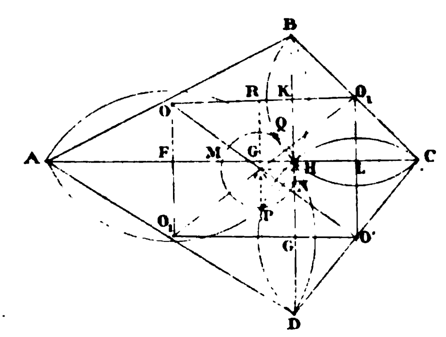
Nota. — MM. Marin, à Agen; Dupuy, à Grenoble; Santol, à Perpignan, ont résolu la même question.

QUESTION 252

Solution par M. L. Rivard, élève au Lycée du Mans.

ABCD *est un quadrilatère;* M *et* N *sont les milieux des diagonales* AHC, BHD *qui se coupent en* H. *Les cercles* AHB, CHD *se coupent en* P, *les cercles* HBC, HDA *se coupent en* Q. *Démontrer que les cinq points* M, N, H, P, Q *sont sur un même cercle.*

Par les points P, H, Q on peut faire passer une circonférence dont le centre est en ω où se coupent les lignes qui joignent les centres O et O', O_1 et O_1'. Je dis que cette circonférence passe par le point M. Pour le démontrer, joignons O_1. O : $O.O_1'$; O'_1. O_1' ; O'. O_1.



Les droites OO_1, $O'O'_1$ sont précisément les perpendiculaires élevées sur les milieux F et L des lignes AH et HL ; elles sont donc parallèles. De même les deux lignes O'_1O et $O'O_1$ sont parallèles. Donc le quadrilatère $OO_1O'O'_1$ est un parallélogramme. Donc si par le point ω, où se coupent les diagonales, on mène une parallèle aux côtés OO_1 et O'_1O', cette ligne partagera en deux parties égales toute droite FL qui joint deux points des côtés OO_1 et O'_1O'. Donc le point G est le milieu de LF.

D'un autre côté, la droite ωG parallèle à $O_1'O'$ est perpendiculaire à FL ; donc le point ω est à égale distance de F et de L ; or on a $FL = MC$

donc $FM = LC = HL$

par suite $\omega H = \omega M$. Même démonstration pour prouver que la circonférence ω passe par le point N.

NOTA : — Cette question a été résolue par M. Callon, élève du lycée Louis-le-Grand.

QUESTION 261

Solution pa **M. Daguillon**, élève du Lycée Henri IV.

On donne une circonférence O *et deux points* A *et* B *dans son plan ; on prend sur* AB *le point fixe* C *tel que* $\frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}$. *On prend un point* P *quelconque sur la circonférence et on le*

joint au point B. *On prolonge* BP *jusqu'en* D *de telle sorte que* $\frac{DP}{DB} = \frac{p}{q}$. *On demande le lieu du point de rencontre des deux droites* AP *et* CD *lorsque le point* P *décrit la circonférence donnée.*

Soit N le point de rencontre ; le triangle ABP, coupé par la transversale DMC, donne

$$\frac{BC \cdot AM \cdot CP}{DB \cdot MP \cdot CA} = 1 \quad .$$

d'où

$$\frac{AM}{MP} = \frac{aq}{bp} \quad .$$

par suite

$$\frac{AM}{AP} = \frac{aq}{bp + aq}$$

ce qui montre que le lieu du point M est une circonférence homothétique à la circonférence donnée, A étant le centre d'homothétie et $\frac{aq}{bp + aq}$ le rapport d'homothétie.

Il est à remarquer que la position et la grandeur de cette circonférence dépendent uniquement de la position du point A et des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$, mais nullement de la position et de la grandeur de la droite AB.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. P. Boulogne, de Saint-Quentin; Van Aubel, à Liége; Joly, à Tarbes; Perrier, Prost, à Lons-le-Saulnier; Chrétien, au Havre; Houssette, à Amiens; Cardot, à Nancy; Santol à Perpignan.

QUESTION 268

Solution par M. A. JOLY, élève au Lycée de Tarbes.

Sur les trois côtés d'un triangle quelconque comme diamètre on décrit des circonférences et on mène les tangentes communes à ces circonférences prises deux à deux.

Démontrer que la somme des carrés des inverses des tangentes est égale au carré de l'inverse du rayon du cercle inscrit.

Désignons par l, m, n, les trois tangentes obtenues. La tangente $MN = m$ est le côté de l'angle droit d'un triangle

rectangle ayant FE pour hypoténuse et AF — AE = HF pour côté de l'angle droit, on a donc

$$m^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{(c-b)^2}{4} = \frac{(a+c-b)(a-c+b)}{4}$$

Ou en posant $a + b + c = 2p$

$$m^2 = (p-b)(p-c)$$

Dès lors $$\frac{1}{m^2} = \frac{p-a}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Par analogie on a

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p-b}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{1}{l^2} = \frac{p-c}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ajoutant membre à membre ces égalités, il vient

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{l^2} = \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Si l'on remarque que $p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, on aura finalement

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{l^2} = \frac{p}{pr^2} = \frac{1}{r^2}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Van Aubel, à Liége ; Monterou, lycée Louis-le-Grand ; Daguillon, Lapareillé, lycée Henri IV ; Tinel, à Rouen ; Gino Loria, à Mantoue ; Arthus Bertrand (école Albert-le-Grand), Arcueil ; Charpot, à Vitry le François.

QUESTION 269

Solution par M. GINO LORIA, à Mantoue.

Par un point donné dans un angle et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée à ces mêmes côtés, de telle sorte que le point donné la divise en deux segments dont la somme des carrés soit donnée.

Soit P le point donné entre les côtés de l'angle XOY $= \omega$, menons PQ parallèle à OY et PR parallèle à OX et soit l le côté du losange ORPQ. Si XY est la droite cherchée, posons

QX = x, RY = y, nous aurons

$$\overline{PX}^2 = l^2 + x^2 - 2lx \cos \omega, \quad \overline{PY}^2 = l^2 + y^2 - 2ly \cos \omega.$$

dès lors, l'une des équations du problème est

$$2l^2 + x^2 + y^2 - 2l(x + y) \cos \omega = K^2 \qquad (1)$$

de plus, les triangles semblables PQX, PRY

donnent $$\frac{x}{l} = \frac{l}{y}$$

dès lors $$xy = l^2 \qquad (2)$$

donc $$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2l^2$$

et l'équation devient

$$(x + y)^2 - 2l\,(x + y) \cos \omega - K^2 = 0$$

d'où $$x + y = l \cos \omega \pm \sqrt{l^2 \cos^2 \omega + K^2}\,.$$

Cette équation jointe à (2) fera connaître x et y.

Le problème a quatre solutions.

QUESTION 276

Solution, par M. G. Hétier, élève au Lycée de Moulins.

Par un des sommets C d'un triangle quelconque ABC mener une droite telle que la somme des projections des côtés du triangle aboutissant à ce sommet, sur cette droite, soit égale à une quantité donnée.

Du sommet A par exemple, comme centre, avec un rayon égal à la longueur donnée l, décrivons une circonférence et menons lui une tangente BD par le point B. Joignons AD et par le point C menons une parallèle EF à cette droite. La parallèle EF est la droite cherchée. En effet, si l'on projette sur EF les points A et B l'un en E l'autre en F, EF sera la somme des projections des côtés AC et BC. Comme le quadrilatère AEFD est un rectangle on a EF = AD = l.

Comme par le point B on peut mener deux tangentes à la circonférence, la question aura en général deux solutions. La solution correspondante à la tangente BG est la droite CK, parallèle à AG, rayon de contact.

Si la longueur donnée est plus petite que AB, on aura

deux solutions. Si $l = AB$ on aura une seule solution. Dans ce cas la droite cherchée sera une parallèle à AB menée par C. Enfin, si la longueur l est plus grande que AB il n'y aura pas de solution.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Hamon, au Mans ; Andrieux, Tinel. à Rouen ; Lanoir, à Toulouse ; Pierron, à Nantes ; Daguillon, lycée Henri IV ; Latallerie, à Saint-Dier (Puy-de-Dôme) Dupuy, à Grenoble ; Pottier, à Rennes ; Bourget (H) à Aix ; Callon au lycée Louis-le-Grand ; Joly, à Tarbes.

SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA

Par M. Kœnigs.

Nous rappellerons que si $\varphi(x)$ est une fonction continue entre deux valeurs a et b de x et qu'il en soit de même de ses premières dérivées, on a si $x + h$ est compris entre a et b :

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x + \theta h)$$

où θ est un nombre inférieur à l'unité; de même si $x - h$ est compris entre a et b :

$$\varphi(x - h) = \varphi(x) - \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x - \theta_1 h)$$

où θ_1 est aussi inférieur à 1.

On en déduit par addition :

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) - 2\varphi(x) = \frac{h^2}{2}[\varphi''(x + \theta h) + \varphi''(x - \theta_1 h)]$$

Si on suppose que $\varphi''(x)$ conserve le même signe entre a et b, il en sera de même du premier membre de cette identité, de sorte que si φ'' est constamment positif, on a :

$$\varphi(x + h) + \varphi(x - h) > 2\,\varphi(x).$$

Cela posé, considérons la fonction

$$V = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \ldots + \varphi(\lambda)$$

où $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = c$, c étant constant ; le minimum de V est aisé à trouver si on assujettit les variables α, β, ...λ à varier entre a et b.

Soient α', β', γ' ... λ' les valeurs donnant ce minimum, je dis que l'on a: $\alpha' = \beta' = \gamma' \ldots = \lambda'$
en effet, supposons $\alpha' > \beta'$

on a
$$\alpha' = \frac{\alpha' + \beta'}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{2}$$
$$\beta' = \frac{\alpha' + \beta'}{2} - \frac{\alpha' - \beta'}{2}.$$

Or α' et β' étant compris entre a et b, il en est évidemment de même de leur demi-somme, donc
$$\varphi(\alpha') + \varphi(\beta') > 2\varphi\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)$$
donc en prenant pour α et β la demi-somme $\frac{\alpha' + \beta'}{2}$, on a une valeur de V inférieure à celle que l'on avait supposée minimum, résultat absurde qui montre que α' et β' doivent être égaux.

On voit que si φ'' était constamment négative entre a et b, au lieu d'un minimum ce serait un maximum que l'on aurait. De là le théorème suivant:

Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, ainsi que ses deux premières dérivées ente deux limites a *et* b *: α, β, γ ... λ des variables comprises entre ces limites et dont la somme est constante.*

Si φ'' conserve un signe constant entre ces limites, la fonction
$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \ldots + \varphi(\lambda)$$
sera maximum ou minimum pour des valeurs égales des variables α, β, ... λ.

Le maximum aura lieu si φ'' est négatif et le minimum s'il est positif.

On peut appliquer ce théorème à divers exemples :

Soit d'abord $\varphi(x) = x^p$, $\varphi''(x) = p(p-1)x^{p-2}$.

Snpposons $p \geq 2$, et prenons $a = 0$ et $b = \infty$ $\varphi''(x)$ est constamment positive, le minimum de la somme $\alpha^p + \beta^p + \ldots + \lambda^p$ est donc atteint lorsque $\alpha = \beta \ldots = \lambda$, la somme $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = C$ étant constante.

Considérons, par exemple, une équation de degré m assujettie seulement à avoir toutes ses racines réelles et positives et de somme constante : on voit que la somme des

puissances p^{me} de ses racines (où $p \geq 2$) sera minimum si l'équation a toutes racines égales.

Si l'équation était simplement assujettie à avoir ses racines réelles et que l'on prît $p \geq 2$ mais pair, le minimum de la même somme aurait lieu dans les mêmes circonstances.

Considérons encore $\varphi(x) = Lx$; $\varphi' = -\dfrac{L}{x^2}$. Si a et b ne comprennent pas zéro, le theorème s'applique : et comme

$$L\alpha + L\beta + \ldots + L\lambda = L(\alpha\beta \ldots \lambda)$$

on voit que $\alpha\beta\gamma \ldots \lambda$ sera maximum, lorsque $\alpha = \beta \ldots = \lambda$

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. Jouanne, professeur au Lycée de Caen.

Remarque sur le problème d'agrégation de 1879

(Voir 4e année, page 420.)

Autre discussion de l'équation de la surface S.

L'équation peut s'écrire, en posant :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = H,$$

$$\frac{H}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{H+4}{2}\right)\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) - (H+1) = 0.$$

On forme les équations du centre, savoir :

$$\frac{Hx}{a^2} - \frac{2x_0}{a^2}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) + \frac{x_0(H+4)}{2a^2} = 0,$$

$$(1)\quad \frac{Hy}{b^2} - \frac{2y_0}{b^2}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) + \frac{y_0(H+4)}{2b^2} = 0,$$

$$\frac{Hz}{c^2} - \frac{2z_0}{c^2}\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2}\right) + \frac{z_0(H+4)}{2c^2} = 0.$$

D'abord on reconnaît que pour $H = 0$ les trois équations se réduisent à une seule $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$

et dans ce cas la surface se réduit à deux plans confondus (le plan tangent à l'hyperboloïde au point où se trouve A).

Écartant cette hypothèse on voit que $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$ et que le centre se trouve sur la droite qui joint le point A à l'origine, centre de l'hyperboloïde donné.

En joignant à ces équations l'une des équations (1), on trouve pour les coordonnées du centre :

$$x = \frac{x_0 (H + 4)}{2 (H + 2)} \quad y = \frac{y_0 (H + 4)}{2 (H + 2)}. \quad z = \frac{z_0 (H + 4)}{2 (H + 2)}$$

lorsqu'on a $H + 2 = 0$ le centre est à l'infini sur la droite et la surface est un paraboloïde elliptique. Supposons $H + 2 \gtrless 0$ et transportons l'origine au centre. Alors l'équation de la surface S devient :

$$(2) \quad \frac{H}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2}\right)^2 + \frac{(H + 1) H^2}{8 (H + 2)} = 0.$$

Pour déterminer la nature de la surface, il faut chercher les intersections du diamètre conjugué de

$$(3) \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 0$$

et la nature de la section faite par ce plan.

Les équations du diamètre conjugué sont

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0};$$

et les points d'intersection de cette ligne et de la surface sont déterminés par l'équation suivante :

$$\frac{z^2}{z_0^2}\left[(H + 1)\frac{H}{2} - (H + 1)^2\right] + \frac{(H + 1) H^2}{8(H + 2)} = 0. \quad (4)$$

ou
$$z^2 = \frac{z_0^2 H^2}{4(H + 2)^2}$$

d'où
$$z = \pm \frac{z_0 H}{2(H + 2)},$$

valeurs toujours réelles.

L'équation de la projection de la section sur le plan xy, s'obtient en éliminant z entre (2) et (3), ce qui donne :

$$\frac{H}{2}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{z_0^2}\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\right)^2\right]+\frac{H^2}{8}\frac{(H+1)}{H+2}=0;$$

ou en ordonnant et en tenant compte de la valeur

$$H=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1;$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\frac{2x_0y_0}{a^2b^2}xy$$
$$+\frac{z_0^2H(H+1)}{c^2H(H+2)}=0. \qquad (5)$$

Le genre de la courbe est donné par le signe de la fonction suivante :

$$\frac{x_0^2y_0^2}{a^2b^2}-\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\left(\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\frac{z_0^2}{c^2}(H+1).$$

Alors on voit aisément que cette courbe est du genre hyperbole, si $H+1>0$, parabole pour $H+1=0$, et ellipse pour $H+1<0$. Donc :

1° Si le point A est en dehors du cône $H+1=0$, la surface est un hyperboloïde à une nappe.

2° Si le point A est sur le cône, la surface S est un cône.

3° Si le point A est à l'intérieur du cône $H+1=0$, mais en dehors de l'hyperboloïde à deux nappes $H+2=0$, S est un hyperboloïde à deux nappes.

4° Si le point A est sur l'hyperboloïde $H+2=0$, la surface S est un paraboloïde elliptique.

5° Si le point A est à l'intérieur de l'hyperboloïde $H+2$ la surface S est un ellipsoïde. Il est facile de reconnaître que, dans ce cas, $H+1<0$, $H+2<0$ et *à fortiori* $H<0$ et alors que l'ellipse (5) est réelle, tandis qu'elle est imaginaire pour $H+2>0$ et $H+1<0$.

6° On a vu que pour $H=0$ la surface est réduite à deux plans confondus.

La troisième partie du problème devient très facile au moyen de cette notation.

L'équation de la surface devient en ordonnant :

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{H}{2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$
$$+\frac{2y_0z_0}{b^2c^2}yz+2\frac{x_0z_0}{a^2c^2}xz+\frac{2x_0y_0}{a^2b^2}xy+\ldots=0.$$

1° Supposons que x_0, y_0 et z_0 soient différents de zéro; alors la condition pour que la surface soit de révolution est:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)+\frac{x_0^2}{a^4}=\frac{1}{b^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\frac{y_0^2}{b^4}$$
$$=-\frac{1}{c^2}\left(\frac{H}{2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)+\frac{z_0^2}{c^4}.$$

Cette condition ne peut être remplie que pour $H=0$ et alors la surface se réduit à deux plans confondus.

2° Soit $z_0=0$.

Alors on a pour condition

$$\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)+\frac{H}{2c^2}\right]\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{H}{2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\frac{H}{2c^2}\right]$$
$$=\frac{x_0^2y_0^2}{a^4b^4};$$

et en développant et supprimant le facteur commun $\frac{H}{2}$ on a:

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{x_0^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$-\frac{y_0^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

et si on remplace H par sa valeur

$$\frac{x_0^2}{a^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]$$
$$+\frac{y_0^2}{b^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

et enfin
$$\frac{x_0^2}{a^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$+\frac{y_0^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

ou encore plus simplement :

$$\frac{x_0^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2+c^2)}+\frac{y_0^2(b^2-c^2)}{b^2(b^2+c^2)}=1.$$

Ellipse dans le cas de $a>b>c$.

On trouverait de même des coniques dans le cas de $y_0=0$ ou de $x_0=0$.

Savoir : $\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2(a^2-b^2)} + \frac{z^2}{c^2}\,\frac{(b^2-c^2)}{b^2+c^2} = 1$;

et $$-\frac{y^2}{b^2}\,\frac{(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)} + \frac{z^2}{c^2}\,\frac{(a^2-c^2)}{a^2+c^2} = 1 ;$$

il suffit d'une simple permutation circulaire.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Former l'équation du second degré qui admet pour racines les carrés des demi-axes d'une conique représentée par l'équation générale du second degré à deux variables, en coordonnées obliques, à priori, sans passer par les calculs de la réduction. — Applications.

Soit $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ l'équation d'une conique rapportée à des axes de coordonnées dont l'angle est θ.

Supposons que l'on fasse tourner les axes de coordonnées autour de l'origine, sans déplacer celle-ci ; les variables x et y seront remplacées par des fonctions linéaires homogènes des nouvelles coordonnées, de la forme $x = mx' + ny'$, $y = px' + qy'$, et l'on aura identiquement, en vertu de cette transformation :

$$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \\ &= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F. \end{aligned}$$

L'origine n'ayant pas changé, on aura aussi identiquement, pour tout point du plan :

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta' ;$$

car les deux membres de cette égalité sont les deux expressions, dans les deux systèmes de coordonnées, de la même grandeur, qui est le carré de la distance à l'origine du point considéré.

λ désignant un paramètre numérique quelconque, n aura donc identiquement :

$$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta) \\ &= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 - \lambda(x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta'), \end{aligned}$$

(x, y) et $(x'y')$ désignant les coordonnées dans les deux systèmes d'un même point de la conique considérée.

Si l'on vient à déterminer λ de manière que le premier membre de cette dernière égalité soit le carré parfait d'une fonction linéaire et homogène $ux + vy$, la transformation de coordonnées sera aussi du second membre, et pour la même valeur de λ, un carré parfait, puisque cette transformation ne sera autre chose que la substitution dans $(ux + vy)^2$, à la place de x et de y, des valeurs $x = mx' + ny'$, $y = px' + qy'$, ce qui fera de $(ux + vy)^2$ un autre carré parfait $(u'x' + v'y')^2$.

Or la première fonction devient un carré parfait pour les valeurs de λ qui annulent son discriminant, c'est-à-dire qui sont racines de l'équation du second degré

$$(A - \lambda)(C - \lambda) - (B - \lambda \cos \theta)^2 = 0$$

ou $$\lambda^2 \sin^2 \theta - \lambda(A + C - 2B \cos \theta) + AC - B^2 = 0.$$

La seconde fonction devient de même un carré parfait pour les valeurs de λ qui sont racines de l'équation analogue

$$\lambda^2 \sin^2 \theta' - \lambda(A' + C' - 2B' \cos \theta') + A'C' - B'^2 = 0.$$

Mais nous avons montré que les valeurs de λ qui rendent les deux fonctions carrés parfaits, sont nécessairement les mêmes ; les deux équations précédentes doivent donc avoir les mêmes racines ; et par conséquent leurs coefficients sont proportionnels. Par suite :

$$\frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{A' + C' - 2B' \cos \theta'}{\sin^2 \theta'} \quad (1)$$

et $$\frac{AC - B^2}{\sin^2 \theta} = \frac{A'C' - B'^2}{\sin^2 \theta'} \quad (2).$$

C'est la traduction de ce fait que l'on exprime quelquefois assez improprement d'ailleurs, en disant que les fonctions ci-dessus sont des invariants de l'équation du second degré. Les relations (1) et (2) ne sont en réalité que des effets d'une cause algébrique dont l'étude ne fait pas encore partie des programmes actuels ; il faut nous borner ici à les considérer comme signifiant que les fonctions $\frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ et $\frac{AC - B^2}{\sin^2 \theta}$ conservent la même valeur dans tous les sys-

tèmes d'axes de coordonnées, et proscrire de la façon la plus absolue tout autre énoncé, qui ne serait pas exact parce que la définition véritable et précise d'un invariant nous fait complètement défaut dans les cours de spéciales.

Il est facile de reconnaître que l'équation

$$\lambda^2 \sin^2 \theta = \lambda(A + C - 2B \cos \theta) + AC - B^2 = 0 \quad (3)$$

est, en géométrie plane, une sorte d'équation en S, c'est-à-dire qu'elle admet pour racines les coefficients des carrés des variables dans l'équation de la conique rapportée à ses axes principaux.

Supposons, en effet, que la transformation de coordonnées effectuée soit telle que les axes nouveaux soient parallèles aux axes principaux de la courbe ; l'équation nouvelle manquera du terme en $x'y'$, et sera de la forme

$$Mx'^2 + Ny'^2 + 2Hx' + 2Ky' + F = 0.$$

Or l'équation (3), dont nous avons vu que les racines sont invariables, se réduit dans ce cas à

$$(M - \lambda)(N - \lambda) = 0. \quad (4)$$

Les racines sont évidemment M et N; donc les racines de l'équation générale (3) sont aussi M et N.

Dès lors, il est facile d'arriver à l'équation aux carrés des demi-axes d'une conique représentée par l'équation générale.

L'équation de cette conique, rapportée à son centre et à ses axes est, en effet :

$$MX^2 + NY^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (5)$$

Δ et δ étant les déterminants connus

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad \text{et } \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

(On sait, en effet, qu'en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque du plan, les termes du second degré ne changent pas.)

Or les carrés des demi-axes de la conique (5) sont respectivement en grandeur et en signe

$$-\frac{1}{M}\frac{\Delta}{\delta} \text{ et } -\frac{1}{N}\frac{\Delta}{\delta}.$$

L'équation (3) admet pour racines M et N; donc l'équa-

tion en $-\frac{1}{\lambda}$ admettra pour racines $-\frac{1}{M}$ et $-\frac{1}{N}$. Cette équation est la suivante :

$$\delta\lambda^2 + \lambda(A + C - 2B\cos\theta) + \sin^2\theta = 0,$$

et pour avoir l'équation cherchée, il suffit de multiplier les racines de cette dernière par $\frac{\Delta}{\delta}$, c'est-à-dire de changer λ en $\frac{\delta z}{\Delta}$, ce qui donne :

$$\delta^3 z^2 + \Delta\delta(A + C - 2B\cos\theta)z + \Delta^2\sin^2\theta = 0. \quad (6)$$

Les valeurs de z qui sont les racines de cette équation sont, en grandeur et en signe, les carrés des demi-axes de la conique représentée par l'équation générale.

Application. — 1° *Condition pour que l'équation générale représente une hyperbole équilatère.* — Dans l'hyperbole équilatère, les carrés des demi-axes sont égaux et de signes contraires ; la condition est donc

$$A + C - 2B\cos\theta = 0,$$

et dans ce cas $$a^2 = \frac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{-\delta}},$$

formule où $-\delta = B^2 - AC$, quantité que l'on sait être positive dans le cas de l'hyperbole.

2° *Aire de l'ellipse.* — L'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est, comme on sait, la projection de l'aire du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ sous l'angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$; cette aire est donc $\pi a^2 \times \frac{b}{a}$ ou πab.

Or on a, par l'équation (6) :

$$a^2b^2 = \frac{\Delta^2\sin^2\theta}{\delta^3};$$

donc $$ab = \frac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{\delta}}$$

$$\text{et } S = \pi\frac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{\delta}},$$

formule de la composition de laquelle il est facile de se rendre compte à priori.

Elle doit, en effet, contenir Δ en numérateur; car l'aire doit s'annuler quand l'ellipse se réduit à son centre, c'est-à-dire pour $\Delta = 0$; elle doit contenir un facteur δ à son dénominateur ; car l'aire doit devenir infinie quand l'ellipse se déforme en parabole, c'est-à-dire pour $\delta = 0$; si le facteur Δ est à la puissance 1 au numérateur, le facteur δ doit être à la puissance $\frac{3}{2}$ au dénominateur, puisque Δ est du troisième degré et δ du second degré par rapport aux coefficients de l'équation générale, et que S doit être du degré 0 par rapports à ces mêmes coefficients, cette valeur numérique n'étant qu'un nombre d'unités de surface c'est-à-dire un simple rapport. L'existence du facteur π est nécessitée par le fait que l'aire de l'ellipse doit se réduire à celle du cercle quand les axes sont égaux, et enfin le facteur $\sin\theta$ provient, si l'on veut, de ce que $\frac{S}{\sin\theta}$ doit être indéterminé, c'est-à dire prendre la forme $\frac{0}{0}$, quand il n'y a plus ni ellipse définie, ni axes de coordonnées (*).

3° *Théorème d'Apollonius.* — Reprenons les relations (1) et (2) :

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C' - 2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}$$

et

$$\frac{AC - B^2}{\sin^2\theta} = \frac{A'C' - B'^2}{\sin^2\theta'}.$$

Prenons l'ellipse ou l'hyperbole rapportée dans le premier cas, à un système de diamètres conjugués faisant entre eux l'angle θ, et dans le second, aux axes principaux. Leurs équations sont alors :

1° $\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2} = 1$ et 2° $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(*) Cette dernière interprétation nous paraît bien un peu bizarre, mais nous l'indiquons comme nous l'avons vu donner. Il vaudrait mieux la rapporter à la constance d'une autre fonction des coefficients qui est $\frac{\Delta}{\sin\theta}$.

L'application de la première relation donne, en observant que dans les deux cas $B = B' = 0$, et que dans le second $\theta = 90°$:

$$\frac{\frac{1}{a'^2} \pm \frac{1}{b'^2}}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$$

L'application de la seconde relation donne de même :

$$\frac{1}{a'^2 b'^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2 b^2}$$

d'où immédiatement $ab = a'b' \sin \theta$.

En divisant membre à membre les deux formules précédentes, il vient :

pour l'ellipse : $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$

et pour l'hyperbole : $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$.

Ces relations sont précisément les deux théorèmes connus sous le nom de théorèmes d'Apollonius.

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENSD'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Algèbre.

Décomposer le polynôme $(x^2 + x + 1)^2 + 1$ en un produit de deux facteurs réels du 2e degré en x.

— Développer en fraction continue la valeur de x qui satisfait à l'équation $10^x = 2$.

— Est-on sûr d'arriver, par le seul emploi du théorème de Rolle, à séparer des racines d'une équation algébrique de degré quelconque? (abstraction faite de la longueur des calculs.) Appliquer à l'exemple $x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 8x + 9 = 0$.

Former une équation dont les racines (y) soient liées à celles de l'équation $f(x) = 0$ par la relation $y = x' + 2x''$, x' et x'' étant deux racines quelconques de l'équation $f(x) = 0$.

— Soit l'équation $2x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$. Quelle relation doit exister entre a et b pour que deux des racines satisfassent à la relation

$$x' + \frac{2}{x''} = 3?$$

— Appliquer le théorème de Rolle à l'équation,

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

p et q étant deux nombres impairs premiers entre eux, décomposer la fraction $\frac{x^{100} + 1}{(x^p - 1)(x^q - 1)}$ en fractions simples.

— Former le polynôme du deuxième degré qui est égal à a pour $x = \alpha$, à b pour $x = \beta$, et à c pour $x = \gamma$.

— Extraire la racine carrée de l'expression $1 + 2\sqrt{-1}$.

— Étudier la série $1 + x \cos \varphi + x^2 \cos 2\varphi + \ldots + x^n \cos n\varphi + \ldots$ Former la somme des n premiers termes.

— Limite de l'expression $\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3}\right)^m$, quand m croît indéfiniment.

— Montrer que la méthode des groupements ne peut donner pour la limite supérieure des racines positives d'une équation un nombre inférieur à celui que donne la méthode de Newton.

— Parmi tous les cylindres de même surface totale, quel est celui qui a le plus petit volume ?

— Les racines d'une équation $f(x) = 0$ pouvant se partager en groupes tels que la somme de deux des racines de chaque groupe soit égale à une quantité donnée R, comment peut-on abaisser le degré de l'équation $f(x) = 0$?

— Chercher quel est le quadrilatère de périmètre minimum inscrit dans une demi-circonférence.

— Que dire de la série

$$1 + \frac{x \cos \theta}{1} + \frac{x^2 \cos 2\theta}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \cos 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n \cos n\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots$$

Trouver, sans employer les dérivées, vers quelle valeur tendent les deux expressions $\frac{x^m}{m\sqrt{m}}$, $\frac{x^m}{m^p}$ quand m augmente indéfiniment. (p est un nombre positif, et x une quantité donnée.)

— Étudier les variations de la fraction

$$y = x + \sin x + \sqrt{x^2 - 1}$$

quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

— Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

— Quelle est la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des quantités satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$
$$\gamma^2 + \delta^2 = 1$$
$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

— Étudier les variations de la fraction

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x}.$$

— $F(x)$ et $f(x)$ étant deux équations algébriques, on veut exprimer que les racines de la première sont respectivement égales à celles de la deuxième augmentées chacunes du nombre 2; méthode à suivre.

Géométrie analytique plane.

— Maximum du quadrilatère inscrit dans une ellipse.

— Lieu des points tels que la polaire de chacun d'eux soit normale à l'ellipse.

— Construire la courbe

$$y^2 = \frac{x(x-1)(x-2)}{x+3}.$$

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$y^2 = 1 - x\sqrt{x+1}.$$

— Construire la courbe ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho^2 + \rho \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0.$$

— Construire la courbe dont l'équation est

$$\frac{1}{\rho} = \cos^2 \omega.$$

Trouver les points d'inflexion.

— Recherche des asymptotes de la courbe

$$y = \sqrt[5]{\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots}}.$$

— Calculer le paramètre d'une parabole représentée par l'équation générale du second degré à deux variables.

Incidemment, démontrer que les trois quantités

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\delta}{\sin^2\theta} \text{ et } \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$$

sont des invariants.

— On demande de prévoir complètement, *a priori*, la formule

$$\delta = \frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}$$

qui donne la distance d'un point (x, y) à une droite $Ax + By + C = 0$.

— Si une hyperbole a mêmes axes qu'une ellipse donnée, et que l'on joigne à un foyer de l'ellipse les points de rencontre de cette hyperbole avec la directrice de l'ellipse qui correspond au foyer considéré, on a deux tangentes à l'hyperbole. — Ces tangentes sont rectangulaires.

— Former l'équation qui représente le système des deux bissectrices des deux droites représentées par l'équation

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 = 0.$$

— Trouver les longueurs des axes de la courbe représentée par l'équation

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0.$$

— Construire la courbe dont les points ont pour coordonnées

$$x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t}$$

— Étant donnés un point $(\alpha\beta)$ et une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, décrire de ce point comme centre, un cercle tel que deux sécantes communes au cercle et à l'ellipse soient rectangulaires.

— On donne une droite et trois points. Construire la conique passant par les trois points, et ayant pour axe la droite donnée.

— Construire la courbe

$$\rho = \frac{\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}.$$

— Discuter l'équation $y^3 + x^5 = 1 \ldots$
Points remarquables de la courbe qu'elle représente.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \text{tang}\ \omega \sin \omega.$$

— Lieu des milieux des cordes parallèles à la direction $y = mx$ dans la courbe $y^2 = x^3$.

— Lieu du sommet de l'angle droit dont les côtés sont normaux à la parabole.

— Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote et une directrice communes.

— On considère les hyperboles équilatères ayant un sommet réel commun, ainsi qu'un point de l'une des asymptotes. — Trouver l'équation générale de ces courbes et le lieu de leurs foyers.

— Etant donnée la longueur qui représente l'unité linéaire, construire les longueurs définies par les formules

$$x = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 80.)

Interprétation géométrique de la projectivité. — *Deux figures projectives sont telles que le rapport anharmonique de quatre éléments de l'une est égal au rapport anharmonique des quatre éléments correspondants de l'autre.* — En effet, le rapport anharmonique de quatre éléments dans l'une des figures a pour valeur, ainsi que nous l'avons démontré,

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

Les paramètres étant les mêmes pour les éléments correspondants, le rapport précédent est nécessairement le même.

Il suit de là que toutes les propriétés résultant de la conservation du rapport anharmonique appartiennent aux figures projectives; cette simple remarque peut servir de base à la géométrie supérieure, et elle a donné les magnifiques résultats dont les Poncelet, les Steiner, les Chasles ont enrichi la science.

Mais nous ferons observer que leur point de vue, d'ailleurs purement géométrique, est précisément l'inverse de l'étude analytique de la projectivité, et c'est surtout à Clebsch que revient l'honneur d'avoir considéré les figures projectives sous cet aspect nouveau, à la fois original et logique.

Définition de l'homographie. — La relation

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

en vertu de laquelle à un point d'une base ou à un rayon d'un faisceau correspond un point *unique* d'une autre base ou un rayon *unique* d'un autre faisceau, est ce qu'on nomme une relation *homographique*, et deux séries de points pris sur une même base ou sur des bases différentes et satisfaisant à cette relation s'appellent *divisions homographiques de même base ou de bases différentes.*

Deux séries de points *en projectivité* sont donc *homographiques*, et les divisions homographiques jouissent par conséquent des propriétés des figures projectives, et en particulier de celle qui est la plus importante de toutes, de la conservation du rapport anharmonique.

Il résulte aussi de tout ce qui précède que deux divisions homographiques de même base qui ont trois points correspondants confondus coïncident dans toute leur étendue, c'est-à-dire ne forment qu'une seule et même division.

Il en est de même pour deux faisceaux de même centre dont trois rayons correspondants coïncident.

Nous nous occuperons plus tard des propriétés des figures homographiques, mais toujours au point de vue analytique; car, au point de vue géométrique, elles ont été complètement étudiées par Chasles et Poncelet.

Figures perspectives. — Si l'on considère une division (c.-à-d. une série de points en ligne droite), et un faisceau (c.-à-d. une série de droites passant par un même point), et que l'on suppose la série et le faisceau projectifs, il peut arriver que chaque rayon du faisceau passe par le point qui lui correspond; on dit alors que les deux figures sont *en perspective*.

Or, il est facile de se convaincre que *les séries et les faisceaux*

qui sont projectifs peuvent toujours être amenés en perspective (*). Il suffit, en effet, de déplacer le faisceau tout d'une pièce, de manière à faire passer trois de ses rayons par les trois points correspondants de la série des points. Les autres rayons passeront alors par les points qui leur correspondent respectivement, en vertu des théorèmes démontrés plus haut.

Les figures projectives d'espèces différentes peuvent donc être considérées comme provenant du déplacement de figures perspectives.

Cette remarque peut être étendue aux figures projectives de même espèce.

Nous dirons pour cela que deux divisions projectives sont perspectives quand les lignes qui joignent les points correspondants concourent en un même point, qu'on appelle le *centre de perspective*, et que deux faisceaux projectifs sont perspectifs quand les rayons correspondants se coupent sur une même ligne droite, qu'on appelle *axe de perspective*.

On amènera deux divisions projectives à être en perspective, en déplaçant l'une des divisions, de manière à faire coïncider l'un de ses points avec le point correspondant de l'autre division, et, de même, on amènera deux faisceaux projectifs à être en perspective en déplaçant l'un des faisceaux, de manière à faire coïncider l'un de ses rayons avec le rayon correspondant de l'autre faisceau.

Tous ces résultats, que nous venons d'exposer très sommairement, et par conséquent, les propriétés qui en découlent, sont donc établis directement par l'analyse, et l'on voit qu'en réalité, pour regagner le terrain d'abord conquis par la géométrie pure, il suffit de fournir au calcul des moyens d'investigation plus commodes et plus puissants que les procédés trop restreints dus à l'emploi des seules coordonnées de Descartes. Les coordonnées tangentielles constituent l'un de ces moyens, et leurs principal avantage consiste dans la facilité avec laquelle elles mettent en lumière le principe de dualité.

(*) Clebsch, *Leçons sur la géométrie*, t. I, p. 57 et 58.

De l'équation tangentielle d'une courbe. — Si entre les coordonnées tangentielles u et v de la droite on établit une équation $f(u, v) = 0$, nous avons dit qu'un système de solutions réelles u_1 et v_1 de cette équation définit une tangente d'une certaine courbe qu'on peut regarder comme représentée par la succession continue de ses tangentes, et par l'équation $f(u, v) = 0$, que l'on appellera pour ce motif *l'équation tangentielle* de la courbe considérée.

Si la définition géométrique, ou la construction de la courbe au moyen de quelqu'une de ses propriétés, permet d'établir à priori une relation entre les coordonnées tangentielles u et v de l'une quelconque de ses tangentes, relation s'appliquant à chacune de ces tangentes, et à ces droites seulement, la relation ainsi établie donnera immédiatement l'équation tangentielle de la courbe.

Par exemple, toutes les tangentes d'un cercle jouissant de la propriété d'être équidistantes du centre ; si nous prenons pour axes deux diamètres rectangulaires passant par le centre ; il est clair que l'on a :

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = l^2$$

en appelant u et v les coordonnées d'une tangente quelconque, et l la longueur comprise entre les axes. Mais on a aussi : $\quad \mathrm{R}l = \frac{1}{uv}$; donc $l = \frac{1}{\mathrm{R}uv}$

et par conséquent entre u et v on aura la relation

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{\mathrm{R}^2u^2v^2}$$

c'est-à-dire $\quad u^2 + v^2 = \frac{1}{\mathrm{R}^2},$

que l'on obtient aussi, immédiatement, en écrivant que la distance de l'origine à la droite $ux + vy - 1 = 0$ est égale à R, quels que soient u et v. Le carré de cette distance est en effet, $\frac{1}{u^2 + v^2}$; on a donc $\frac{1}{u^2 + v^2} = \mathrm{R}^2$, d'où $u^2 + v^2$

$$= \frac{1}{\mathrm{R}^2}.$$

Cette relation entre u et v est l'équation tangentielle du

cercle, par rapport à deux diamètres rectangulaires passant par son centre, pris pour axes des coordonnées cartésiennes.

BIBLIOGRAPHIE

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, *par* **M. A. Javary,** *chef des travaux graphiques à l'Ecole Polytechnique, professeur de géométrie descriptive aux lycées Saint-Louis, Louis-le-Grand et au collège Rollin. — Première partie: la ligne droite, le plan et les polyèdres. — Paris, librairie Delagrave.*

L'ouvrage que nous signalons aujourd'hui à nos lecteurs présente une exposition très rigoureuse et très claire des principes fondamentaux et des méthodes employées en géométrie descriptive; cette première partie, étudiée sérieusement, permettra d'apprendre avec facilité la seconde partie du cours, comprenant l'étude des surfaces, la partie la plus importante pour l'entrée à l'Ecole Polytechnique, partie indispensable à bien savoir, si l'on veut suivre avec fruit le cours, si intéressant, fait à l'intérieur de l'école, où la théorie des surfaces est l'objet maintenant d'études approfondies.

Il appartenait à M. Javary, par suite de sa double situation comme chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique et comme professeur pour les classes de mathématiques spéciales, d'écrire une sorte d'introduction au cours de M. Mannheim. Au début de la préface de son cours de Géométrie descriptive, le professeur de l'École dit qu'il est nécessaire de bien posséder les éléments de la science qu'il professe, en commençant la lecture de son ouvrage. C'est pour répondre à cette nécessité que le livre que nous annonçons a été écrit.

Parmi les modifications les plus importantes introduites dans l'étude élémentaire de la géométrie descriptive, nous signalerons l'emploi des changements de plans nettement indiqué dans un certain nombre de problèmes comme procédé d'exécution seulement, et non pas comme moyen de solution. L'auteur a soin de ne pas recommander la méthode des rotations, qui présente le grave inconvénient de compliquer les tracés, et de les superposer à la figure principale; cependant, cette méthode peut être utile dans certains cas; elle est donc étudiée à part.

Indiquons aussi la construction d'un certain nombre de problèmes au moyen d'un seul plan de projection. Ces questions, souvent intéressantes, montrent aux élèves que les deux plans ne sont pas nécessaires toujours et les acheminent à la méthode des projections cotées qui termine le premier volume.

Enfin, signalons des applications de l'intersection des polyèdres à des questions d'ombre et les principes de la perspective cavalière, limités ici à l'étude, par ce mode de représentation, des figures planes et des polyèdres, et qui ramènent les figures à l'apparence qu'on leur donne en général dans l'étude des figures de l'espace; nous aurons indiqué ainsi les parties les plus importantes de cet ouvrage.

Nous pouvons en terminant, dire que jamais lecture d'un livre de Géométrie descriptive ne nous procuré un plus réel plaisir que celui que nous avons

éprouvé en lisant cet ouvrage, dont les figures, cette partie si importante pour un livre de cette nature, sont faites avec un soin tout particulier. Nous espérons que la seconde partie du cours de M. Javary ne se fera pas attendre bien longtemps, et viendra compléter ce traité qui prendra, dès le début, sa place parmi les très bons ouvrages destinés à l'enseignement scientifique en France.

A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

313. — Si dans un triangle ABC, les côtés a et b sont tels que l'on ait $a = b\sqrt{2}$, démontrer que : 1° la médiane du triangle qui part du sommet A coupe le côté BC sous un angle égal à l'angle A du triangle; 2° que $\cos^2 A = \cos 2B$.

(*de Longchamps.*)

314. — On considère un cercle de centre O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD. Du point A comme centre, avec AC = AD pour rayon, on décrit un cercle, et l'on prend un point M sur ce cercle. On mène les lignes AM, BM qui rencontrent le cercle O aux points A' et B'; on mène aussi le rayon OI qui passe par le point M. Démontrer que l'on a : arc CI = arc B'C + arc A'I, (*de Longchamps.*)

315. — On considère un cercle de centre O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD dans ce cercle. Dans le demi-cercle ADB, on trace deux rayons rectangulaires OP, OP'; on abaisse des extrémités P et P' de ces rayons des perpendiculaires PQ, P'Q' sur le diamètre AB. On forme ainsi deux triangles rectangles OPQ, OP'Q' dont nous désignerons les centres des cercles inscrits respectivement par ω et ω'. Cela posé, la figure donne lieu aux remarques suivantes, qu'on propose de démontrer :

1° La droite $\omega\omega'$ qui est, pour des raisons évidentes, parallèle au diamètre AB, est égale au rayon du cercle donné;

2° Le lieu géométrique décrit par le point I, centre du cercle circonscrit au triangle $C\omega\omega'$(est un cercle;

3° La droite qui joint les milieux de PP' et de $\omega\omega'$ est constamment parallèle à CD, et égale à la moitié du rayon;

4° Les droites AP, BP′, CI sont concourantes ;

5° Les cinq points P, P′, ω, ω′, O sont sur un même cercle ;

6° On a $C\omega'^2 + O\omega^2 = C\omega^2 + O\omega'^2 = 2R^2$;

7° Le milieu de PP′ et les points ω, ω′, I forment les quatre sommets d'un carré. *(de Longchamps.)*

316. — On donne deux parallèles A, B, et sur la première un point fixe O. Soit C un point quelconque de B. Sur OC comme diamètre, décrivons une circonférence et menons en C la tangente CD, sur laquelle nous prenons CD = CO. Enfin joignons le point D au milieu E de CO. Cette droite rencontre le cercle en deux points I et I′ dont on demande le lieu géométrique. *(de Longchamps.)*

Mathématiques spéciales.

317. — Trouver l'enveloppe de la ligne

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \sqrt[n]{(a \cos n\varphi)}.$$

(Edmunds.)

318. — Résoudre le système

$$x + y = 3\sqrt[3]{x - 1}$$
$$x^3 + y^3 = \frac{2y}{x + y}.$$

(Edmunds.)

319. — 1° On prend sur la tangente à une courbe fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle à la normale en ce point. Trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur quand la tangente se déplace. — 2° On prend sur la normale à une courbe fixe, à partir du pied de la normale à la courbe, une longueur proportionnelle à la tangente en ce point. Trouver le lieu du point ainsi obtenu quand la normale se déplace. — Application aux coniques et à la cycloïde. *(Julliard.)*

320. — Établir l'identité suivante, qui a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de p et de n :

$$n^p - C^1_{p+1}(n-1) + C^2_{p+1}(n-2)^p + \ldots +$$
$$(-1)^p C^p_{p+1}(n-p)^p + (-1)^{p+1}(n-p-1)^p = 0.$$

(de Longchamps.)

321. — Établir, pour des valeurs entières et positives de p et de n, et quel que soit x, l'identité

$$(x - 1)^{p+1}[1^p x + 2^p x^2 + \ldots + n^p x^n]$$
$$= \beta_1 x^{n+p+1} + \beta_2 x^{n+p} + \ldots + \beta_{p+1} x^{n+1}$$
$$+ \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p-1} + \ldots + \alpha_1 x,$$

les coefficients α, β étant indépendants de x, et donnés par les égalités

$$\beta_1 = n^p$$
$$\beta_2 = (n-1)^p - C^1_{p+1} n^p$$
$$\beta_3 = (n-2)^p - C^1_{p+1}(n-1)^p + C^2_{p+1} n^p$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\beta_{p+1} = (n-p)^p - C^1_{p+1}(n-p+1)^p + \ldots + (-1)^p C^p_{p+1} n^p$$
$$\alpha_1 = (-1)^{p+1} . 1^p$$
$$\alpha_2 = (-1)^{p+1} . 2^p + (-1)^p C_{p+1} . 1^p$$
$$\alpha_3 = (-1)^{p+1} . 3^p + (-1)^p C^1_{p+1} 2^p + (-1)^{p-1} C^2_{p+1} 1^p$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\alpha_p = (-1)^{p+1} p^p + \ldots + (-1)^2 C^{p-1}_{p+1} . 1^p.$$

(de Longchamps.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 5758-1.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

1. — *Décomposer en facteurs premiers le produit :*

$$1.2.3.4\ldots m$$

Soit a un facteur premier qui entre dans ce produit ; si l'on divise m par a, et que l'on trouve pour partie entière du quotient q, les seuls facteurs divisibles par a seront

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\ \ldots\ qa.$$

Par conséquent, en réunissant ces facteurs, nous pourrons mettre en évidence le produit

$$a^q\,.1.2.3\ldots q.$$

Supposons de même que l'on ait

$$q = aq' + r'.$$

Dans le produit $1.2.3\ldots q$, nous pourrons encore mettre en évidence le produit

$$a^{q'}.1.2.3\ldots q'.$$

Enfin, supposons qu'en divisant q' par a, on ait un quotient q'' inférieur à a ; on mettra en évidence le produit

$$a^{q''}1.2\ 3\ldots q''.$$

Il en résulte que, pour chaque facteur premier, on trouvera facilement la puissance à laquelle il entre dans le produit $1.2.3\ldots m$, d'après la règle suivante :

On divise m par le facteur premier considéré a, on a pour partie entière du quotient q ; on divise q par a, ce qui donne pour partie entière q' ; on divise q' par a, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on trouve un quotient q_n inférieur à a ; la puissance à laquelle le facteur a entre dans le produit est

$$q + q' + q'' + \cdots + q_n.$$

En opérant ainsi pour tous les facteurs premiers qui entrent dans le produit, on décomposera celui-ci en facteurs premiers.

Ainsi, par exemple, prenons le produit

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.$$

Les facteurs premiers qui entrent dans le produit sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

On trouve pour le facteur 2, les quotients

8, 4, 2, 1 ;

donc 2 entre au produit avec la puissance 15 ; on trouverait pour 3 la puissance 6 ; pour 5 la puissance 3 ; pour 7 la puissance 2, et pour les autres la puissance 1 ; donc on aura pour le résultat de la décomposition du nombre en facteurs premiers $2^{15} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$

2. — *Décomposer en facteurs premiers le produit*

$$(p + 1)(p + 2)(p + 3)(p + 4) \ldots (p + m).$$

Je remarque que ce produit est le quotient du produit des $(m + p)$ premiers nombres par le produit des p premiers nombres.

Cela posé, si nous considérons un facteur premier supérieur à p, il est certain qu'il n'entrera pas au dénominateur; nous le retrouverons au quotient avec un exposant égal à celui qu'il a dans le numérateur, exposant que nous obtenons d'après la règle précédente. Si, au contraire, nous prenons un facteur premier b inférieur à p, nous aurons, en appliquant au numérateur et au dénominateur la règle précédente, d'abord

$$m + p = bq_1 + r_1; \qquad p = bq + r,$$

et il est bien certain que l'on a

$$q_1 \geq q.$$

Nous en déduirons donc, en continuant de même, et appelant q_1', q_1'', . . . les quotients successifs pour le numérateur, q', q'' . . . les quotients pour le numérateur

$$q_1' \geq q'; \qquad q''_1 \geq q'' \ldots$$

et, en définitive, en posant d'une part

$$Q_1 = q_1 + q_1' + q_1'' + \ldots$$

d'autre part $\quad Q = q + q' + q'' + \ldots$

Nous trouverons que le facteur b entre au quotient à une puissance égale à $\quad Q_1 - Q.$

En opérant de même pour tous les facteurs premiers inférieurs à p, nous décomposerons en facteurs premiers le produit donné, en mettant en outre tous les facteurs supérieurs à p, pour lesquels nous appliquons la règle donnée dans le premier problème.

EXEMPLE. — *Décomposer en facteurs premiers le produit*

$$18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.$$

On a ici : $p = 17$; $p + m = 29$.

Les facteurs premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Les facteurs 19, 23, 29 entreront dans le produit avec l'exposant 1 ; pour les autres, on trouve le tableau suivant

	Q_1	Q	$Q_1 - Q$		Q_1	Q	$Q_1 - Q$
2	25	15	10	11	2	1	1
3	13	6	7	13	2	1	1
5	6	3	3	17	1	1	0
7	4	2	2				

Donc le produit, décomposé en facteurs premiers, donne

$$2^{10} \times 3^7 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29.$$

3. **Théorème.** — *Le produit de* p *nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des* p *premiers nombres.*

Je puis toujours supposer que le plus petit des nombres qui entrent au numérateur surpasse d'au moins une unité le plus grand facteur du dénominateur ; sans quoi, il y aurait des facteurs communs au numérateur et au dénominateur, que je pourrais supprimer immédiatement, ce qui me ramènerait au cas précédent ; je considère donc la fraction $\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)\ \ldots\ (m+p)}{1.2\ \ldots\ p}$

dans laquelle je suppose $m \geq p$; il en résulte que l'on a, pour un facteur premier a, en appelant q_1 le quotient de $m+p$ par a, et q le quotient de p par a

$$q_1 \geq 2q$$

de même

$$q'_1 \geq 2q'$$

$$q''_1 \geq 2q''$$

etc., q'_1, $q''_1, \ldots$ q', $q'' \ldots$ ayant la signification que je leur ai donné précédemment. J'en déduis :

$$Q_1 - Q \geq Q.$$

Donc tout facteur premier du dénominateur entre au numérateur avec un exposant au moins égal; par conséquent le numérateur contient tous les facteurs premiers du dénominateur avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont dans ce dénominateur; par suite l'expression considérée est un nombre entier.

4. Théorème. — *Si l'on a*

$$m \geq \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

l'expression

$$\frac{1.2.3.4 \ldots m}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times 1.2.3\ldots\gamma \times 1.2.3\ldots\delta}$$

est un nombre entier.

En effet on peut d'abord supprimer le produit $1.2.3\ldots\alpha$ au numérateur; puis on remarquera que l'expression est le produit des expressions suivantes :

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\alpha+\beta)}{1.2.3\ldots\beta},$$

$$\frac{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)\ldots(\alpha+\beta+\gamma)}{1.2.3\ldots\gamma},$$

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+1)\ldots(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{1.2.3\ldots\delta},$$

et de plus, un produit sous forme entière P s'il y a lieu.

Or, chacune des expressions précédentes est entière, d'après ce que l'on a dit; donc l'expression considérée est un nombre entier.

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

(*Suite*, voir page 104.)

II

TÉTRAGONOMÉTRIE, POLYGONOMÉTRIE

13. — (R) *Trouver une expression pour la surface* S *d'un quadrilatère* ABCD *dont on connaît deux côtés opposés* b, d *et les angles.*

Les côtés AB, CD se coupent en E. L'aire du triangle ADE est
$$\frac{1}{2}d^2\frac{\sin A \sin D}{\sin(A+D)},$$
et l'aire du triangle BCE est
$$\frac{1}{2}b^2\frac{\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)}{\sin[2\pi-(B+C)]}=-\frac{1}{2}b^2\frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$$
et comme
$$S = ADE - BCE,$$
on aura
$$S=\frac{d^2 \sin A \sin D}{2\sin(A+D)}+\frac{b^2\sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$$

Remarque. — On reconnaît aisément que, quoique on ait supposé dans la démonstration que le quadrilatère fût convexe, la formule trouvée est vraie aussi quand il ne l'est pas.

14. — (R) *Étant donnés dans un quadrilatère quelconque les côtés* a, b, c, *et les angles* B, C, *trouver sa surface.*

Les côtés AB, CD du quadrilatère se coupent en E. Comme l'angle E est égal à $\pi-(\pi-B)-(\pi-C)$ ou $B+C-\pi$, le triangle BCE donnera
$$\frac{BC}{\sin(B+C-\pi)}=\frac{CE}{\sin A}=\frac{BE}{\sin C}$$
et on aura donc
$$BE=-\frac{b\sin C}{\sin(B+C)};\qquad CE=-\frac{b\sin B}{\sin(B+C)};$$
et
$$AE=a-\frac{b\sin C}{\sin(B+C)};\qquad DE=c-\frac{b\sin B}{\sin(B+C)}.$$
Or on a
$$BCE=\frac{1}{2}\left(\frac{b\sin C}{\sin(B+C)}\right)\left(\frac{b\sin B}{\sin(B+C)}\right)\sin(B+C-\pi)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{b^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)};$$
$$ADE=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b\sin C}{\sin(B+C)}\right)\left(c-\frac{b\sin B}{\sin(B+C)}\right)\sin(B+C-\pi)$$
$$=-\frac{1}{2}ac\sin(B+C)+\frac{1}{2}bc\sin C+\frac{1}{2}ab\sin B$$
$$-\frac{1}{2}\frac{b^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)},$$

et comme $$S = ADE - BCE,$$
on aura
$$S = \frac{1}{2}bc \sin C + \frac{1}{2}ab \sin B - \frac{1}{2}ac \sin (B + C).$$

15. — (R) *Le carré de la surface d'un quadrilatère plan quelconque est égal au carré de la surface d'un quadrilatère inscriptible ayant les mêmes côtés, diminué du produit des quatre côtés par le carré du cosinus de la demi-somme de deux angles opposés.*

En égalant les deux expressions du carré de la diagonale BD du quadrilatère, on a
$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$
d'où l'on tire
$$ad \cos A - bc \cos B = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} \qquad (1)$$

En outre, la surface S du quadrilatère est égale à la somme des aires des deux triangles ABD, BCD, donc on a
$$ad \sin A + bc \sin B = 2S. \qquad (2)$$

Élevons les deux membres de chacune des équations (1) (2) au carré, puis ajoutons les premiers et les seconds membres : il viendra
$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos (A + C) = 4S^2 + \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2,$$
ou
$$(ad + bc)^2 - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2 = 4S^2 + 4abcd \cos^2 \frac{1}{2}(A + C).$$

Le premier membre de cette égalité est le carré du double de la surface Σ du quadrilatère inscriptible dont les côtés sont a, b, c, d : donc
$$S^2 = \Sigma^2 - abcd \cos^2 \frac{1}{2}(A + C)$$

16. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD *inscrit dans un cercle* O, *on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur rencontre. Soient* E *le point où se coupent* AB *et* CD, F *le point où se coupent* BC *et* DA; *ayant tiré les droites* OD, OE, OF, *on aura*
$$OE \,.\, OF \cos EOF = \overline{OD}^2.$$

En égalant les deux expressions du carré de EF *(fig. 6)* dé-

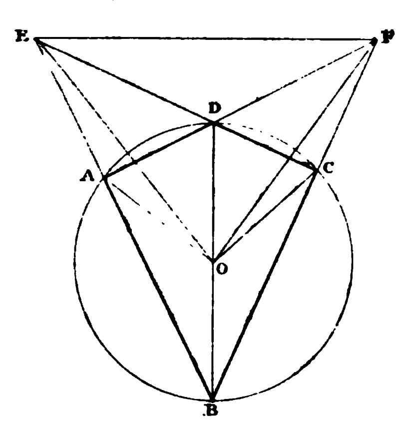
duites des deux triangles EOF, EBF on aura :

$$\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 - 2OE\,.\,OF \cos EOF = \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 - 2BE\,.\,BF \cos B,$$

d'où

$$2OE\,.\,OF \cos EOF \qquad (1)$$

$$= \overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 + 2BE\,.\,BF \cos B.$$



Du triangle BCE on tire

$$\frac{b}{\sin(\pi - B - C)} = \frac{BE}{\sin C}$$

et comme $C = \pi - A$ il viendra

$$BE = \frac{b \sin A}{\sin(A - B)}. \qquad (2)$$

De même du triangle ABF on tire

$$BF = \frac{a \sin A}{\sin(A + B)}. \qquad (3)$$

En posant $OAB = OBA = \varphi$; $OBC = OCB = \psi$ les deux triangles ABO, BCO donneront :

$$\cos\varphi = \frac{a}{2R}; \quad (4) \qquad \cos\psi = \frac{b}{2R}. \quad (5)$$

Les deux triangles OBE, OCF donneront :

$$\overline{OE}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BE}^2 - 2OB\,.\,BE \cos\varphi;$$

$$\overline{OF}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BF}^2 - 2OB\,.\,BF \cos\psi$$

et, en nous rappelant les équations (2) (3) (4) (5) :

$$\overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 = R^2 - \frac{ab \sin A}{\sin(A - B)};$$

$$\overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 = R^2 - \frac{ab \sin A}{\sin (A+B)};$$

donc

$$\overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 = 2R^2 \frac{2ab \sin^2 A \cos B}{\sin(A+B)\sin(A-B)}.$$

On tire encore des équations (2) (3) :

$$2BE \,.\, BF \cos B = \frac{2ab \sin^2 A \cos B}{\sin (A+B) \sin (A-B)}.$$

Il viendra donc:

$$\overline{OE}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{BF}^2 + 2BE \,.\, BF \cos B = 2R^2 \; (6).$$

Enfin des relations (1) (6) on tire :

$$OE \,.\, OF \cos EOF = R^2 = \overline{OD}^2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

17 (R). — *Si les côtés* AB, BC, CD, DA *d'un quadrilatère inscrit forment une progression géométrique, on aura (si* r *est la raison) :*

$$\frac{tg \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{tg \frac{1}{2} (BCD + ABC)} = \frac{(r^2 - 1)^2}{(r^2 + 1)^2}.$$

On connaît la relation:

$$\frac{\sin BCD - \sin ABC}{\sin BCD + \sin ABC} = \frac{tg \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{tg \frac{1}{2} (BCD + ABC)}.$$

On aura $\sin ABC = 2 \sin \frac{1}{2} ABC \cos \frac{1}{2} ABC$

$$= \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd} = \frac{2S}{ab+cd}$$

$$\sin BCD = \frac{2S}{bc+da};$$

donc

$$\frac{tg \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{tg \frac{1}{2} (BCD + ABC)} = \frac{ab+cd-bc-da}{ab+cd+bc+da}.$$

Comme les côtés forment une progression géométrique dont r est la raison on aura :

$$b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$$

et par conséquent,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD + ABC)} = \frac{a^2r + a^2r^3 - 2a^2r^2}{a^2r + a^2r^3 + 2a^2r^2}$$

et en supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur a^2r, on aura :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD - ABC)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BCD + ABC)} = \frac{(r^2 - 1)^2}{(r^2 + 1)^2}.$$

18. — (R) ***Dans tout quadrilatère circonscrit les carrés des sinus des moitiés de deux angles opposés sont entre eux dans le rapport inverse des produits des côtés qui les comprennent.***

En égalant les deux expressions du carré de la diagonale AC déduite des triangles ABC, ACD

on a $\quad a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D,$

ou

$$(a - b)^2 + 2ab\,(1 - \cos B) = (c - d)^2 + 2cd\,(1 - \cos D).$$

Comme le quadrilatère est circonscriptible,

on a $$a + c = b + d$$

ou $$a - b = d - c.$$

Par conséquent, l'équation précédente devient

$$4ab \sin^2 \frac{1}{2} B = 4cd \sin^2 \frac{1}{2} D$$

ou

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{\sin^2 \frac{1}{2} D} = \frac{cd}{ab}.$$

Remarque. — La relation démontrée est vraie aussi quand le quadrilatère n'est pas convexe ; car alors on a (*) :

$$a - c = b - d$$

et $$a - b = c - d,$$

et la démonstration précédente ne subit aucune altération.

(*) *Steiner*, *Journal de Crelle*, XXXII, p. 2[illegible]5.

19. — (R) *Dans tout quadrilatère, la somme des carrés de deux côtés opposés diminuée de la somme des carrés des deux autres côtés est égale au double du produit des diagonales par le cosinus de l'angle compris.*

Si O est l'intersection des diagonales, posons AOB = COD = α.

Les triangles AOB, COD donnent

$$a^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2AO \cdot BO \cos(\pi - \alpha);$$
$$c^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2CO \cdot DO \cos(\pi - \alpha)$$

donc
$$a^2 + c^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 + 2(AO \cdot BO + CO \cdot DO) \cos\alpha$$

de même
$$b^2 + d^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2(BO \cdot CO + DO \cdot AO) \cos\alpha.$$

En retranchant la seconde égalité de la première, on a

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(AO \cdot BO + CO \cdot DO + BO \cdot CO + DO \cdot AO) \cos\alpha,$$
$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(AO + OC)(BO + OD) \cos\alpha = 2AC \cdot BD \cos\alpha, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. — La même proposition s'applique à un quadrilatère non convexe; la démonstration en est tout à fait analogue.

20. — (W) *Étant données les cordes* a, b, c *de trois arcs de cercles adjacents* AB, BC, CD, *dont la somme est égale à une demi-circonférence, trouver l'équation qui donne le rayon.*

Soit O le centre de la circonférence, tirons OB, OC et posons

$$AOB = 2\varphi, \quad BOC = 2\psi, \quad COD = 2\omega.$$

Ces angles sont liés par la relation

$$\varphi + \psi + \omega = \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Le triangle isoscèle AOB donne

$$a = 2R \sin\varphi$$

d'où
$$\sin\varphi = \frac{a}{2R}.$$

De même
$$\sin\psi = \frac{b}{2R}; \quad \sin\omega = \frac{c}{2R}.$$

Il s'ensuit que

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R};\quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}.$$

Or, de l'équation (1),

il vient : $\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \sin\omega$;

donc, $$\frac{\sqrt{(4R^2 - b^2)(4R^2 - a^2)}}{4R^2} - \frac{ab}{4R^2} = \frac{c}{2R}.$$

En élevant au carré après avoir isolé le radical, on aura :

$$16R^4 - 4(a^2 + b^2)R^2 + a^2b^2 = 4c^2R^2 + 4abcR + a^2b^2$$

et supprimant le facteur commun $4R$, on a enfin

$$4R^3 - (a^2 + b^2 + c^2)R - abc = 0,$$

qui est l'équation cherchée.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

Si dans un tétraèdre deux arêtes opposées AC, BD *sont perpendiculaires entre elles, on aura*

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2,$$

et réciproquement. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

L'arête BD étant perpendiculaire à AC, on peut, par BD, mener un plan perpendiculaire à AC ; ce plan coupera AC en un point I, tel que IB et ID sont perpendiculaires à AC.

On aura par suite

$$BC^2 - AB^2 = CI^2 - AI^2$$
$$DC^2 - DA^2 = CI^2 - AI^2.$$

On en tirera facilement en égalant les premiers membres.

$$BC^2 + DA^2 = AB^2 + DC^2.$$

Réciproquement, de cette égalité on tire

$$BC^2 - AB^2 = DC^2 - DA^2.$$

Si, du point B on abaisse une perpendiculaire sur AC, elle coupera AC en un point I, tel que l'on aura

$$BC^2 - AB^2 = CI^2 - AI^2.$$

Donc, en vertu de l'égalité supposée, on aura

$$DC^2 - DA^2 = CI^2 - AI^2,$$

c'est-à-dire que la perpendiculaire menée du point D sur AC tombera au même point I. Par suite, BD sera dans un plan perpendiculaire à AC; les deux arêtes opposées sont donc rectangulaires.

Corollaire. — *Si* AC *est perpendiculaire à* BD *et que* AB *soit perpendiculaire à* CD, AD *est aussi perpendiculaire à* BC.

En effet, on a, d'après la première hypothèse.

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2.$$

Puis, d'après la seconde hypothèse, on a

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

Donc, on aura

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2,$$

ce qui nous montre que AD et BC sont perpendiculaires.

Démontrer élémentairement que l'on a

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

La formule qui donne sin $3a$ est

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

elle devient en remplaçant a par $\frac{x}{3}$

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3},$$

ce qui donne, puisque l'arc est plus grand que le sinus,

$$4\left(\frac{x}{3}\right)^3 > 3 \sin \frac{x}{3} - \sin x.$$

On aura de même, en remplaçant x par $\frac{x}{3}$ et multipliant les deux membres de l'inégalité par 3,

$$4 \cdot 3\left(\frac{x}{3^2}\right)^3 > 3^2 \sin \frac{x}{3^2} - 3 \sin \frac{x}{3},$$

puis de même

$$4 \cdot 3^2\left(\frac{x}{3^3}\right)^3 > 3^3 \sin \frac{x}{3^3} - 3^2 \sin \frac{x}{3^2},$$

$$4 \cdot 3^3\left(\frac{x}{3^4}\right)^3 > 3^4 \sin \frac{x}{3^4} - 3^3 \sin \frac{x}{3^3},$$

. . . .

$$4 \cdot 3^{n-}\left(\frac{x}{3^n}\right)^3 > 3^n \sin \frac{x}{3^n} - 3^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}}.$$

Ajoutons ces inégalités membre à membre, en supposant n infini. Le premier membre est la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $4\left(\frac{x}{3}\right)^3$, et la raison $\frac{1}{3^2}$. On a donc pour ce premier membre, tout calcul fait,

$$\frac{x^3}{6}.$$

Le second membre devient

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x.$$

Le premier terme peut s'écrire

$$x \sin \frac{x}{3^n} : \frac{x}{3^n};$$

il se réduit donc à x; et on a bien

$$\frac{x^3}{6} > x - \sin x.$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Problème. — *Trouver élémentairement le minimum de*

$$x^p + \frac{1}{x^q}.$$

Lemme. — Lorsque l'on a $m > n$ et $x - y = a$, l'expression $\frac{x^m}{y^n}$ passe par un minimum pour $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

En effet l'inverse de cette expression, ou $\frac{y^n}{x^m}$, peut s'écrire, en posant $m = n + p$,

$$\left(\frac{x-a}{x}\right)^n \times \frac{1}{x^p},$$

ou

$$a^n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)^n \times \frac{1}{x^p}.$$

Cette quantité est un produit de puissances de facteurs dont la somme est constante; donc on aura un maximum

quand on aura $$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{n} = \frac{\frac{1}{x}}{p}$$

ou $$\frac{x - a}{an} = \frac{1}{p},$$

ou enfin $$\frac{y}{n} = \frac{a}{p} = \frac{a + y}{n + p} = \frac{x}{m}.$$

Par conséquent, pour les mêmes valeurs de x et y, la fraction proposée passera par un minimum.

Ce lemme établi, remarquons que la quantité proposée

peut s'écrire: $$\frac{x^m + 1}{x^q},$$

en posant $m = p + q$.

Élevons le tout à la puissance m, et remarquons que l'on a $(x^q)^m = (x^m)^q$.

Nous avons à chercher le minimum de l'expression
$$\frac{(x^m + 1)^m}{(x^m)^q}.$$

Ce minimum a lieu, d'après le lemme précédent, lorsque

l'on a: $$\frac{x^m + 1}{m} = \frac{x^m}{q} = \frac{1}{p}.$$

On en tire: $$x^m = \frac{q}{p}.$$

QUESTION 277

Solution par M. Andrieux, élève au Lycée Corneille, Rouen.

Deux circonférences roulent sur une ligne droite AB, *une troisième circonférence de même rayon que les deux autres leur est constamment tangente; pour quelle position des trois circonférences l'aire du pentagone ayant pour sommets les trois centres et les deux points de contact sera-t-elle maxima?*

Soient E et D les deux circonférences qui roulent sur la

droite AB, et O la troisième circonférence qui leur est constamment tangente et qui a même rayon. On peut supposer une des deux premières fixe et les deux autres mobiles. Soit ACDOE, le pentagone maximum. Soient AC = ED = x, OH = y la perpendiculaire abaissée de O sur ED. La surface du pentagone est :

$$\frac{xy}{2} + Rx \text{ ou } \frac{x}{2}(2R + y).$$

Puisque les trois circonférences ont même rayon, OE = OD et le triangle EOD est isoscèle ; alors

$$\overline{OE}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{GH}^2,$$

ou

$$4R^2 = y^2 + \frac{x^2}{4};$$

d'où

$$\frac{x}{2} = \sqrt{4R^2 - y^2},$$

et l'expression de la surface devient

$$\sqrt{4R^2 - y^2}\,(2R + y),$$

Expression qui sera maximum en même temps que

$$(2R + y)^3 (2R - y).$$

Ce produit de deux facteurs dont la somme est constante sera maximum quand

$$\frac{2R + y}{3} = 2R - y;$$

d'où

$$y = R.$$

Donc le maximum a lieu lorque la circonférence O est tangente à la ligne des centres des deux premières. Si $y = R$, $x = 2R\sqrt{3}$, c'est-à-dire est le double du côté du triangle équilatéral inscrit. De là une construction facile, et la surface maxima est $3R^2\sqrt{3}$, c'est-à-dire équivalente à la surface du triangle équilatéral circonscrit que l'on obtient sur la figure en menant AK et CL qui, prolongées, se coupent en I à l'extrémité du diamètre OI.

NOTA : Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saulnier; Chrétien, au Havre; H. Bourget, à Aix; Harel, école Albert-le-Grand, (Arcueil); Hamon, au Mans; Daguillon, Lapareillé, lycée Henri IV; Gobert, au collège Chaptal; Latallerie, à Saint-Dier (Puy-de-Dôme); Tinel, à Rouen. Callon Marit, lycée Louis-le-Grand; Capelle, Davoine, Tison, Morchipont, à Tourcoing.

QUESTION 270

Solution par M. A. Joly, élève au Lycée de Tarbes.

Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et le produit d'un des côtés inconnus par la somme ou la différence de ces deux côtés.

Données a, A, $b(b+c)=m^2$.

De la relation $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

on tire $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

d'ou $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$, $b+c=\dfrac{2a\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin A}$.

Par suite, en multipliant ces deux égalités membre à membre :

$$m^2=\frac{2a^2\cos\dfrac{A}{2}\sin B\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin^2 A}$$

$$=\frac{a^2\cos\dfrac{A}{2}\left[\sin\dfrac{3B-C}{2}+\cos\dfrac{A}{2}\right]}{\sin^2 A},$$

expression qui peut s'écrire

$$4m^2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=a^2\sin\frac{3B-C}{2}+a^2\cos\frac{A}{2}.$$

On en déduit

$$\sin\frac{3B-C}{2}=\frac{\cos\dfrac{A}{2}\left[4m^2\sin^2\dfrac{A}{2}-a^2\right]}{a^2}.$$

Pour que l'on puisse accepter cette valeur il faut qu'elle vérifie les inégalités

$$-1<\frac{\cos\dfrac{A}{2}\left[4m^2\sin^2\dfrac{A}{2}-a^2\right]}{a^2}<1,$$

qui se réduisent aux deux suivantes :

$$\cos\frac{A}{2} > 0, \quad m^2 < \frac{a^2}{8\sin^2\frac{A}{u}\cos\frac{A}{2}}.$$

La première est toujours vraie.

Si ces conditions sont remplies, on obtiendra au moyen des tables deux angles β et β', supplémentaires l'un de l'autre, pour $3B - C$. On aura donc le système suivant

$$B + C = \alpha$$
$$3B - C = \beta \quad \text{ou } 3B - C = \beta';$$

on en conclut

$$B = \frac{\alpha + \beta}{4} \qquad C = \frac{3\alpha - \beta}{4}$$
$$B_1 = \frac{\alpha + \beta'}{4} \qquad C_1 = \frac{3\alpha' - \beta'}{4},$$

au moyen des relations (A) on calculera b, b', c, c' et par suite S.

Si au lieu de prendre $b(b + c) = m^2$ on avait posé $b(b - c) = m^2$, $c(b + c) = m^2$, $c(b - c) = m^2$ la marche à suivre pour résoudre le problème eût été la même.

NOTA. — MM. Collod, de Bellay, Dupuy de Grenoble ont résolu la même question.

QUESTION 282

Solution par M. ANDRIEUX, élève au lycée de Rouen.

Résoudre un triangle dont on donne un élément linéaire (côté, bissectrice...) sachant en outre :

1° Que le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier ;

2° Que le produit des trois hauteurs est un multiple du produit des trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés. (Geoffroy.)

D'après les conditions de l'énoncé on a :

$$\frac{h^2}{BD \cdot DC} = m.$$

$$h \,.\, h' \,.\, h'' = n \,.\, BD \,.\, CG \,.\, AE.$$

Or $BD = c \cos B$, $CD = b \cos C$ . . . .

on a donc : $$\frac{h^2}{bc \cos B \cos C} = m. \qquad (1)$$

$$hh'h'' = nabc \cos A \cos B \cos C \qquad (2)$$

de cette dernière relation on tire :

$$bc \cos B \cos C = \frac{hh'h''}{na \cos A}$$

ou en substituant dans (1) il vient :

$$\frac{na \cos A}{h'h''} = m. \qquad (3)$$

Or $ah = bh' = ch''$,

dès lors $a^2h^2 = bch'h''$

d'où $h'h'' = \frac{a^2h^2}{bc}$.

Substituant dans (3) il vient :

$$\frac{nbc \cos A}{ah} = m.$$

or $h = c \sin B$,

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

dès lors $$\frac{na \sin B \cos A}{a \sin A \sin B} = m.$$

par suite, $\operatorname{tg} A = \frac{n}{m}$

De plus $h = c \sin B$,
$h' = a \sin C$,
$h'' = b \sin A$.

Donc $h.h'.h'' = abc \sin A \sin B \sin C$.

Comparant cette relation à l'égalité (2) on voit que :

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = n$$

et comme $A + B + C = 180°$

on a en outre

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = n.$$

d'où $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = n - \frac{n}{m}$

et $\operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C = m.$

On peut dès lors calculer les trois angles. Car tg B et tg C sont racines de l'équation :

$$X^2 - \left(n - \frac{n}{m}\right)X + m = 0. \qquad (4)$$

Pour que tg B et tg C soient réelles, on doit avoir :

$$\frac{\left(n - \frac{n}{m}\right)^2}{4} - m > 0$$

ou

$$n > \frac{2m\sqrt{m}}{m-1}.$$

Si cette condition est remplie, tg B et tg C seront positives, car la somme des racines de (4) est positive, les nombres n et m étant entiers.

Connaissant les angles du triangle on le résoudra facilement, puisqu'on donne un de ses éléments linéaires. On est ramené à un des problèmes connus.

ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE 1880

Mathématiques.

Définir le maximum et le minimum d'une quantité dont la grandeur dépend d'une seule variable. Exposer la théorie des questions de maximum et de minimum qui dépendent du second degré, et appliquer cette théorie aux trois exemples suivants de fonctions dont la variable est x :

1° $$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 1}$$

2° $$x - 1 + \sqrt{x+1}$$

3° $$x^m (a - x)^n,$$

m et n étant entiers et positifs.

Trigonométrie.

Dans un quadrilatère ABCD, le côté AB a une longueur de 6 toises, et le côté BC une longueur de 8 toises. Les arcs qui mesurent les angles A, B, C de ce polygone ont des longueurs dont les rapports avec leur rayon valent respectivement :

1,11724695
1,85247334
1,48997357.

On demande de calculer en mètres, avec 7 figures, la distance du centre de gravité du quadrilatère à la diagonale BD.

SUR LA SURFACE DU TRIANGLE POLAIRE
D'UN TRIANGLE DONNÉ

Par M. **Ibach**, étudiant à la Faculté des sciences de Marseille.

1. — *Trouver une expression de la surface d'un triangle dont on donne les équations des côtés.*

Soient x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 les sommets du triangle

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

dont la surface est S.

On a $$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En portant dans cette équation les valeurs de x_1y_1 ... tirées des équations des côtés combinées deux à deux, j'obtiens

$$(a_1b_2)(a_2b_3)(a_3b_1)\ .\ 2S = \begin{vmatrix} (b_1c_2) & (c_1a_2) & (a_1b_2) \\ (b_2c_3) & (c_2a_3) & (a_2b_3) \\ (b_3c_1) & (c_3a_1) & (a_3b_1) \end{vmatrix}.$$

Le deuxième membre n'est autre que le réciproque du déterminant D des équations des côtés.

On a donc $$2S = \frac{D^2}{(a_1b_2)(a_2b_3)(a_3b_1)} \qquad (1)$$

2. — Par un calcul analogue au précédent on trouverait que le volume du tétraèdre déterminé par les quatre équations des faces étant V, on aurait

$$6V = \frac{D^3}{P}$$

P étant le produit des mineurs correspondant à la dernière colonne.

3. — *Trouver une expression de la surface du triangle polaire d'un triangle donné.*

Soient $(x_1y_1z_1)(x_2y_2z_2)(x_3y_3z_3)$ les coordonnées des sommets du premier triangle dont la surface est S, Σ la surface du triangle polaire, $U = 0$ l'équation de la conique auxiliaire.

Les équations des côtés du triangle polaire sont:

$$x\frac{dU}{dx_1} + y\frac{dU}{dy_1} + z\frac{dU}{dz_1} = 0.$$

$$x\frac{dU}{dx_2} + y\frac{dU}{dy_2} + z\frac{dU}{dz_2} = 0.$$

$$x\frac{dU}{dx_3} + y\frac{dU}{dy_3} + z\frac{dU}{dz_3} = 0.$$

J'applique à ces équations la formule obtenue (Probl. I).

$$2\Sigma = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx_1} & \frac{dU}{dy_1} & \frac{dU}{dz_1} \\ \frac{dU}{dx_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}^2}{P}$$

P étant encore le produit des mineurs correspondant a la dernière colonne. Soit:

$$U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

en remplaçant les symboles par leurs valeurs :

$$2\Sigma = \frac{\begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + Dz_1 & Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 & Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 \\ Ax_2 + By_2 + \cdots & Bx_2 \ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}^2}{P}$$

Je considère en outre les égalités

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

et le discriminant Δ de U

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

En faisant le produit de ces deux déterminants j'obtiens précisément le numérateur de la valeur précédente de

2Σ. Cette valeur est donc :

$$2\Sigma = \frac{4S^2\Delta^2}{P}$$

ou

$$\Sigma = \frac{2S^2\Delta^2}{P} \qquad (2)$$

forme que l'on pouvait obtenir *a priori*.

Remarque I. — La formule précédente donnant la surface du triangle polaire d'un triangle, permettra de même d'obtenir la surface du polygone polaire d'un polygone quelconque.

Remarque II. — La formule précédente permettra aussi de donner la surface d'un triangle inscrit ou circonscrit à une conique.

Remarque III. — Lorsque le premier triangle est autopolaire par rapport à U, S = Σ, on a donc :

$$S = \frac{D}{2\Delta^2}$$

en désignant par D la valeur de P transformée.

4. — En faisant un calcul analogue au précédent, on trouverait de même une expression du volume du tétraèdre polaire d'un tétraèdre donné par rapport à une quadrique U.

Si Θ est ce volume :

$$\Theta = \frac{24V^3\Delta^3}{P} \qquad (3)$$

P étant le produit des déterminants :

$$\begin{Vmatrix} \frac{dU}{dx_1} & \frac{dU}{dy_1} & \frac{dU}{dz_1} \\ \frac{dU}{dx_2} & \frac{dU}{dy_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

On fera au sujet de cette formule des remarques analogues à celles faites sur la formule (2). En particulier, la surface d'un tétraèdre autopolaire sera de la forme :

$$\frac{P}{24 \cdot \Delta^3} = V^2.$$

5. — Sur l'expression (2) on peut trouver un certain nombre de théorèmes relatifs au rapport des surfaces S et Σ. Je me contenterai d'indiquer le suivant :

Théorème. — *Si une conique pivote autour de son centre et que le discriminant de la partie du second degré de son équation reste constamment égal au carré du terme constant, les triangles polaires d'un triangle donné ont une surface constante.*

Je cherche la forme du produit P de mineurs, c'est le produit des mineurs

$$\begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + Dz_1 & Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 \\ Ax_2 + \dots & Bx_2 + Cy_2 \dots \\ Ax_3 \dots & \dots \end{vmatrix}$$

La forme de chacun de ces mineurs est

$$(AC - B^2)(x_2y_1) + (AE - BD)(x_1z_2) + (CD - BE)(z_1y_2) \dots$$

Si on suppose que la conique est rapportée à son centre, D et E sont nuls et le produit P devient

$$(AC - B^2)^3(x_1y_2)(x_2y_3)(x_3y_1).$$

L'expression (2) devient donc

$$\Sigma = \frac{2S^2\Delta^2}{(x_1y_2)(x_2y_3) \dots (AC - B^2)^3}$$

or, dans ce cas $\Delta = F(AC - B^2)$

donc $$\Sigma = \frac{2S^2F^2}{(x_1y_2) \dots (AC - B^2)};$$

mais si $AC - B^2 = F^2$

$$\Sigma = \frac{2S^2}{(x_1y_2) \cdot (x_2y_3)(x_3y_1)}$$

et le théorème est démontré.

Remarque. — Si $B = 0$, la conique est rapportée à un système de diamètres conjugués. Soit donc a et b les abscisses et les coordonnées des points de rencontre

$$Ax^2 + Cy^2 + F^2 = 0$$

avec les axes $a^2 = \frac{F^2}{A}$ $b^2 = \frac{F^2}{C}$

d'où $$a^2b^2 = \frac{F^4}{AC};$$

et comme $AC = F^2$, $a^2b^2 = F^2$, $ab = \pm F$

d'où l'on déduit que ;

Lorsqu'une conique est constamment rapportée à un système de diamètres conjugués et que le produit des longueurs des demi-axes est constant, la surface du triangle polaire d'un triangle donné est constante.

On pourrait faire sur la formule (3) des remarques analogues.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Par M. **Haure**, élève au Lycée Louis-le-Grand.

On donne deux coniques C_1 C_2, *et on prend les polaires* P_1 P_2 *d'un point* p *de leur plan. Elles se coupent en* P. *Lieu des points* P *quand* p *décrit une courbe du plan.*

Considérons le faisceau de coniques passant par les points (C_1, C_2). On sait que :

Le triangle formé par les centres des sécantes communes est autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau.

Les polaires d'un point quelconque, relatives à ces coniques, passent par un même point qui est dit le conjugué de l'autre. (Chasles, *Sect. con.* 308.)

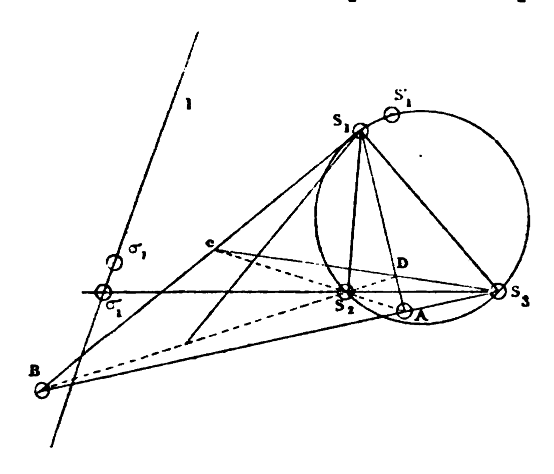
Si un point p décrit une droite l, son conjugué P décrit une conique. — Cette courbe est aussi le lieu des pôles de la droite l relatifs aux coniques. — Elle est circonscrite au triangle autopolaire commun. (Chasles, *loc. cit.* 309).

Remarquons que la tangente au sommet S_1 du triangle autopolaire est la polaire du point σ_1, où la droite l rencontre le côté S_2 S_3, par rapport à l'angle (AS_1B).

En effet, considérons le point σ'_1 infiniment voisin de σ_1 sur l; son conjugué S'_1 est infiniment voisin de S_1 sur la conique et la polaire de σ'_1 par rapport à l'angle (AS_1B) qui fait partie du faisceau sera la droite $S_1S'_1$. Donc à la limite, la polaire de σ_1 est tangente en S_1 à la conique.

Cela posé, remarquons que le problème proposé revient à chercher le lieu du conjugué P, du point p quand ce dernier

décrit une courbe. Le problème a été résolu dans le cas de la droite. Nous avons vu que le lieu de P est une conique. Nous dirons que la droite et la conique sont correspondantes.



I. — Cela posé, supposons que le point p décrive une courbe σ d'ordre m. Le point P décrira une courbe Σ que je coupe par une conique circonscrite au triangle autopolaire commun. A cette conique L correspond une droite l et une seule; en effet, prenons deux points P_1, P_2 sur la conique et déterminons leurs conjugués p_1, p_2. La droite p_1 p_2 est déterminée et sa conique correspondante, passant par (S_1, S_2, S_3, P_1, P_2), coïncidera avec la conique L. Cette droite que je désigne par l, rencontre le lieu des points p en m points, auxquels correspondent sur la conique m points de la courbe Σ. La droite S_2 S_3 coupe la courbe σ en m points qui ont pour conjugué le point S_1. Donc les points S_1 S_2 S_3 appartiennent à Σ avec le degré m de multiplicité. Donc la conique rencontre la courbe Σ en $m + 3m = 4m$ points. Donc la courbe Σ est d'ordre $2m$.

II. *Tangente en un point.* — Soit l une sécante rencontrant la courbe σ en deux points voisins p et p'. Soient leurs conjugués P, P', ils se trouvent à l'intersection de Σ et de la conique correspondante. Faisons tourner la sécante l autour

de p, de manière que le point p' vienne en p. La conique se déformera en restant circonscrite au quadrilatère (S_1, S_2, S_3, P) jusqu'à ce que P' vienne en P. La conique devient tangente au point P à Σ et correspond à la tangente en p à σ. On peut donc construire la tangente en P à Σ.

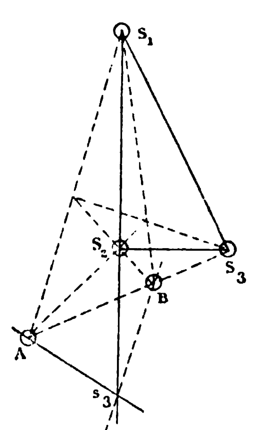
Si la tangente en p a un contact d'ordre μ avec σ, la conique correspondante aura un contact d'ordre μ avec la courbe Σ.

Un point de degré r de multiplicité dans σ possède r tangentes, auxquelles correspondent dans Σ, r coniques passant par le conjugué du point multiple. Ce point a dès lors r tangentes et est du degré r de multiplicité. Remarquons que les points A, B, C, D, d'intersection, de C_1 et de C_2 sont à eux-mêmes leurs conjugués; s'ils appartiennent à la courbe σ, ils appartiendront aussi à Σ avec le même degré de multiplicité.

Cherchons les tangentes en ces points.

Prenons le point A, par exemple, et cherchons la tangente en ce point à la conique correspondant à une tangente As_3 à la courbe σ.

Considérons les points A et s_3; la conique est le lieu des intersections de leurs polaires qui passent toutes par les points A et S_3. Considérons la droite S_3A comme appartenant au faisceau S_1 et cherchons le rayon homologue dans le faisceau A. S_3A est la polaire de s_3 par rapport à une certaine conique du faisceau. Cette conique passant par les points A et B est tangente à s_3 A, s_3 B. Par rapport à cette conique la polaire de A est la droite AT.



C'est le rayon homologue de S_3A et par conséquent la tangente cherchée. Il en résulte que si Σ et σ passent par les points (A, B, C, D), elles sont tangentes en ces points.

On verrait facilement que les tangentes en S_1 S_2 S_3 sont

les polaires des points où σ rencontre les côtés opposés du triangle autopolaire.

Cas de décomposition. — Si la courbe σ est irréductible et ne passe pas par un point S, la courbe Σ est irréductible. Si la courbe σ passe r fois par S_1, pour chaque point S_1, le conjugué est indéterminé sur $S_2 S_3$.

Donc S_2S_3 fait r fois partie de Σ. Si σ passe r fois par S_1, S_2, S_3, Σ se décompose en r fois chaque côté du triangle et une courbe de degré $2m - 3r$.

Faisons en particulier $r = \frac{m}{3}$. Le degré est $2m - m = m$.

Donc une cubique circonscrite au triangle autopolaire se transforme en une autre cubique. Si en outre elle passe par les points ABCD, sa transformée aura avec elle sept points communs et mêmes tangentes en quatre de ces points. Donc, en général ces deux courbes coïncideront. Cette cubique sera donc une sorte d'anallagmatique dans la transformation que nous étudions. Telle est entre autres la cubique lieu des points de contact des tangentes issues d'un point fixe, aux coniques du faisceau.

III. *Asymptotes.* — Les points à l'infini de la courbe Σ correspondent aux points communs à σ et au lieu des centres de coniques. Ce lieu est une conique dite des neuf points. On construira l'asymptote comme la tangente en un point. Remarquons que la tangente au point considéré de σ rencontre la conique des neuf points en un second point qui donne l'autre asymptote de la conique correspondante.

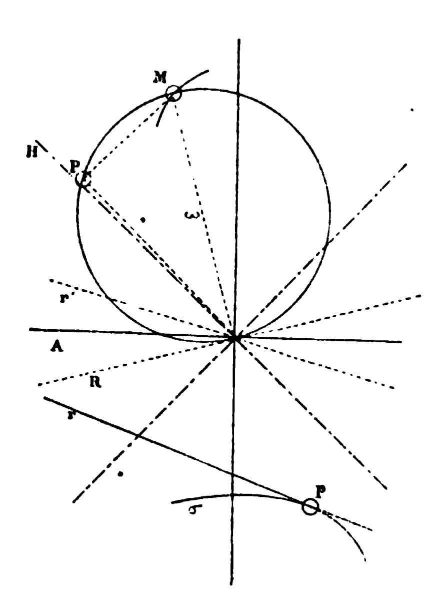
Donc si σ est tangente à la conique des neuf points, les deux asymptotes de la conique correspondante à la tangente à σ sont confondues. La conique est une parabole et Σ a une branche parabolique.

On peut avoir directement la direction asymptotique. Considérons la tangente à la conique des neuf points, au point où elle rencontre la courbe σ. Cette tangente est la polaire du point conjugué à l'infini par rapport à une conique du faisceau. Elle passe donc par le centre de la conique.

Cette conique a donc son centre au point considéré, et la direction asymptotique est le diamètre conjugué de la tangente par rapport à cette même conique.

Application. — Considérons deux hyperboles équilatères concentriques. Toutes les coniques passant par leurs points d'intersection sont concentriques, puisque la droite de l'infini fait partie du triangle autopolaire commun. De plus ce sont des hyperboles équilatères. En effet ces coniques déterminent une involution sur la droite de l'infini, et le faisceau des asymptotes ayant pour base cette division est involutif. Il a deux couples de rayons rectangulaires. Donc tous les autres couples de rayons homologues sont rectangulaires et les hyperboles sont équilatères.

Les sécantes communes réelles sont rectangulaires comme faisant partie du faisceau. Les deux sommets du triangle autopolaire, autres que le centre commun O, sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite de l'infini, c'est-à-dire, les points cycliques I et J.



De là résulte que la transformée d'une droite est une conique passant O.I.J. c'est donc un cercle. Si nous considérons les tangentes à la courbe σ, Σ sera une enveloppe de cercles passant par un point fixe. C'est une *podaire*. Soit ω le cercle correspondant à la tangente *pr* à la courbe σ. Soit P le conjugué de *p* et M le point diamétralement opposé au point O. La droite PM sera tangente en M à une courbe dont Σ est la podaire. Tout

revient à trouver le lieu de M. La tangente OR est la polaire du point à l'infini par rapport à (OA, OB). Donc OR et la parallèle or' à pr sont conjuguées et également inclinées sur OA. La droite OM est la polaire du point à l'infini de pr par rapport à une certaine hyperbole du faisceau. Par rapport à cette même hyperbole, la droite or' est conjuguée de OM.

Donc les asymptotes de l'hyperbole sont bissectrices des angles de Or' avec OM. Soit OH une de ces asymptotes.

Soit α l'angle de Or' avec OA.

On a $$r'OA = ROA = \alpha$$

MOR est droit.

Donc $$MOr' = 90^\circ - 2\alpha$$

et $$HOr' = \frac{MOr'}{2} = 45^\circ - \alpha$$

$$HOA = HOr' + r'OA = 45^\circ - \alpha + \alpha = 45^\circ.$$

Donc, l'hyperbole cherchée est une hyperbole fixe ayant pour axes les sécantes communes OA, OB.

D'un autre côté, le pôle de pr par rapport à cette hyperbole se trouve sur le cercle ω. Il se trouve, en outre, sur OM. Donc, il se trouve en M. Le point M étant le pôle de pr par rapport à l'hyperbole H, décrit la polaire réciproque de σ par rapport à cette même hyperbole. Donc Σ est la podaire de la polaire réciproque de σ par rapport à H.

Supposons que σ soit un cercle. Il passe par I et J. Donc Σ se décompose en OJ et OI et un cercle, à condition que σ ne passe pas par O. Si σ passe par O, on obtient OI, OJ, la droite de l'infini et une droite. Dans le premier cas, la polaire réciproque de σ est une conique de foyer O et dans le second une parabole de foyer O.

Il est à remarquer que cette transformation présente de nombreuses analogies avec l'inversion qui aurait pour pôle le point O.

En effet :

1° Un cercle passant par O donne une droite;

2° Un cercle quelconque donne un cercle;

3° Une droite donne un cercle passant par O;

4° Une conique donne une podaire de conique;

5° L'inverse d'une figure est la podaire de sa polaire réciproque prise par rapport au cercle qui définit l'inversion.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 80.)

Méthode générale pour passer de l'équation d'une ligne en coordonnées cartésiennes à l'équation de cette ligne en coordonnées tangentielles, et inversement.

Pour passer de l'équation $F(x,y) = 0$ d'une ligne en coordonnées cartésiennes à l'équation $f(u,v) = 0$ de cette même ligne en coordonnées tangentielles, il suffit évidemment de former la condition qui doit exister entre les quantités u et v de l'équation $ux + vy - 1 = 0$ pour que cette équation représente une tangente de la courbe $F(x, y) = 0$.

(x,y) étant le point de contact d'une de ces tangentes, la droite a pour équation en coordonnées homogènes :

$$XF'_x + YF'_y + ZF'_z = 0.$$

L'identification de cette équation avec l'équation $uX + vY - Z = 0$, ou mieux avec l'équation homogène $uX + vY + wZ = 0$ donne les deux relations

$$\frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{w}$$

qui, jointes à la condition $F(x,y,z) = 0$, permettent d'éliminer x et y (en faisant $z = 1$), et donnent entre u, v et w la relation cherchée. Si l'on ne veut conserver que u et v, on fera $w = 1$, et si l'on veut, en outre, avoir la condition relative à la forme $ux + vy - 1 = 0$, et non à la forme $ux + vy + 1 = 0$, on donnera à w la valeur $- 1$.

La difficulté du calcul se réduit un peu si l'on remarque que le point (x,y) appartenant à la courbe et à sa tangente en ce point, on peut remplacer la condition $F(x,y,z) = 0$ par la

condition équivalente $ux + vy + wz = 0$, ce qui résulte d'ailleurs du théorème d'Euler ; car on a :

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = mF(x, y, z) = 0.$$

relation qui, en vertu des égalités de rapports

$$\frac{F'_x}{u} = \frac{F'_y}{v} = \frac{F'_z}{w}$$

devient : $$ux + vy + wz = 0.$$

Soit, par exemple, à calculer l'équation tangentielle de la cissoïde de Dioclès, dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires : $$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$$
c'est-à-dire $$x(x^2 + y^2) - 2ay^2z = 0$$
On aura à éliminer x et y entre les relations :

$$\frac{3x^2 + y^2}{u} = \frac{2xy - 4ay}{v} = \frac{-2ay^2}{w}$$

et $$ux + vy + w = 0$$
qui peuvent s'écrire :

$$w(3x^2 + y^2) + 2ay^2u = 0 \qquad (1)$$
$$(x - 2a)w + ayv = 0 \qquad (2)$$
$$ux + vy + w = 0. \qquad (3)$$

On tire de (2) et (3) :

$$x = \frac{3aw}{w - au} \qquad y = -\frac{w(w + 2au)}{v(w - au)}$$

et, en reportant dans (1) :

$$w[27a^2w^2v^2 + w^2(w + 2au)^2] + 2auw^2(w + 2au)^2 = 0$$

En faisant $w = 1$, il vient :

$$27a^2v^2 + (1 + 2au)^2 + 2au(1 + 2au)^2 = 0$$

c'est-à-dire $$27a^2v^2 + (1 + 2au)^3 = 0.$$

Eu égard à la forme $ux + vy - 1 = 0$, on aurait :

$$27a^2v^2 + (2au - 1)^2 - 2au(2au - 1)^2 = 0$$

c'est-à-dire

$27a^2v^2 - (2au - 1)^3 = 0$, ou encore $27a^2v^2 + (1 - 2au)^3 = 0.$

Cet exemple montre que l'équation tangentielle d'une courbe est généralement d'une tout autre forme que l'équation cartésienne ; sauf dans des cas tout à fait particuliers, dont l'exemple précédent fait partie, elle est même d'un autre degré que cette dernière ; nous reviendrons sur ce point.

Avant de poursuivre, nous appliquerons encore la méthode

générale à la recherche de l'équation tangentielle générale des coniques, dont l'équation cartésienne homogène est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Il faut éliminer x et y entre les équations

$$\frac{Ax + By + Dz}{u} = \frac{Bx + Cy + Ez}{v} = \frac{Dx + Ey + Fz}{w}$$

et $$ux + vy + wz = 0.$$

En appelant λ la valeur commune des trois rapports précédents, on a

$$\begin{aligned} Ax + By + Dz - u\lambda &= 0, \\ Bx + Cy + Ez - v\lambda &= 0, \\ Dx + Ey + Fz - w\lambda &= 0, \\ ux + vy + wz &= 0. \end{aligned}$$

Ces quatre équations, homogènes et linéaires en x, y, z, λ, admettent des solutions qui ne sont pas toutes simultanément nulles, puisque dans tous les cas l'une d'elles z est égale à l'unité; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le déterminant de leurs coefficients soit nul. L'équation tangentielle homogène des coniques, et relativement à la forme $ux + vy + w = 0$, est donc

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

— Inversement, pour passer de l'équation $f(u, v) = 0$, en coordonnées tangentielles, à l'équation $F(x, y) = 0$ en coordonnées cartésiennes, il faut résoudre un cas du problème des enveloppes.

En effet, puisque $f(u, v) = 0$ est la condition entre u et v pour que la droite $ux + vy - 1 = 0$ soit tangente à la courbe considérée, l'enveloppe de cette droite, quand u et v varient d'une manière continue sous la condition $f(u, v) = 0$, est précisément la courbe dont il s'agit.

Regardons u comme la variable indépendante, le point de rencontre de deux tangentes très voisines sera donné par le système des deux équations

$$ux + vy - 1 = 0$$
$$(u + \Delta u)x + (v + \Delta v)y - 1 = 0$$

Δu et Δv étant liés entre eux par la relation

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) = 0$$

ou bien

$$\Delta u\,[f'_u(u, v) + \omega] + \Delta v\,[f'_v(u, v) + \omega'] = 0$$

Δu et Δv tendant simultanément vers o, le point considéré tend vers une position limite sur la droite $ux + vy - 1 = 0$, et la deuxième équation étant remplacée dans le système par sa différence avec la première, elle devient

$$x \,.\, \Delta u + y \,.\, \Delta v = 0$$

et par conséquent à la limite, on aura le système des quatre équations

$$ux + vy - 1 = 0$$

$$x + y \lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 0$$

$$f'_u(u, v) + \lim \frac{\Delta v}{\Delta u} f_v(u, v) = 0$$

$$f(u, v) = 0$$

Le point limite sur $ux + vy - 1 = 0$ est donc défini par les deux équations : $ux + vy - 1 = 0$

et

$$f'_u(u, v) - \frac{x}{y} f_v(u, v) = 0,$$

ou bien

$$\frac{f'_u(u, v)}{x} = \frac{f'_v(u, v)}{y}$$

Les valeurs de u et v qui répondent à un point particulier étant un certain système de solutions de l'équation $f(u, v) = 0$.

Si donc entre les trois équations

$$ux + vy - 1 = 0$$

$$yf_u(u, v) - xf'_v(u, v) = 0$$

et

$$f(u, v) = 0$$

on élimine les deux paramètres u et v, il restera entre x et y une relation s'appliquant à la succession de tous les points limites définis précédemment; cette relation sera donc l'équation cartésienne de la courbe considérée.

Supposons que l'équation $f(u, v) = 0$ soit algébrique et du degré m, on peut la rendre homogène, comme on le fait en coordonnées rectilignes, en remplaçant u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$; elle prend alors la forme $f(u, v, w) = 0$, d'où l'on

déduit, par le théorème d'Euler

$$uf'_u v, + vf'_v + wf_v = o$$

Écrivant alors la relation

$$\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y}$$

sous la forme $\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{uf'_u + vf'_v}{ux + vy}$,

c'est-à-dire $\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{-wf'_w}{1}$

L'expression $uf'_u + vf'_v$, qui est du degré m, se trouvera ramenée au degré $m - 1$, et le calcul d'élimination de u et v sera quelque peu simplifié.

Cherchons, par exemple, l'équation en coordonnées rectilignes de la courbe dont l'équation tangentielle est

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = o.$$

Nous aurons à éliminer u et v entre cette relation et les équations $\frac{Au + Bv + D}{x} = \frac{Bu + Cv + E}{y}$

et $ux + vy - 1 = o.$

Si nous prenons les formes homogènes

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = o$$

et $ux + vy + wz = o.$

Les relations deviendront

$$\frac{Au + Bv + Dw}{x} = \frac{Bu + Cv + Ew}{y} = \frac{Du + Ev + Fw}{z}.$$

On aura donc, en appelant λ la valeur commune de ces trois rapports,

$$Au + Bv + Dw - \lambda x = o,$$
$$Bu + Cv + Ew - \lambda y = o,$$
$$Du + Ev + Fw - \lambda z = o,$$

avec $ux + vy + wz = o.$

Pour que ces équations admettent, comme cela a lieu, des solutions qui ne soient pas simultanément nulles, il faut et il suffit que le déterminant de leurs coefficients soit nul.

L'équation cherchée sera donc

$$\begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & z \\ x & y & z & o \end{vmatrix} = o$$

Il y a lieu d'observer la forme remarquable de cette équation, qui se déduit de l'équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix} = o, \text{ établie plus haut,}$$

par le simple changement de u, v, w en x, y, z.

C'est encore là un résultat du principe de dualité et un exemple de la facilité avec laquelle l'emploi des coordonnées tangentielles met ce principe en lumière. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces deux équations, dont la réciprocité est si remarquable.

— Pour achever de faire bien comprendre la méthode, considérons encore la courbe dont l'équation tangentielle est $u^3 - av^2 = o$, et proposons-nous de trouver son équation en coordonnées cartésiennes.

Il faut éliminer u et v entre les équations

$$ux + vy + wz = o$$
$$u^3 - av^2w = o$$
$$\text{et } \frac{3u^2}{x} = -\frac{2avw}{y}$$

Mais la dernière donne :

$$\frac{3u^2}{x} = -\frac{2avw}{y} = \frac{3u^3 - 2av^2w}{ux + vy} = \frac{av^2w}{-wz} = -\frac{av^2}{z}$$

d'où l'on tire (en faisant z et $w = 1$) :

$$v = \frac{2}{y} \text{ et } \frac{3u^2}{x} = -\frac{4a}{y^2}, \text{ d'où } u^2 = -\frac{4ax}{3y^2}$$

L'équation cherchée est donc :

$$x\frac{2}{y}\sqrt{-\frac{ax}{3}} + 2 + 1 = o, \text{ ou } y^2 = -\frac{4ax^3}{27}$$

THÉORÈME DE M. LAGUERRE

On sait que si l'on considère l'expression imaginaire $\alpha + \beta i$, on peut représenter cette quantité par un point, en convenant de prendre pour ce point celui dont les coordonnées sont α, β ; les axes étant d'ailleurs rectangulaires.

Ceci posé, considérons l'imaginaire,

$$u = \frac{\alpha + \beta\lambda + i(\alpha' + \beta'\lambda)}{\gamma + \delta\lambda + i(\gamma' + \delta'\lambda)}$$

dans laquelle λ représente *un périmètre réel et variable.* Pour chaque valeur de λ, u prendra la forme $A + Bi$ et si l'on considère le point M, dont les coordonnées sont $x = A$, $y = B$, ce point M décrira un lieu géométrique. *On propose de démontrer que ce lieu est un cercle*; ce théorème a été donné par M. Laguerre.

En multipliant haut et bas la valeur de u parl' expression imaginaire conjuguée du dénominateur, on trouve d'abord :

$$x = \frac{(\alpha + \beta\lambda)(\gamma + \delta\lambda) + (\alpha' + \beta'\lambda)(\gamma' + \delta'\lambda)}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2} \qquad (1)$$

$$y = \frac{(\alpha' + \beta'\lambda)(\gamma + \delta\lambda) - (\alpha + 6\lambda)(\gamma' + \delta'\lambda)}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2} \qquad (2)$$

Il faut éliminer λ entre ces deux équations. A cet effet, multiplions (1) par $(\gamma' + \delta'\lambda)$; et (2), par $(\gamma + \delta\lambda)$; il viendra, après avoir ajouté les deux résultats :

$$x(\lambda' + \delta'\lambda) + y(\gamma + \delta\lambda) = \alpha' + \beta'\lambda. \qquad (3)$$

On trouve de même,

$$x(\gamma + \delta\lambda) - y(\gamma' + \delta'\lambda) = \alpha + \beta\lambda \qquad (4)$$

Il n'y à plus aucune difficulté à éliminer λ entre (3) et (4) et l'on trouve $(x^2 + y^2)(\delta\gamma' - \gamma\delta') + P = o$, équation dans laquelle P désigne une fonction du premier degré en x et y. Les axes étant supposés rectangulaires, cette équation est bien l'équation d'un cercle. Il faut pourtant observer que ce cercle se réduit à la droite $P = o$, quand on suppose $\delta\gamma' - \gamma\delta' = o$.

Sans former explicitement l'équation du cercle, on peut encore démontrer le théorème de la manière suivante :

En ajoutant les carrés de x et y, on obtient

$$x^2 + y^2 = \frac{(\alpha + \beta\lambda)^2 + (\alpha' + \beta'\lambda)^2}{(\gamma + \delta\lambda)^2 + (\gamma' + \delta'\lambda)^2}.$$

Mais le second membre peut se mettre sous la forme

$$Ax + By + C$$

car x, y, $x^2 + y^2$ sont trois fractions rationnelles de la forme

$$\frac{p\lambda^2 + q\lambda + r}{s\lambda^2 + t\lambda + u},$$

$$\frac{p'\lambda^2 + q'\lambda + r'}{s\lambda^2 + t\lambda + u},$$

$$\frac{p''\lambda^2 + q''\lambda + r''}{s\lambda^2 + t\lambda + u};$$

on peut donc poser

$$\frac{p''\lambda^2 + q''\lambda + r''}{s\lambda^2 + t\lambda + u} = \frac{A(p\lambda^2 + q\lambda + r)}{s\lambda^2 + t\lambda + u} + \frac{B(p'\lambda^2 + q'\lambda + r')}{s\lambda^2 + t\lambda + u} + C.$$

Les coefficients A, B, C sont déterminés par les équations

$$Ap + Bp' + Cs = p'',$$
$$Aq + Bq' + Ct = q'',$$
$$Ar + Br' + Cu = r''.$$

L'équation du lieu est donc

$$x^2 + y^2 = Ax + By + C, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

QUESTION D'ALGÈBRE

On demande souvent dans les examens la sommation de la suite,

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

Cette question n'est qu'un cas particulier de la suivante, qui est beaucoup plus étendue :

Sommation d'une suite de la forme

$$x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots + n^p x^n$$

Posons $S_p = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots + n^p x^n$

et prenons la dérivée de S_p par rapport à x ; il vient :

$$S'_p = 1^{p+1} + 2^{p+1} x + 3^{p+1} x^2 + \ldots + n^{p+1} x^{n-1}.$$

Par conséquent :

$xS'_p = 1^{p+1}x + 2^{p+1}x^2 + 3^{p+1}x^3 + \ldots + n^{p+1}x^n$

c'est-à-dire :

$xS'_p = S_{p+1}$.

Cette relation générale permet de calculer S_1 connaissant S_0, puis S_2, connaissant S_1 et par conséquent S'_1 ; ayant S_2, on formera S'_2, ce qui donnera S_3, et ainsi de suite.

Par exemple,

$S_1 = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$

résultera de la relation

$S_1 = xS'_0$

Or,

$$S_0 = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = x\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$$

donc

$$S'_0 = \frac{[(n+1)x^n - 1](x - 1) - (x^{n+1} - x)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$$

Par suite,

$$S_1 = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x - 1)^2}$$

Formant S'_1, on en conclura S_2 par la relation $S_2 = xS'_1$ et ainsi de suite.

SUR L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES

Pour calculer cette équation, on forme habituellement l'équation aux différences des racines, équation que l'on transforme ensuite de manière à obtenir l'équation aux carrés des différences des racines. Il nous paraît sensiblement plus simple d'opérer d'une façon inverse et de calculer directement, comme nous allons le montrer dans le cas du troisième degré, l'équation aux carrés des différences des racines.

1. — Soit $f = x^3 + px + q = 0$
l'équation proposée; x', x'' deux racines de cette équation; y la racine correspondante de l'équation cherchée : de telle sorte que

$$y = (x' - x'')^2$$

ou

$$y = (x' + x'')^2 - 4x'x''$$

soit x, la troisième racine; on aura donc

$$y = x^2 + \frac{4q}{x}.$$

ou

$$x^3 - xy + 4q = 0;$$

d'ailleurs

$$x^3 + px + q = 0$$

et, par différence, $x = \dfrac{3q}{p + y}$.

On obtient ainsi l'équation demandée

$$\frac{27q^2}{(p + y)^3} + \frac{3p}{p + y} + 1 = 0$$

ou enfin

$$\varphi = y^3 + 6py^2 + 9p^2y + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

L'équation f, par un théorème connu, aura toutes les racines réelles, si φ est une équation complète et n'offrant que des variations ; on retrouve ainsi la condition

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

2. — Considérons maintenant le cas le plus difficile de l'équation complète du troisième degré;

$$f = x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

On a toujours $y = (x' + x'')^2 - 4x'x''$

ou

$$y = (a + x)^2 + \frac{4c}{x}$$

c'est-à-dire $x^3 + 2ax^2 + x(a^2 - y) + 4c = 0 \qquad (2)$

Il s'agit maintenant d'éliminer x, entre (1) et (2). Une soustraction donne d'abord :

$$ax^2 + x(a^2 - b - y) + 3c = 0 \qquad (3)$$

D'autre part l'élimination du terme constant entre (1) et (2) conduit à la combinaison,

$$3x^2 + 2ax + (4b - a^2 + y) = 0 \qquad (1)$$

Des équations (3) et (4) et par la règle connue qui sert à éliminer, entre deux équations, un paramètre qui y entre au second degré ;

$$(4ab - a^3 - 9c + ay)^2 = (a^2 - 3b - 3y)$$
$$[y^2 + y(5b - 2a^2) + (a^2 - b)(a^2 - 4b) + 6ac]$$

Développant et simplifiant on a l'équation aux carrés des différences ;

(A) $$y^3 - 2y^2(a^2 - 3b) + y(a^2 - 3b)^2 + H = 0$$

en posant

$$H = 27c^2 + 2ac(2a^2 - 9b) + b^2(4b - a^2)$$

Cette équation donne lieu à plusieurs remarques.

3. — L'équation aux carrés des différences devant être complète et n'offrir que des variations, si f n'a que des racines réelles, on voit d'abord que,

$$a^2 - 3b > 0.$$

Cette relation, entre les trois premiers coefficients, appliquée à l'équation aux inverses, donne, pour les trois derniers coefficients, la condition ;

$$b^2 - 3ac > 0$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant ; théorème qu'on peut établir de bien des façons différentes ;

Lorsqu'une équation du troisième degré a ses racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est toujours plus grand que le triple produit des coefficients voisins.

On peut remarquer pourtant le *cas limite* ; celui où l'on aurait à la fois

$$a^2 = 3b \quad \text{et} \quad b^2 = 3ac.$$

L'équation est alors

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + \frac{a^3}{27} = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 = 0.$$

Les racines sont réelles mais coïncidentes ; l'équation aux carrés des différences se réduit a $y^3 = 0$; c'est ce qu'on vérifie facilement.

4. — Le coefficient de y est lui-même positif ou nul : les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du troisième degré ait ses trois racines réelles, sont donc

$$a^2 - 3b > 0,$$
$$H < 0.$$

Nous allons montrer (*) que ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre et que la seule condition nécessaire et suffisante est $H < 0$.

Posons
$$9c - ab = U \qquad (1)$$
et, dans l'égalité
$$3H = 81c^2 + 6ac(2a^2 - 9b) + 3b^2(4b - a^2),$$
remplaçons c au moyen de l'égalité (1) ; on obtiendra, après des calculs simples et évidents,
$$9H = 3U^2 + 4aU(a^2 - 3b) + 4b(a^2 - 3b)^2.$$
Dans ce trinôme du second degré en U, la quantité soumise au radical est $4(a^2 - 3b)^3$.

Si l'on avait $a^2 - 3b < 0$, les racines de l'équation $H = 0$ seraient imaginaires et H conserverait le signe de son premier terme, le signe +, par conséquent, et l'on ne saurait avoir $H < 0$. En résumé, les deux inégalités
$$H < 0 \quad \text{et} \quad a^2 - 3b < 0$$
sont en contradiction ; et, du moment que $H > 0$, *on a nécessairement*
$$a^2 - 3b > 0.$$

5. — La question que nous venons de résoudre et qui consiste à *faire rentrer les unes dans les autres* des inégalités qu'on pourrait nommer *surabondantes*, pour exprimer ce fait que quelques-unes d'entre elles suffisent et que toutes ne sont pas nécessaires, se présente aussi dans la discussion de l'équation du troisième degré par la méthode de Sturm.

L'équation étant toujours
$$V = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$
on a, pour la suite de Sturm,
$$V_1 = 3x^2 + 2Ax + B$$
$$V_2 = 2(A^2 - 3B)x + AB - 9C$$
$$V_3 = -3(9C - AB)^2 - 4A(9C - AB)(A^2 - 3B) - 4B(A^2 - 3B)^2$$
Les conditions données par cette méthode seraient, comme celles qu'a fournies l'équation aux carrés des différences,
$$A^2 - 3B > 0; \quad V_3 > 0$$
et comme
$$V_3 = -9H$$

(*) Cette question, croyons-nous, a été soulevée aux examens de l'année dernière par M. Marie.

on trouve, par une discussion semblable à celle que nous avons faite sur H, que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation,* $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ *ait ses trois racines réelles et distinctes, est :*

$$27c^2 + 2ac(2a^2 - 9b) + b^2(4b - a^2) < 0.$$

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Géométrie analytique plane.

— On donne l'un des sommets de l'axe focal d'une ellipse, et une extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux. Former l'équation des courbes qui ont ces éléments communs.

— On considère les paraboles ayant une tangente et son point de contact communs, ainsi qu'un point de la tangente au sommet. — Trouver le lieu des sommets de ces courbes.

— Asymptotes de la courbe

$$y = \sqrt[5]{\frac{2x^7 + 3x^6 + \ldots}{4x^2 + 3x - 1}}$$

— On donne une tangente à une parabole, et les points où elle est coupée : 1° par la directrice; 2° par la tangente inclinée à 45° sur l'axe. — On demande l'équation générale de ces paraboles.

— Expliquer *a priori* pourquoi dans la valeur générale du paramètre d'une parabole contenant à son numérateur Δ et $\sin\theta$, et à son dénominateur $A + C - 2B\cos\theta$, le rapport des exposants Δ et de $A + C - 2B\cos\theta$ est $\frac{1}{3}$, et pourquoi $\frac{1}{2}$ est facteur dans ces exposants.

— Lieu des sommets des hyperboles équilatères, ayant un foyer donné et passant par un point donné.

— Lieu du foyer des hyperboles ayant une asymptote et un sommet donné.

— Construire la courbe

$$\rho = \frac{1 - \sin\omega}{1 - 2\cos\omega}$$

— Construire la courbe $y\sqrt{x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$, et étudier cette courbe autour de l'origine.

— Lieu des sommets des paraboles qui ont la directrice et une tangente communes.

— Former l'équation générale des hyperboles ayant comme éléments communs un sommet réel et le point de rencontre de l'une des directrices avec l'une des asymptotes.

— On donne la droite sur laquelle est compté un des diamètres conjugués égaux d'une ellipse, et la grandeur de ce diamètre (mais non sa position) ; on

donne aussi le pied d'une directrice sur l'axe. — Former l'équation de la courbe qui satisfait à ces conditions.

— On forme l'équation générale des paraboles ayant une tangente et l'axe communs, trouver le lieu des contacts des tangentes qui font avec l'axe un angle de 45°.

— Expliquer pourquoi l'équation aux carrés des demi-axes d'une conique est homogène par rapport aux coefficients de l'équation de la courbe, pourquoi $AC - B^2$ est facteur dans les deux premiers termes, et pourquoi Δ est facteur dans les deux derniers.

— Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{1 - \operatorname{tang}^3 \omega}{\operatorname{tang}^2 \omega - 1}$$

— Étant donnée la courbe $y = x^4$, trouver le lieu des milieux des cordes parallèles à la droite $y = 2x$.

— Construire la courbe dont l'équation est

$$x^4 + x^2 y^2 - 6x^2 + y^2 = 0.$$

— Construire la courbe dont un point quelconque a pour coordonnées

$$x = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \qquad y = \frac{t^2 - 1}{2 - t}$$

— Former l'équation générale des hyperboles équilatères passant par un point fixe, et telles que le lieu de leurs centres est un cercle de rayon R, dont on donne le centre.

— Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{1 + \sin \omega}{\cos^2 \omega}$$

— Construire le lieu dont les coordonnées d'un point quelconque sont

$$x = \frac{t}{1 - t} \qquad y = \frac{1}{1 + t}$$

A priori quel sera ce lieu?

Géométrie analytique dans l'espace.

— Étant donnés l'ellipsoïde $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ et le plan $x + 2y + 3z = 0$, former l'équation aux carrés des demi-axes de la section de la surface par le plan, et trouver les directions de ces axes.

— Faire voir *a priori* que le lieu des points où les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe se coupent à angle droit est l'intersection de la sphère de Monge avec l'hyperboloïde.

— Reconnaître la nature de la surface

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zx - 2z = 0$$

par la méthode des contours apparents.

— Lieu des centres des sections faites dans une surface du second ordre par les plans qui passent : 1° par un point fixe; 2° par une droite fixe.

— A quels axes est rapportée la surface $xy = z$?

— Étant donnée l'équation $x^2 - y^2 + yz + z - x = 0$, calculer l'angle des deux génératrices de la surface qui passent à l'origine, et l'équation du plan des deux droites.

— Étudier la surface représentée par l'équation

$$(x - \alpha)(y - \beta)(z - \gamma) = (x - \alpha')(y - \beta')(z - \gamma').$$

Quelle particularité présente le plan $x - \alpha = 0$ par rapport à cette surface?

— Étant donnée l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, former l'équation générale des plans qui coupent la surface suivant deux droites.

— L'équation générale du second degré à trois variables représentant un paraboloïde, on demande les équations de son axe.

— Trouver les plans principaux de la surface

$$xy + xz - y^2 + 1 = 0.$$

— Étant donnée la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, former l'équation de la surface engendrée par une droite tangente à la sphère, et assujettie à s'appuyer sur l'axe des z et sur la droite $(x = \alpha,\ z = \gamma)$.

— Étant donnée la surface $x(x + y + 1) + y(z + y - 2) = 0$, on donne sur l'axe des z un point à la hauteur $z = \gamma$; former les équations de la seconde génératrice qui passe par ce point.

— Étant donnée l'équation $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0$ dans laquelle

$$u = ax + by + cz + d$$
$$v = a'x + b'y + c'z + d'$$
$$w = a''x + b''y + c''z + d'',$$

on demande les propriétés de la surface qu'elle représente.

— Former l'équation de l'hyperboloïde à une nappe, quand on prend pour axe des x une génératrice du cône asymptote, et pour plan des zy son plan diamétral conjugué.

— Former l'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent es axes Ox et Oy. — On prend sur Oz deux points A et A' symétriques par rapport à l'origine; on mène dans le plan des zx AB parallèle à Ox et dans le plan des zy A'B' parallèle à Oy. On demande l'équation de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur AB et A'B' et parallèle aux génératrices de l'un des cônes considérés. Quel est le cône asymptote de cette surface?

— Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites rectangulaires.

— Lieu des centres des sections faites dans une surface du second ordre $f(x, y, z) = 0$ par des plans constamment tangents à une sphère donnée.

— On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ par des plans parallèles au plan $px + qy + rz = 0$; trouver le lieu des foyers des sections ainsi obtenues.

— Lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour directrice l'ellipse $\left(z = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right)$.

Géométrie descriptive.

— Étant donné un triangle par les projections et les côtés de ses sommets, mener par l'un des côtés un plan faisant avec le plan du triangle un angle de 45 degrés. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— On donne deux droites AB, BC dans le plan horizontal. AB est la projection d'une droite située à un décimètre au-dessus du plan horizontal. Cette droite tourne autour de BC et engendre un hyperboloïde de révolution. Par AB on fait passer un plan incliné de 45 degrés sur le plan horizontal. On demande un point de l'intersection, et la tangente en ce point. *(Pas de plan vertical de projection).*

— Étant donnés un cercle dans le plan vertical, et une droite quelconque, le cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite,

Mener à ce cylindre un plan tangent faisant avec le plan vertical un angle de 45 degrés.

— Étant donné un triangle ABC dans le plan horizontal, ce triangle est la base d'un tétraèdre dont le sommet se projette horizontalement en S et dont le côté est $\frac{AB}{2}$. On demande le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre.— On demande aussi les centres et les rayons de toutes les sphères qu'on peut mener tangentes aux quatre faces du tétraèdre. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Etant donné dans le plan vertical un cercle qui est la section droite d'un cylindre, on considère un plan défini par sa trace horizontale qui ne rencontre pas la ligne de terre dans les limites de l'épure, et passant par un point (c, c'); on demande : 1° un point quelconque de l'intersection du cylindre par le plan; 2° si dans les développements du cylindre, le développement de l'intersection présentera des points d'inflexion.

QUESTION 256

Solution, par M. Baron, élève au Lycée Henri IV.

On donne une ellipse dont les axes sont OA *et* OB ; *la tangente en* M *à la courbe rencontre les axes en* C *et* D ; *on construit le rectangle* OCPD *et on joint le sommet* P *au point* M. *Démontrer que si du centre on abaisse une perpendiculaire sur* PM, *cette perpendiculaire rencontre la normale en* M *en un point* I *qui est le centre du cercle osculateur de l'ellipse au point* M.

Je rapporte l'ellipse à deux axes rectangulaires d'origine M, parallèles aux axes de la courbe. L'équation de l'ellipse est
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2x\cos\varphi}{a}+\frac{2y\sin\varphi}{b}=0;$$
celle de la tangente en M est
$$\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=0.$$

On sait que les cordes communes à l'ellipse et au cercle osculateur en M sont la tangente et la droite symétrique de la tangente par rapport à la parallèle à l'axe focal menée par M. Cette droite aura pour équation,
$$\frac{x\cos\varphi}{a}-\frac{y\sin\varphi}{b}=0. \qquad (1)$$

Elle coupe l'ellipse au point M, et au point M', dont les coordonnées sont $x' = - 4a \sin^2 \varphi \cos \varphi$

$$y' = - 4b \sin \varphi \cos^2 \varphi.$$

Le centre du cercle osculateur sera donc déterminé par l'intersection de la normale

$$y = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} x \qquad (2)$$

et de la perpendiculaire au milieu de MM' :

$$(y + 2b \sin \varphi \cos^2 \varphi) = - \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} (x + 2a \sin^2 \varphi \cos \varphi). \quad (3)$$

Cela posé, je cherche les coordonnées du point P; elles seront

$$y = \frac{b \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

$$x = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

La perpendiculaire abaissée de O sur PM aura donc pour équation

$$(y + b \sin \varphi) = - \frac{a \sin^3 \varphi}{b \cos^3 \varphi} (x + a \cos \varphi). \quad (4)$$

Si cette droite détermine le centre du cercle osculateur par son intersection avec la normale, il faut que l'intersection des droites (3) et (4) soit sur la normale en M.

Si je cherche l'équation de la droite passant par M et l'intersection des droites (3) et (4), je trouverai après réduction

$$b \cos \varphi \,.\, y(1 - 2 \cos^2 \varphi) = a \sin \varphi \,.\, x(2 \sin^2 \varphi - 1)$$

c'est-à-dire l'équation de la normale en M. Donc le point I est bien le centre du cercle osculateur cherché.

Nota. — La même question a été résolue par M. Bonvalet, élève au Lycée de Versailles.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

322.— Trouver cinq nombres en progression arithmétique. connaissant leur somme et leur produit.

323. — Trouver le minimum du volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles circonscrit à un hémisphère.

324. — Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, le périmètre et la surface.

325. — Résoudre l'équation

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{a}}+\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}}=\sqrt[n]{\frac{x}{b}}.$$

326. — Étant donné un cercle O et deux points extérieurs A et B donnés par les quantités suivantes : $OA = a$, $OB = b$, $AB = d$, trouver sur la circonférence un point M tel que la somme des carrés des distances MA et MB soit égale à une quantité donnée. On discutera le problème et on construira géométriquement le point M lorsqu'il existe.

327. — On donne un cercle C, une corde AB de ce cercle, et sur AB un point P; mener par le point P une corde XPY telle que, si on abaisse XX′ et YY′ perpendiculaire sur AB, on ait $XX' - YY' = D$. *(Lieber.)*

328. — On donne un cercle, un diamètre et deux points P et P′ sur ce diamètre, de part et d'autre du centre, à des distances inégales du centre. Mener par P et P′ deux cordes égales qui se coupent sur la circonférence. *(Lieber.)*

Mathématiques spéciales.

329. — On considère une ellipse et deux normales à cette courbe faisant entre elles un angle droit. Soit M le point de rencontre de ces deux normales. Par ce point M on mène à l'ellipse les deux autres normales, dont les pieds sont A et B. En A et B, on mène les tangentes à l'ellipse. Trouver le lieu du point P de rencontre de ces tangentes, quand le point M décrit le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à l'ellipse donnée.

330. — On donne trois points, A, B, C, dans un plan. Autour du point A, on fait tourner un angle de grandeur constante, dont les côtés rencontrent en M et N une droite fixe donnée ; on demande le lieu décrit par le point de ren-

contre des lignes BM et CN lorsque l'angle donné tourne autour du point A. Étudier les propriétés de ce lieu.

331. — Étant données deux ellipses homofocales, par un point P de leur plan, on mène à l'une d'elles deux tangentes, A et B d'une part, C et D d'autre part étant les points où ces tangentes rencontrent la seconde ellipse, établir la relation

$$\frac{1}{PA} \pm \frac{1}{PB} = \frac{1}{PC} \pm \frac{1}{PD};$$

trouver à quelles positions du point P conviennent respectivement les signes + et —.

332. — On coupe un ellipsoïde :

1° Par des plans parallèles à un plan donné;

2° Par des plans passant par une droite donnée;

3° Par des plans passant par un point donné.

Trouver les lieux décrits par les foyers de ces sections dans les trois cas.

333. — M et M' étant deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces deux points, et F le foyer, démontrer que l'on a :

$$\frac{PM^2}{MF} = \frac{PM'^2}{M'F}$$

Existe-t-il un théorème analogue pour l'ellipse et l'hyperbole ?

334. — Étant donnée la fonction

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

on demande de calculer la fonction analogue $\varphi(2x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

335. — Construire les courbes suivantes :

$$2x^3y^3 + x^4 - y^4 - 2xy = 0$$

$$4x^5y^5 + x^6 - y^6 + 5x^2y^2(x^2 - y^2) - 4xy = 0.$$

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 6130-1

QUESTION DE GÉOMÉTRIE

Par MM. **Delpit** et **Docteur**, élèves de l'École préparatoire
de Sainte-Barbe

Solution et développement de la question 315.

On donne dans un cercle deux diamètres fixes AB, CD. *Par le centre, on mène des rayons perpendiculaires* OP, OP'; *on abaisse de* P *et* P' *des perpendiculaires* PQ *et* P'Q' *sur* AB; *soient* ω *et* ω' *les centres des cercles inscrits dans les triangles* POQ, P'OQ'. *La figure jouit des propriétés suivantes :*

1° *Les trois points* P, ω, C, *sont en ligne droite.*

En effet, le triangle OCP, qui est isoscèle, donne

$$OPC = OCP;$$

de plus PQ est parallèle à OC; donc

$$CPQ = OCP;$$

par suite PC est la bissectrice de l'angle en P; elle contient donc le point ω. Pour la même raison, les points P', ω', C sont en ligne droite.

2° *Les deux droites* ωP, ωA *sont égales et rectangulaires.*

Ces lignes sont égales, parce que PH = AH; elles sont perpendiculaires parce que $P\omega H = \frac{P}{2} + \frac{O}{2} = 45°$. Donc $P\omega A = 90°$.

On voit aussi que les angles ωAO, OPω sont égaux ainsi que OPω et ω'OQ'; donc les droites ωA, ω'O sont égales et parallèles.

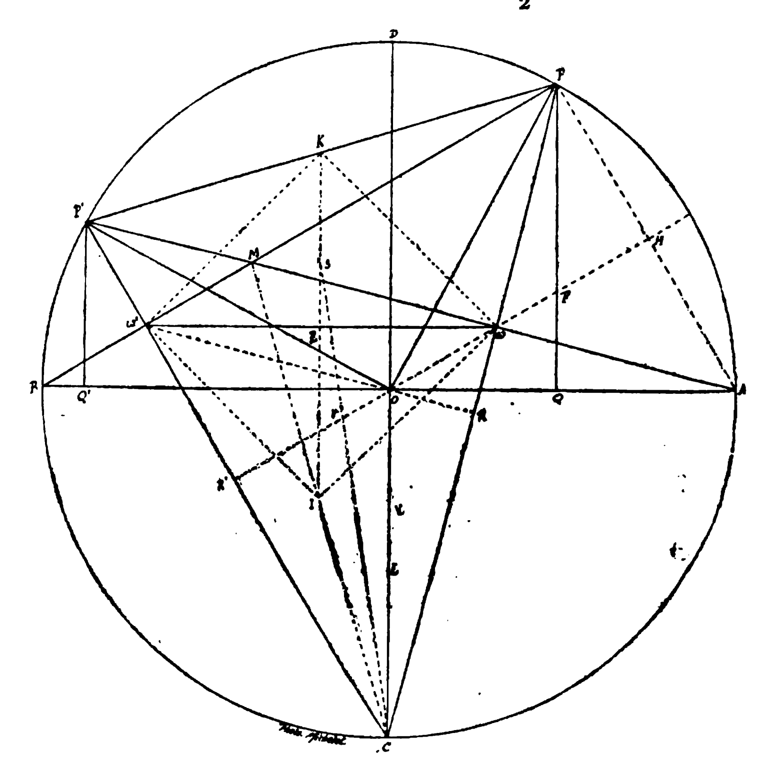
3° *La droite* $\omega\omega'$ *est égale au rayon.*

Cela résulte de ce que nous venons de dire; les lignes ωA et ω'O étant égales et parallèles, la figure $\omega\omega'$AO est un parallélogramme.

4° *Le lieu du centre* I *du cercle circonscrit au triangle* C$\omega\omega'$ *est un cercle.*

En effet, l'angle en C étant égal à 45°, $\omega\omega'$ est le côté du

carré inscrit dans le cercle ωCω′, et si par le point E, milieu de ωω′, on élève à cette droite une perpendiculaire sur laquelle on prend une longueur EI égale à ωE dans l'intérieur du triangle, le point I est le centre du cercle circonscrit ; on a donc CI = Iω′ ; or comme on a $I\omega' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, on voit que CI est constant ; le lieu du point I est donc un cercle ayant le point C pour centre, et pour rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.



5° *La droite qui joint les milieux de* PP′ *et de* ωω′ *est constante et égale à la moitié du rayon.*

D'abord les droites OK et CI sont égales ; de plus elles sont parallèles. En effet, on a

$$KOD = KOP - DOP = 45^\circ - OPQ.$$

$$ICO = IC\omega - \frac{P}{2} = 90^\circ - C\omega'\omega - \frac{P}{2}.$$

Mais $$C\omega'\omega = 90^\circ - \frac{P'OD}{2};$$

donc $$ICO = \frac{P'}{2} - \frac{P}{2} = 45^\circ - OPQ.$$

et par suite $$KOD = ICO.$$

Il en résulte que la figure OKIC est un parallélogramme, et puisque IE est déjà parallèle à CO, la ligne KE est aussi parallèle à CO; enfin, on a $IK = R$, et comme $IE = \frac{R}{2}$, il en résulte que KE est égal à $\frac{R}{2}$.

6° *Les points* K, ω, ω', I *sont les sommets d'un carré.*

Cela résulte de ce que les droites KI et $\omega\omega'$ se coupent en leurs milieux et à angle droit et sont de plus égales.

7° *Les trois points* A, ω, P', *sont en ligne droite.*

En effet on a $\omega AB = \frac{P}{2}$, et puisque $P'AB = \frac{P}{2}$, les droites $A\omega$, AP' se confondent.

8° *Les trois droites* BP, AP' *et* CI *concourent en un même point.*

En effet, nous avons vu que $C\omega$ était perpendiculaire sur AM; de même, $C\omega'$ est perpendiculaire sur BM; donc le quadrilatère $M\omega C\omega'$ est inscriptible, et CM est un diamètre du cercle; ce diamètre passe donc par le point I.

9° *Les cinq points* P, P', ω, ω', O *sont sur une même circonférence ayant pour centre le point* K.

Cela résulte de la propriété démontrée (6), puisque $K\omega = K\omega' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, et que cette même quantité exprime les distances KO, KP et KP'.

10° *On a* $$C\omega'^2 + O\omega^2 = C\omega^2 + O\omega'^2 = 2R^2.$$

En effet, on a $$O\omega = P'\omega' = B\omega'.$$

Donc $C\omega'^2 + O\omega'^2 = C\omega'^2 + B\omega'^2 = CB^2 = 2R^2$.

On a de même $C\omega^2 + O\omega'^2 = 2R^2$.

Il existe beaucoup d'autres propriétés, dont nous allons signaler les plus importantes.

11° *Le lieu du point* M *est une circonférence ayant pour centre* C.

Cela résulte immédiatement de (8), puisque $CM = 2CI = R\sqrt{2}$. On voit que cette circonférence passe par les points A et B.

12° *Le lieu du point* E *est une circonférence.*

En effet, si nous joignons le point E au milieu L de OC, la ligne EL est toujours égale et parallèle à CI; donc

$$EL = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

13° *Le point* O *est le point d'intersection des hauteurs du triangle* $C\omega\omega'$.

En effet, les cordes PA, P'C sont parallèles, parce que les arcs PP' et AC sont égaux; donc $O\omega$, perpendiculaire à PA. est aussi perpendiculaire à P'C.

Pour la même raison, $\omega'O$ est perpendiculaire à PC.

14° *Le lieu géométrique du centre de gravité du triangle* $C\omega\omega'$ *est un cercle.*

En effet, le centre de gravité se trouve sur OI, et sa distance au point O est les deux tiers de OI. Donc, le lieu du centre de gravité est un cercle dont le centre est sur OC, à une distance de O égale aux deux tiers du rayon.

15° *Le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* $C\omega\omega'$ *est un cercle.*

En effet, ce centre se trouve au milieu de OI. Donc le lieu de ce centre est un cercle dont le centre est au point L.

16° *Les six points* P, H, Q, R, O, K *sont sur une même circonférence.*

Car les angles qui ont pour sommets les points H, Q, R ou K et passent par les points O, P sont droits.

17° *Les lieux des points* ω *et* ω' *se composent de deux cercles.*

En effet, l'angle OωC, opposé par le sommet à l'angle PωH, est égal à 45°. Le lieu du point ω est donc le cercle circonscrit au triangle AOC.

18° *Les trois points* D, K, M *sont en ligne droite.*

Car IK est la moitié de CD, et le point I est au milieu de MC, IK étant parallèle à CD. Donc le point K est le milieu de DM.

19° *La ligne* Kω *passe par le point* Q.

En effet, l'angle ωQO est égal à 45° ainsi que l'angle K$\omega\omega'$, et les droites $\omega\omega'$ et AB sont parallèles.

20° *Les six points* K, ω, ω', I, R, R′ *sont sur une même circonférence.*

Les quatre premiers points sont sur une circonférence ayant E pour centre, et les angles ωRω', ωR′ω' sont droits; donc cette circonférence passe par les points R et R′.

21° *Le lieu du point* F *est une strophoïde.*

Menons AF. L'angle aigu de cette droite avec OF sera égal à PFH, ou $P + \frac{O}{2}$. Or, l'angle DOF a la même valeur. Donc, le point F s'obtiendra en portant à partir du point de rencontre de AF avec OD une longueur égale à la distance de ce point au point O. Il appartient donc à la boucle d'une strophoïde.

22° *Soit* μ *le centre du cercle inscrit au triangle* C$\omega\omega'$. *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* $\omega\mu\omega'$ *est un cercle.*

En effet, l'angle $\omega\mu\omega'$ est égal à $\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{45}{2}$. Donc, le rayon du cercle circonscrit au triangle $\omega\mu\omega'$ est constant. Soit S le centre de ce cercle; la droite SE est constante. Prenons sur CO, à partir du point L, une longueur LV égale à SE. SV sera toujours égal à LE; donc V sera le centre d'un cercle de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ qui sera le lieu du point S.

23° *Les trois points* S, μ, C *sont en ligne droite.*

En effet, on a $S\mu\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega\omega'C}{2}$.

L'angle aigu de $C\mu$ avec $\omega\mu$ est égal à $\frac{\pi}{8} + \frac{\omega'\omega C}{2}$.

Si l'on égale ces valeurs, on en tire

$$\omega\omega'C + \omega'\omega C = 135°;$$

telle est la condition à laquelle doivent satisfaire les angles en ω et ω' du triangle Cωω' pour que les trois points S, μ et C soient en ligne droite; on sait que cette condition est remplie.

24° *Le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle* Cωω' *est un limaçon de Pascal.*

En effet, le point S appartient, d'après ce que l'on vient de dire, au cercle circonscrit au triangle Cωω', puisque la ligne Cμ est la bissectrice de l'angle en C; il en résulte que, puisque Sμ est constant, le point μ décrit un limaçon de Pascal.

25° *Il existe une ellipse, ayant pour foyers les points* O *et* I, *et tangente aux trois côtés du triangle* Cωω'.

Nous remarquons que les angles ICω', OCω sont égaux; en effet, l'angle ω'CO et l'angle ICω sont égaux comme complément d'un même angle Cω'ω. Donc, en retranchant la partie commune ICO, on voit que les angles ωCO, ω'CI sont égaux. En outre, les angles Iω'C, Oω'ω sont égaux; en effet, l'angle Oω'ω est le complément de l'angle Cωω'; il en est de même de l'angle Iω'C, qui est le complément de la moitié de l'angle au centre CIω'. On prouverait de même que les angles ω'ωO et IωC sont égaux. Cela posé, prenons une ellipse ayant pour foyers O et I et tangente à ωω'. Si des points ω et ω' on mène deux autres tangentes à cette ellipse, elles feront respectivement avec les droites ωI, ω'I des angles égaux à ω'ωO et ωω'O. Les droites ωC, ω'C satisfont précisément à cette relation. Le théorème est donc démontré.

Note de la Rédaction. — Les auteurs auraient pu démontrer ce dernier théorème en rappelant que les symétriques

de O par rapport aux côtés du triangle $C\omega\omega'$ sont sur la circonférence circonscrite, puisque le point O est le point de concours des hauteurs de ce triangle ; si l'on appelle R le symétrique de O par rapport à $C\omega$, le point de rencontre de IR avec $C\omega$ est tel, que la somme de ses distances aux points I et O est égale à IC, et de plus la ligne $C\omega$ est également inclinée sur les deux droites qui joignent ce point aux points I et O. Donc $C\omega$ est tangente à l'ellipse ayant I et O pour foyers, et pour cercle directeur le cercle circonscrit à $C\omega\omega'$. Il en est de même pour les deux autres côtés du triangle. Nous avons reproduit la démonstration des auteurs, quoiqu'elle s'appuie sur un théorème moins connu des élèves de Mathématiques élémentaires.

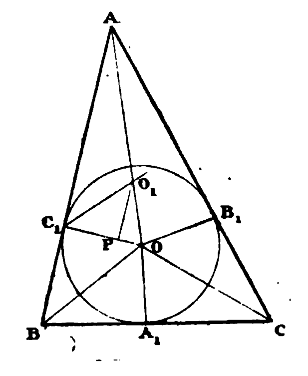
NOTA. — La question 315, telle qu'elle avait été proposée, a été résolue, en outre, par MM. Launay, à Bourges ; Baudouin, au collège de Beauvais ; Fiévet, à Lille ; Hamon, au Mans ; Jullien et Lapareillé, au lycée Henri IV, à Paris.

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Gino-Loria**

(*Suite et fin*, voir pages 62, 104 et 148.)

21. — (T, W) *O est le centre*, r *le rayon du cercle inscrit dans un triangle quelconque* ABC. *On mène* OA_1, OB_1, OC_1 *perpendiculaires aux côtés* BC, CA, AB. *Soient* r_1, r_2, r_3 *les rayons des cercles inscrits dans les quadrilatères* AB_1OC_1, BC_1OA_1, CA_1OB_1. *Trouver des relations entre* r_1 r_2 r_3 *et les éléments du triangle donné.*



Considérons le quadrilatère

$$AB_1\ OC_1\,;$$

puisque

$$OB_1 = OC_1, \quad AB_1 = AC_1,$$

on a

$$OB_1 + AC_1 = OC_1 + AB_1$$

et le quadrilatère est circonscriptible. OA étant la bissectrice des angles A et O, cette droite doit contenir le centre O_1 du cercle inscrit dans le quadrilatère. Menons la bissectrice de l'angle C_1 ; cette droite aussi contient O_1. Donc ce point est le point de rencontre de ces deux droites.

Ayant tiré O_1P perpendiculaire à OC_1, on aura $O_1P = r_1$. Dans le triangle OO_1C l'angle O est égal à $\frac{\pi - A}{2}$, l'angle C_1 est égal à $\frac{\pi}{4}$, donc l'angle O_1 vaut $\frac{\pi + 2A}{4}$.

Il viendra donc $OO_1 = \dfrac{r \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi + 2A}{4}}$.

Le triangle OO_1P donne

$$r_1 = OO_1 \sin \frac{\pi - A}{2} = r \frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi - A}{2}}{\sin \frac{\pi + 2A}{4}};$$

on en tire

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{A}{2}}$$

et
$$\frac{r_1}{r - r_1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{A}{2}} = \cot \frac{1}{2} A. \qquad (1)$$

De même
$$\frac{r_2}{r - r_2} = \cot \frac{1}{2} B; \qquad (2)$$

$$\frac{r_3}{r - r_3} = \cot \frac{1}{2} C. \qquad (3)$$

a) Additionnant les égalités (1) (2) (3), on obtient :

$$\frac{r_1}{r - r_1} + \frac{r_2}{r - r_2} + \frac{r_3}{r - r_3}$$
$$= \cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C.$$

Mais, puisque $\quad A + B + C = \pi$

on a (*) $\quad \cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C$

$$= \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$$

Par conséquent

$$\frac{r_1}{r - r_1} + \frac{r_2}{r - r_2} + \frac{r_3}{r - r_3}$$

$$= \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{r_1}{r - r_1} + \frac{r_2}{r - r_2} + \frac{r_3}{r - r_3} = \frac{p}{r}.$$

b) Les équations (1) (2) (3) peuvent s'écrire

$$\frac{r - r_1}{rr_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}{r};$$

$$\frac{r - r_2}{rr_2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{r};$$

$$\frac{r - r_3}{rr_3} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}}{r};$$

ou

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}{r};$$

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{r};$$

$$\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{r}.$$

(*) Desboves, *Questions de trigonométrie*, 2e éd., p. 120.

Par conséquent :

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\operatorname{tg}\frac{1}{2}C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{r^2}.$$

Comme $A+B+C=\pi$

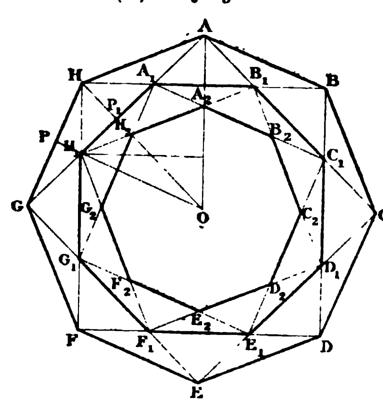
on a (*)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\operatorname{tg}\frac{1}{2}C+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=1$$

il s'ensuit que

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}.$$

22. — (T) *En joignant alternativement deux à deux les sommets d'un polygone régulier de* n *côtés par* n *droites, on forme un second polygone de* n *côtés. Si l'on effectue sur ce nouveau polygone et sur les suivants la même opération, on propose de trouver la somme des aires de tous ces polygones.*



Appelons A, A_1, A_2, A_3, ... les aires du polygone donné et des polygones formés suivant la loi donnée; OP, OP_1, OP_2, OP_3, ... leurs apothèmes.

Les triangles rectangles OPH, OP_1A donnent

$$OP=R\cos\frac{\pi}{n};\qquad OP_1=R\cos\frac{2\pi}{n}$$

(*) Desboves, *Questions de trigonométrie*, 2e éd., p. 120.

et comme les figures semblables sont entre elles comme les carrés de deux lignes homologues, on aura

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}.$$

Cette équation montre que les aires des polygones considérés forment une progression géométrique indéfinie dont le premier terme A_1 est $A \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$ et la raison est $\frac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Comme cette dernière quantité est moindre que l'unité, la progression est décroissante; en appelant S la somme de ses termes, on aura

$$S = \frac{A \cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{2\pi}{n}}$$

ou (*)

$$S = \frac{A \cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{3\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Cas particuliers. — 1° Soit $n = 3$; on a alors

$$S = A \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{3}}{\sin \pi \sin \frac{\pi}{3}},$$

et comme $\sin \pi = 0$, on aura $S = \infty$. En effectuant en effet sur le triangle l'opération indiquée par le problème, on obtient toujours le triangle donné; et comme la somme

(*) Colenso, *Plane Trigonometry*, p. 58.

d'une série infinie de termes égaux est infinie, on doit avoir $S = \infty$.

2° Si $n = 4$, on a $S = A \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}}$; et comme $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $S = 0$; en effet, tous les polygones déduits d'un carré de la manière indiquée se réduisent à un point (point de rencontre des diagonales), donc leur somme est égale à o.

3° Soit $n = 6$; alors on a

$$S = A \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{6}}{\sin \frac{3\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}} = A \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3}} = A \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} A$$

III

MAXIMA ET MINIMA (*)

23. *Entre tous les rectangles qui ont la même diagonale déterminer celui* a) *de périmètre maximum,* b) *de la plus grande surface.*

Soit $AC = d$ la diagonale donnée; appellons φ l'angle BAC; alors $AB = d \cos \varphi$; $BC = d \sin \varphi$.

a) Le demi-périmètre p du triangle sera donné par la relation $p = d\left[\sin \varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$

$$p = 2d \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Le maximum de p correspond donc au maximum de $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, c'est-à-dire à $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

b) La surface S du rectangle sera donnée par l'équation

$$S = d^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} d^2 \sin 2\varphi.$$

Le maximum de S correspond donc au maximum de

(*) Toutes les questions suivantes sont tirées de l'ouvrage de M. Reidt.

sin 2φ, c'est-à-dire à $$2\varphi = \frac{\pi}{2}$$

et $$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

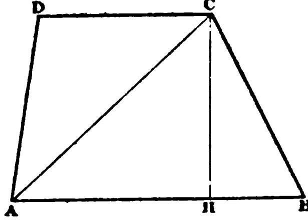
Donc: *Entre tous les rectangles ayant la même diagonale le carré est celui qui a le plus grand périmètre et la plus grande surface.*

Il s'ensuit aussi (*) : *Entre tous les rectangles ayant le même périmètre ou la même surface, le carré est celui qui a la moindre diagonale.*

24. *Un quadrilatère a deux côtés parallèles, et les deux autres égaux ; on en donne une diagonale et la somme des côtés parallèles, et on demande de trouver entre tous les quadrilatères qui satisfont à ces conditions, celui dont l'aire est un maximum.*

Soit $AC = d$ la diagonale donnée, et soit aussi donné $AB + CD = 2s$. Posons $BAC = \varphi$. En appelant h la hauteur CH du quadrilatère, on aura

$$h = d \sin \varphi.$$



La surface S du quadrilatère sera donc donnée par l'équation

$$S = sd \sin \varphi.$$

Le maximum de S correspond donc au maximum de $\sin \varphi$, c'est-à-dire à

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, *entre tous les quadrilatères proposés, celui qui a la plus grande surface a la diagonale perpendiculaire aux côtés parallèles.*

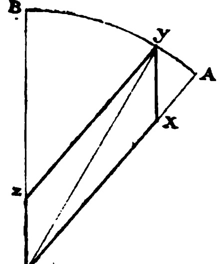
25. *Inscrire dans un secteur circulaire un parallélogramme ayant un angle commun avec le secteur, un sommet sur l'arc du secteur et dont la surface soit un maximum.*

Soit OXYZ un parallélogramme ayant un angle commun avec le secteur, et le sommet Y sur l'arc du secteur. Posons

---

(*) Bertrand, *Traité d'algèbre*, 1re partie, 10e éd., p. 247.

AOB $= \alpha$, AOY $= \varphi$. L'aire S du parallélogramme sera donnée par la relation



$$S = \frac{R^2 \sin \varphi \sin (\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}.$$

Le maximum de S correspond donc au maximum de

$$\sin \varphi \sin (\alpha - \varphi)$$

ou de $\quad \cos (2\varphi - \alpha) - \cos \alpha$

Et comme cette expression atteint son maximum quand

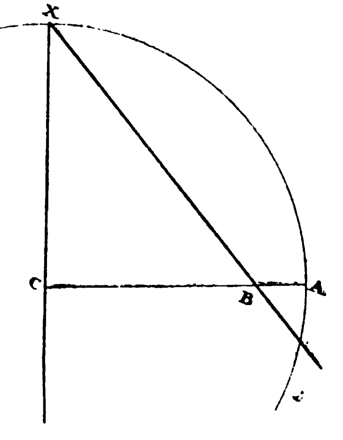
$$2\varphi - \alpha = 0$$

ou

$$\varphi = \frac{\alpha}{2},$$

nous pourrons dire que, *entre tous les parallélogrammes considérés, le losange ayant son sommet au milieu de l'arc du secteur a la plus grande surface.*

26. — *Du centre* C *d'un cercle donné on tire un rayon quelconque* CA *sur lequel on prend un segment arbitraire* CB $= a$. *Trouver le plus grand de tous les angles dont le sommet est sur la circonférence et dont les côtés passent par* B, C.



Soit x un point quelconque de la circonférence : posons

$$BXC = \varphi; \quad BX = x.$$

Le triangle BCX donne

$$a^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos \varphi$$

ou

$$x^2 - 2R x \cos \varphi + (R^2 - a^2) = 0.$$

D'où l'on tire

$$x = R \cos \varphi \pm \sqrt{a^2 - R^2(1 - \cos^2 \varphi)}$$

ou $\quad x = R \cos \varphi \pm \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \varphi}$.

Pour que le problème soit possible il faut qu'on ait

$$a^2 - R^2 \sin^2 \varphi \geq 0; \quad \sin \varphi \leq \frac{a}{R}.$$

Le maximum de sin φ et de φ a lieu donc quand

$$\sin \varphi = \frac{a}{R}.$$

Dans ce cas BX est perpendiculaire à BC et on déduit qu'*entre tous les angles proposés, le plus grand est celui dont le côté passant par* B *est perpendiculaire à* BC.

27. — *Entre tous les triangles ayant la même base et pour lesquels la somme des deux autres côtés est constante, déterminer celui qui a le plus grand angle au sommet.*

Soient: a la base, s la somme des deux autres côtés x, y, φ l'angle au sommet. On aura :

$$x + y = s; \qquad (1)$$

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi. \qquad (2)$$

L'équation (2) peut s'écrire :

$$a^2 = (x + y)^2 - 4xy \cos^2 \frac{1}{2} \varphi;$$

c'est-à-dire $\quad a^2 = s^2 - 4\,xy \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$

d'où l'on tire $\quad \cos^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{s^2 - a^2}{4xy}.$

Le maximum de $\frac{1}{2} \varphi$ (et de φ) correspond au minimum de $\cos \frac{1}{2} \varphi$ (et de $\cos^2 \frac{1}{2} \varphi$) : or, le minimum d'une fraction correspond au maximum de son dénominateur; donc le maximum de φ correspond au maximum du produit xy de deux nombres dont la somme s est constante.

L'angle φ atteint donc son maximum quand (*)

$$x = y = \frac{1}{2} s.$$

Donc: *Entre tous les triangles qui ont même base et même somme des deux autres côtés, le triangle isoscèle a le plus grand angle au sommet.*

28. — *Partager un arc en deux parties telles que :* a) *la*

(*) Bertrand, *l. c.*, p. 233.

somme, b) *le produit*, c) *la somme des carrés des cordes soient maximum*.

Soit AB $= c$ la corde de l'arc α donné, X un point quelconque de la circonférence. Posons

$$AX = x, \quad BX = y, \quad BAX = \varphi, \quad ABX = \psi.$$

On aura

$$x = 2R \sin \varphi \qquad (1)$$

$$y = 2R \sin \psi \qquad (2)$$

a) Des équations (1) (2) on tire

$$x + y = 4R \sin \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$$

ou

$$x + y = 4R \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi).$$

Le maximum de $x + y$ correspond donc au maximum de $\cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$, c'est-à-dire à

$$\varphi = \psi.$$

b) Les équations (1) (2) donnent aussi

$$xy = 4R^2 \sin \varphi \sin \psi$$

ou

$$xy = 2R^2 [\cos (\varphi - \psi) + \cos \alpha] \text{ o}.$$

Le maximum de xy correspond donc au maximum de $\cos (\varphi - \psi)$, c'est-à-dire à $\varphi = \psi$.

c) On a encore des équations (1) (2)

$$x^2 + y^2 = 4R^2 (\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi).$$

Le maximum de $x^2 + y^2$ correspond donc au maximum de $\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi = (\sin \varphi + \sin \psi)^2 - 2 \sin \varphi \sin \psi$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \psi) - \cos \alpha - \cos (\varphi - \psi)$$

$$= 1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \psi) \cos \alpha$$

c'est-à-dire au maximum de $\cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$.

La fonction $x^2 + y^2$ atteint donc son maximum quand

$$\varphi = \psi.$$

Concluons donc : *Pour partager un arc en deux parties telles que la somme, le produit, ou la somme des carrés des cordes soient maximum, il faut le partager en deux parties égales.*

29. — *Entre tous les triangles isoscèles inscrits dans un cercle*

donné quel est celui dont, a) *le périmètre,* b) *la surface est un maximum ?*

Soit φ l'angle au sommet du triangle isoscèle ; les autres angles seront chacun égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varphi$. Sa base sera donc $2R \sin \varphi$ et chacun de ses côtés sera $2R \cos \frac{1}{2}\varphi$.

a) Le périmètre de ce triangle est donc

$$2R\left[\sin\varphi + 2\cos\frac{1}{2}\varphi\right] = 4R\cos\frac{1}{2}\varphi\left(1 + \sin\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Ayant posé
$$\frac{1}{2}\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \tag{1}$$
la question est réduite à trouver le maximum de

$$\sin\psi(1 + \cos\psi) \text{ ou de } 4\sin\frac{1}{2}\psi\cos^3\frac{1}{2}\psi,$$

qui est le même de celui de l'expression

$$\sin^2\frac{1}{2}\psi \times \left(1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi\right)^3.$$

Comme les quantités positives $\sin^2\frac{1}{2}\psi$, $1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi$ ont une somme constante, le maximum de ce produit sera atteint quand (*)

$$\sin^2\frac{1}{2}\psi = \frac{1 - \sin^2\frac{1}{2}\psi}{3};$$

d'où l'on tire $\sin\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\psi = \frac{\pi}{2}$.

La relation (1) donne par conséquent

$$\varphi = \pi - 2\psi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

b) La surface S du triangle est donnée par l'équation

$$S = 2R^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi = 4R^3\sin\frac{1}{2}\varphi\cos^3\frac{1}{2}\varphi.$$

Donc le maximum de S correspond au maximum de

$$\left(1 - \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right)^3\sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

(*) Bertrand, *l. c.*, p. 245.

Cette expression atteint son maximum quand

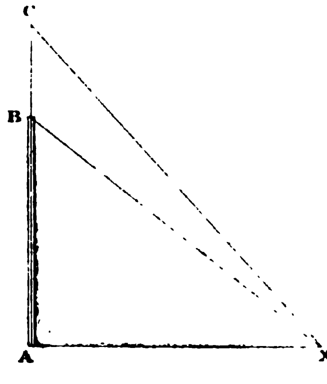
$$\frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{3} = \sin^2 \frac{1}{2}\varphi$$

De cette équation on tire

$$\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Donc : *Entre tous les triangles isoscèles inscriptibles dans un cercle donné, le triangle équilatéral est celui dont le périmètre et l'aire sont maxima.*

30. — *La hauteur* AB *d'une tour est* a ; *sur son sommet est fixé un étendard* BC *de hauteur* b. *On demande de trouver le point du terrain horizontal d'où l'étendard est vu sous l'angle maximum.*



Soit X le point cherché. En posant

$$AX = x;\quad AXC = \varphi;\quad AXB = \psi;\quad BXC = \mu,$$

on aura :

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}$$

Or on a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a+b}{x};\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{a}{x};$$

donc, toute réduction faite,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{bx}{x^2 + a(a+b)}$$

ou $$x^2 \operatorname{tg}\mu - bx + a(a+b)\operatorname{tg}\mu = 0.$$

D'où l'on tire

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a(a+b)\operatorname{tg}^2\mu}}{2\operatorname{tg}\mu}.$$

Les racines de cette équation seront réelles si

$$b^2 - 4a(a+b)\operatorname{tg}^2\mu \geq 0$$

ou si $$\operatorname{tg}^2\mu \leq \frac{b^2}{4a(a+b)}$$

Le maximum de tg μ et de μ sera donc atteint, quand

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}.$$

Alors $$x = \sqrt{a(a+b)},$$
qui est l'expression de la distance cherchée.

QUESTIONS D'EXAMEN

Démontrer que, quel que soit l'entier positif n, $2^{4n} - 1$ *est divisible par* 5.

En effet, cette expression peut s'écrire

$$(2^4)^n - 1.$$

Or, on sait que 2^4 est terminé par 6, et que toutes les puissances d'un nombre terminé par 6 sont elles-mêmes terminées par 6. Donc, en retranchant l'unité, la différence sera terminée par 5.

On peut remarquer aussi que ce nombre peut s'écrire

$$(2^n)^4 - 1.$$

Or 1 peut être considéré comme la quatrième puissance de l'unité et l'on sait que, lorsque deux nombres sont premiers avec 5, la différence de leurs quatrièmes puissances est divisible par 5; mais 2^n est premier avec 5, donc

$$(2^n)^4 - 1$$

est divisible par 5.

Cette seconde démonstration s'applique à un nombre quelconque premier avec 5 et n'est même qu'une conséquence du théorème de Fermat.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux petits cercles d'une sphère se coupent à angle droit, est que le sommet du cône circonscrit à la sphère suivant l'un des cercles soit dans le plan de l'autre.

On sait que, dans une surface de révolution quelconque, un parallèle rencontre tous les méridiens à angle droit; que

les génératrices du cône de révolution circonscrit à la surface le long d'un parallèle donné sont tangentes aux divers méridiens aux points où ils coupent ce parallèle et rencontrent l'axe au même point; enfin, que chacune de ces génératrices est perpendiculaire à la tangente au parallèle au point de contact.

D'après cela, si je considère une sphère et deux petits cercles se coupant à angle droit, la tangente à l'un de ces cercles au point d'intersection est dans le plan tangent, et perpendiculaire à la tangente à l'autre cercle; elle se confond donc avec une génératrice du cône circonscrit à la sphère le long de ce second cercle, et, par suite, contient le sommet de ce cône; elle est du reste aussi dans le plan du premier cercle; donc la condition nécessaire pour que les deux cercles se coupent à angle droit est que le sommet de l'un des cônes soit dans le plan de l'autre cercle.

Je dis de plus que la condition est suffisante : car, si par l'une des génératrices du cône circonscrit à la sphère le long d'un cercle donné, je fais passer un plan quelconque. ce plan coupe la sphère suivant un cercle ayant pour tangente la génératrice considérée, et, par conséquent, orthogonal au cercle donné.

Le raisonnement précédent montre bien que la condition s'étend à chacun des deux sommets; on peut voir, du reste, que, le sommet du cône étant le pôle du plan du cercle de contact, le pôle de tout plan qui passe par ce sommet est situé dans le plan de ce cercle de contact; la condition indiquée est donc bien applicable pour les deux sommets.

On a un triangle ABC, *inscrit dans un cercle. Par le sommet* A *on mène une tangente au cercle; d'un point* M *de la circonférence on abaisse des perpendiculaires* MP *sur la tangente,* MQ, MR, MS *respectivement sur* BC, CA *et* AB. *Démontrer que l'on a*

$$MR.\ MS = MP.\ MQ.$$

Ce théorème, que l'on pourrait démontrer directement, est une conséquence du théorème suivant et se démontre de même :

Si un quadrilatère ABCD *est inscrit à une circonférence, et que d'un point* M *de cette circonférence on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est égal au produit des deux autres* (*).

En effet, si nous menons les droites MA et MC, les deux triangles MAP, MCR, qui sont rectangles et ont un angle aigu égal, sont semblables, et donnent

$$\frac{MP}{MR} = \frac{MA}{MC}.$$

De même les deux quadrilatères ABCM, SBQM étant l'un inscrit, l'autre inscriptible puisqu'il a deux angles opposés droits, les angles AMS, CMQ sont égaux et on en tire

$$\frac{MS}{MQ} = \frac{MA}{MC}.$$

On en déduit l'égalité $\frac{MS}{MQ} = \frac{MP}{MR}$.

Si maintenant nous supposons que le point D se rapproche indéfiniment du point A, le côté AD devient la tangente en A et comme, dans le raisonnement, nous ne nous sommes pas occupés de la longueur des côtés, nous arrivons au théorème proposé.

Si nous supposons successivement que ce soit l'un des côtés autre que AC qui se réduise à la tangente, nous aurons, en appelant MP, MT, MU les perpendiculaires sur les tangentes menées à la circonférence par les trois sommets du triangle inscrit :

$$MP.\,MQ = MR.\,MS$$
$$MT.\,MR = MQ.\,MS$$
$$MU.\,MS = MR.\,MQ.$$

En multipliant membre à membre, il vient, après réduction

$$MP.\,MT.\,MU. = MR.\,MQ.\,MS.$$

Donc, si l'on considère un triangle inscrit à une circonférence et le triangle circonscrit tel que les points de contact de ce dernier triangle soient aux sommets du premier, le produit des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence sur les côtés du triangle inscrit est égal aux

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

produit des perpendiculaires abaissées du même point sur les côtés du triangle circonscrit.

Soient AB *un arc de cercle,* M *son milieu,* C *et* D *deux points quelconques de la circonférence; démontrer que, si l'on a*

$$\frac{\sin CA}{\sin CB} = \frac{\sin DA}{\sin DB},$$

on aura

$$tg^2 AM = tg\ MC\ .\ MD\ (*).$$

Il est d'abord évident que, des deux points C et D, l'un est sur l'arc AMB, l'autre sur l'autre partie de la circonférence: sans quoi, si les deux points C et D étaient entre A et B, la somme des arcs CA et CB étant égale à DA + DB et les sinus ayant le même rapport, les points C et D seraient confondus.

Cela posé, on a $AB = CA + CB$,

avec $AB = DA - DB$, par exemple.

Puis, de l'égalité proposée, on tire, par une propriété des proportions,

$$\frac{\sin CA - \sin CB}{\sin CA + \sin CB} = \frac{\sin DA - \sin DB}{\sin DA + \sin DB},$$

ou bien

$$\frac{tg\,\frac{CA - CB}{2}}{tg\,\frac{CA + CB}{2}} = \frac{tg\,\frac{DA - DB}{2}}{tg\,\frac{DA + DB}{2}}.$$

Or on a

$$CA - CB = 2MC;$$
$$CA + CB = DA - DB = 2AM;$$
$$DA + DB = 2DM.$$

On a donc bien, en remplaçant,

$$\frac{tg\ MC}{tg\ MA} = \frac{tg\ MA}{tg\ MD}.$$

Étant donné l'angle x *par la relation*

$$\sin x = \frac{a - b}{a + b},$$

déterminer

$$tg\left(45 - \frac{x}{2}\right).$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

De la relation donnée, on tire facilement

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{b}{a}$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{x}{2}\right)} = \frac{b}{a}.$$

Mais les angles $45 - \frac{x}{2}$ et $45 + \frac{x}{2}$ sont complémentaires; on a donc $\operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{x}{2}\right) = \frac{b}{a}$, qui est la relation cherchée.

Des droites de l'espace qui coupent deux autres droites données en parties proportionnelles sont-elles parallèles à un même plan (*) ?

Soient les deux droites AB et CD, partagées en parties proportionnelles aux points EF pour l'une, HK pour l'autre; je mène AM égal et parallèle à CD, et je prends les points I, L tels que AI = CH, IL = HK; alors IH est parallèle à AC; il en est de même pour les lignes LK et MD. De même, je mène CQ égal et parallèle à AB, et je prends AE = CN, EF = NP. Donc EN, FP et BQ sont parallèles à AC. On verrait de même que les lignes EI, FL, BM sont parallèles entre elles; donc le plan IEH est parallèle au plan LFK et au plan MBD. Il en résulte que toutes les droites qui partagent AB et CD en parties proportionnelles sont parallèles au plan qui est parallèle à BD et AC.

QUESTION 186

Solution par M. du Motel, élève au Lycée Saint-Louis.

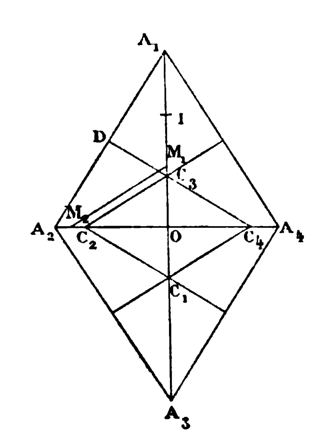
On considère un losange $A_1 A_2 A_3 A_4$. *Soit* C_4 *le centre du cercle circonscrit au triangle* $A_1 A_2 A_3$. *On a ainsi quatre points* C_1, C_2, C_3, C_4. *On prend les milieux des longueurs* $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$A_4 C_4$. *Démontrer que la figure formée par ces quatre points est un losange homothétique à celui des points* C_1, C_2, C_3, C_4.

(De Longchamps).

Soient M_1, M_2, les milieux de $A_1 C_1$, $A_2 C_2$. Il suffit de démontrer que $\frac{OM_2}{OM_1} = \frac{OC_2}{OC_3}$.



Or

$$OM_2 = \frac{OC_2 + OA_2}{2} = \frac{A_2 C_4}{2}.$$

De plus I étant le milieu de $A_1 C_3$, $IM_1 = OC_3$. Donc $OM_1 = IC_3 = \frac{A_1 C_3}{2}$.

Dès lors

$$\frac{OM_2}{OM_1} = \frac{A_2 C_4}{A_1 C_3}.$$

Soit D le milieu de $A_1 A_2$.

Les triangles semblables $A_2 C_4 D$, $A_1 D C_3$, donnent

$$\frac{A_1 C_4}{A_1 C_3} = \frac{A_2 D}{D C_3} = \frac{A_1 D}{D C_3};$$

mais dans les triangles semblables $A_1 D C_3$, $C_2 OC_3$ on a

$$\frac{A_1 D}{D C_3} = \frac{OC_2}{OC_3};$$

donc

$$\frac{A_2 C_4}{A_1 C_3} = \frac{OC_2}{OC_3}$$

et le théorème est démontré.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Lagier, à Autun.

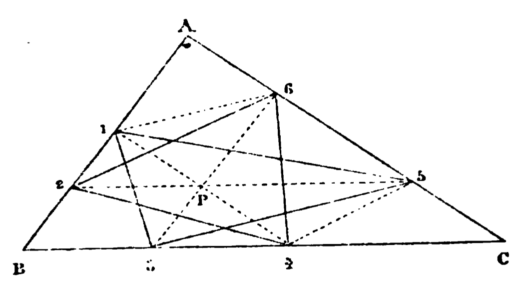
QUESTION 266

Solution par M. H. BOURGET, élève au Collège d'Aix.

On donne un point P *dans l'intérieur d'un triangle. Par ce point, on mène des parallèles aux côtés; la parallèle* AC *rencontre les côtes aux points* 1 *et* 4; *la parallèle* BC *aux points* 2 *et* 5,

enfin la parallèle AB *rencontre les côtés aux points* 3 *et* 6 ; *en joignant les points* 1, 3, 5, *on forme un triangle; de même pour les points* 2, 4, 6. *On demande :* 1° *de démontrer que ces deux triangles sont équivalents ;* 2° *de déterminer le point* P *de façon que le triangle* 1, 3, 5 *soit maximum.*

1° Tirons les lignes 2, 3; 1, 6; 4, 5; le triangle 2 3 P est équivalent au triangle 1 3 P comme ayant même base et même hauteur; de même 1 6 P et 4 5 P sont respectivement équivalents à 1 5 P et à 3 5 P. Ainsi le triangle 1 3 5 est équivalent à



la somme des triangles 2 3 P, 1 6 P, 4 5 P. On prouvera de même que le triangle 2 4 6 est équivalent à la même somme; donc, les deux triangles 2 4 6, 1 3 5 sont équivalents entre eux.

2° Il s'agit de trouver le maximum de la somme des triangles 2 3 P, 1 6 P, 4 5 P. Or, ces triangles étant chacun la moitié d'un parallélogramme, la question revient à trouver le maximum de la somme des trois parallélogrammes B 2 P 3, A 6 P 1, C 4 P 5. On voit que cette somme sera maxima lorsque la somme des surfaces 3 4 P, 5 6 P, 1 2 P sera minima. Soient α, β, γ ces surfaces semblables entre elles et semblables au grand triangle. Si l'on désigne par Σ la somme de α, β et γ, et si l'on pose $34 = u$, $B3 = v$, $4C = w$, on aura

$$\frac{\alpha}{u^2} = \frac{\beta}{v^2} = \frac{\gamma}{w^2} = \frac{\Sigma}{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{S}{a^2},$$

a étant la ligne BC.

De là on tire $\quad \Sigma = \dfrac{S(u^2 + v^2 + w^2)}{a^2}$.

$\dfrac{S}{a^2}$ étant une constante, Σ sera minimum quand la somme $u^2 + v^2 + w^2$ sera minima.

Le problème est donc ramené au suivant :

Trouver sur une droite a *deux points tels que la somme des carrés des segments* x, y, z, *déterminés par ces points, soit minima.*

Dans la solution de ce problème nous distinguerons trois cas :

Ou les segments sont égaux,

Ou il y en a deux plus petits et un qui sera forcément plus grand,

Ou deux plus grands et un plus petit.

Premier cas. — Soit $x = y = z = \frac{a}{3}$.

En élevant au carré x, y et z et faisant la somme

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Deuxième cas. — Soit $x = \frac{a}{3} - \varepsilon$; $y = \frac{a}{3} - \delta$; alors

$$z = \frac{a}{3} + \varepsilon + \delta,$$

et, de même que dans le cas précédent, il vient

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{9} + 2\varepsilon^2 + 2\delta^2 + 2\varepsilon\delta;$$

d'où nous concluons que de ces deux cas le premier est le minimum.

Troisième cas. — Soit $x = \frac{a}{3} + \varepsilon$; $y = \frac{a}{3} + \delta$; dès lors $z = \frac{a}{3} - \varepsilon - \delta$. Ce cas est identique au précédent, si nous changeons les signes de ε et de δ. Et comme dans le cas précédent, ces quantités n'entrent que comme facteurs ou comme carrés; on trouvera donc la même valeur pour l'expression considérée.

Donc dans tous les cas le minimum de la somme $x^2 + y^2 + z^2$ sera égal à $\frac{a^2}{3}$ et x, y, z égaleront chacun $\frac{a}{3}$. C'est-à-dire qu'il faut par le tiers de a mener une parallèle à un côté du triangle ABC, faire de même par les deux tiers, et l'in-

tersection de ces droites sera le point P, qui donnera le maximum de l'aire du triangle 1 3 5. Ce point P sera le point de rencontre des médianes du triangle ABC.

QUESTION 281

Solution par M. Joly, élève au Lycée de Tarbes.

Résoudre le système

$$\frac{1}{ax - by - 1} + \frac{1}{by - ax - 1} = \frac{1}{ax + by - 1}.$$

$$bx + ay = m.$$

Chassant les dénominateurs de la première équation, il vient, après réductions

$$a^2x^2 - 2ax + 1 = 2by\,(1 + ax - b^2y^2);$$

remplaçons y par sa valeur $\frac{m - bx}{a}$, on a, après simplification,

$$x^2(a^2 + b^2) - 2x[a^3 + 2a^2bm - 2ab^2 + 2mb^3] + (a - bm)^2 = 0,$$

et si l'on pose $\quad 3b^2(a^2 + b^2)^2 = A,$

$$2a^3b^3 + 4ab^5 - 2a^5b - 2a^4b - 2a^2b^3 - b^5 = B$$

$$3a^2b^2(a^2 - b^2) = C,$$

la valeur de x devient

$$x = \frac{a^3 + 2a^2b - 2ab^2 + 2mb^3 \pm \sqrt{Am^2 - 2Bm - C}}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, on doit avoir

$$Am^2 - 2Bm - C > 0$$

ou $\quad A(m - m')(m - m'') > 0,$

ce qui exige que $\quad m \geq m'; \quad m \leq m''.$

Si ces conditions sont remplies, on aura pour chaque inconnue des valeurs bien déterminées.

$$m = m' \text{ est un minimum}$$

$$m = m'' \text{ est un maximum.}$$

On déduira aisément les valeurs correspondantes de x et de y.

QUESTION 284

Solution par M. L. Malcor, élève au Lycée du Havre.

Résoudre le système $\dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{121}{13}$.

On a, en divisant haut et bas par $x+y$:

$$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2-3xy};$$

or $x+y=2$; donc $x^2+y^2=4-2xy$.

remplaçant et simplifiant et il vient

$$65x^2y^2+103xy-276=-0;$$

d'où

$$(1)\ xy=\frac{92}{65}\ \text{et}\ xy=3\ (2);$$

(1) donne pour x et y des valeurs imaginaires Si l'on prend $xy=-3$, les valeurs d'x et d'y sont données par l'équation

$$X^2-2X-3=0;$$

d'où $x=3$, $y=-1$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Fleury, au Havre; Fievet, Boudignier, à Lille; Leclair, Masserand, à Passy; Bourget, à Aix; Gobert, au collège Chaptal, à Paris; Lapareillé, lycée Henri IV; Hellot. Tinel, à Rouen; Baudoin, à Beauvais; Barchat, à Vitry-le-François; de Lagenardière, à Besançon; Henry, à Brechaincourt (Vosges); Calon, lycée Louis-le-Grand; Simonet, à Neufchâteau; Gino Loria, à Mantoue; Joly, à Tarbes; Perrier, à Lons-le-Saulnier.

SUR UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION

Par M. **Catalan**.

Les *Nouvelles Annales* ont publié récemment (*) un intéressant article de M. Candèze, élève de l'École polytechnique; mais la limite indiquée est moins avantageuse qu'une autre limite attribuée à Lagrange (**).

(*) *Nouvelles Annales*, février 1881.

(**) *Nouvelles Annales* (t. Ier, 1842, p. 58). — Cours d'analyse de l'université de Liége.

En effet,

$Ax^m \ldots - Nx^{m-n} - Px^{m-p} \ldots - Qx^{m-q} = 0$ (1)

étant la préposée, posons $x = Ky$, et disposons du nombre K de manière que dans la transformée

$AK^m y^m \ldots - NK^{m-n} y^{m-n} \ldots - PK^{m-p} y^{m-p} = 0$

le coefficient du premier terme surpasse tous les coefficients négatifs (ceux-ci étant, bien entendu, pris en valeurs absolues). Alors, d'après un lemne préliminaire, 2 sera une limite supérieure des racines de la transformée.

Or, la condition énoncée donne

$$K > \sqrt[n]{\frac{N}{A}},\ K > \sqrt[p]{\frac{P}{A}}\ K, > \sqrt[q]{\frac{Q}{A}} \ldots,$$

par conséquent, *la plus grande des quantités*,

$$2\sqrt[n]{\frac{N}{A}},\ 2\sqrt[p]{\frac{P}{A}},\ 2\sqrt[q]{\frac{Q}{R}},\ldots$$

sera limite supérieure.

2° Supposons pour fixer les idées

$$\sqrt[p]{\frac{P}{A}} > \sqrt[q]{\frac{Q}{A}} > \sqrt[n]{\frac{N}{A}} \ldots$$

Il est clair que l'on a

$$2\sqrt[p]{\frac{P}{A}} > \sqrt{\frac{P}{A}} + \sqrt{\frac{Q}{A}}.$$

Donc la limite trouvée par M. Candèze est moins *avantageuse* que l'autre.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE STURM

Lorsqu'on applique le théorème de Sturm à la recherche des conditions de réalité des racines d'une équation de degré m, on est conduit à poser $m - 1$ inégalités constituant $m - 1$ conditions. Ces conditions sont-elles distinctes les unes des autres? peuvent-elles en général se ramener à un nombre de conditions moindre?

Soient V, V_1, $V_2, \ldots V_m$ les polynômes composant la suite de Sturm pour l'équation $V = 0$ de degré m; pour que les racines soient toutes réelles, on sait que les coefficients $1, p_1, p_2, \ldots p_m$ des premiers termes de $V, V_1, V_2, \ldots V_m$ doivent être tous positifs. On peut ajouter qu'il y aura autant de couples de racines imaginaires que de variations dans la suite $1, p_1, p_2, \ldots p_m$ (dont les deux premiers termes sont essentiellement positifs). Le nombre maximum de variations possibles est évidemment $m - 1$; mais il ne peut être atteint lorsque m surpasse 2, car on aurait $2m - 2$ racines imaginaires, nombre plus grand que le degré de l'équation. Si l'on forme le tableau de toutes les alternances de signes que peuvent présenter les $m - 1$ quantités $p_2, p_3, \ldots p_m$, il est assez facile de reconnaître que le nombre des combinaisons possibles est 2^{m-1}; mais il faudra rejeter toutes celles qui donnent un nombre de variations supérieur à $\frac{m}{2}$ dans la suite complète, si m est pair, supérieur à $\frac{m-1}{2}$, si m est impair.

On ne peut donc pas disposer tout à fait arbitrairement des signes de $p_2, p_3, \ldots p_m$; ces fonctions des coefficients de l'équation ne sont pas indépendantes les unes des autres. Toutefois il n'est pas exact de dire que les conditions de réalité des racines fournies par le théorème de Sturm rentrent nécessairement et dans tous les cas les unes dans les autres.

Ce qui est seulement vrai, c'est qu'on n'a pas le droit de changer arbitrairement le sens des inégalités qui expriment ces conditions, car on pourrait être conduit à des absurdités. Nous allons éclairer ces considérations par des exemples.

1° *Équation du troisième degré.* — On a

$V = x^3 + 3px^2 + 3qx + r$

$V_1 = x^2 + 2px + q$

$V_2 = 2x(p^2 - q) + pq - r \ldots (p^2 - q = p_2)$

$V_3 = p_3 = (pq - r)(4p^3 - 5pq + r) - 4q\ (p^2 - q)^2$

Toutes les combinaisons de signes des p_i sont données

par le tableau :

$(++++)\ (+++-)\ (++--)\ (++-+)$.

La dernière ne peut avoir lieu, car on aurait deux couples de racines imaginaires. Donc, si p_3 est positif, p_2 le sera aussi ; ainsi, pour l'équation du 3e degré, les conditions de réalité des racines, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ se réduisent à une seule : $p_3 > 0$.

C'est ce qu'il est facile de vérifier directement.

La condition $p_3 > 0$ peut s'écrire

$$(pq - r)[4p(p^2 - q) - (pq - r)] - 4q(p^2 - q)^2 > 0$$

ou $4q(p^2 - q)^2 - 4p(p^2 - q)(pq - r) + (pq - r)^2 < 0$.

Si q est négatif, la condition $p_2 > 0$ ou $p^2 - q > 0$ est satisfaite d'elle-même. Si q est positif, l'inégalité ci-dessus peut s'écrire

$$(p^2 - q)^2 - \frac{p}{q}(p^2 - q)(pq - r) + \frac{(pq - r)^2}{4q} < 0$$

$$\left[p^2 - q - \frac{p}{2q}(pq - r)\right]^2 + \frac{(pq - r)^2}{4q} - \frac{p^2(pq - r)^2}{4q^2} < 0$$

$$\left[p^2 - q - \frac{p}{2q}(pq - r)\right]^2 + \frac{(pq - r)^2}{4q}\left[1 - \frac{p^2}{q}\right] < 0$$

et l'on doit avoir nécessairement $1 - \frac{p^2}{q} < 0$ ou $p^2 - q > 0$.

2° *Équation du quatrième degré.* — Nous considérerons l'équation simplifiée $x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0$. On a

$V_1 = x^3 + 3px + q$

$V_2 = - 3px^2 - 3qx - r \ldots (p_2 = - p)$

$V_3 = x(pr - 3q^2 - 9p^3) - q(3p^2 + r) \ldots (p_3 = pr - 3q^2 - 9p^3)$

$V_4 = p_4 = r(pr - 3q^2 - 9p^3)^2 + 3pq^2(3p^2 + r)^2$
$\qquad + 3q^2(3p^2 + r)(pr - 3q^2 - 9p^3)$.

Les conditions de réalité sont $- p > 0$, $p_3 > 0$, $p_4 > 0$.

Toutes les combinaisons de signes des p_i sont

$(+++++)\ (++++-)\ (+++-+)\ (+++--)$
$(++-++)\ (++--+)\ (++---)\ (++-+-)$

On ne peut plus dire ici que les trois conditions de réalité rentrent les unes dans les autres. Mais il y a une combinaison de signes qui ne peut se présenter, c'est la dernière : car elle donnerait trois couples de racines imaginaires.

Il est très facile de voir directement qu'on ne peut avoir

en même temps $p_2 < 0$, $p_3 > 0$, $p_4 < 0$ ou bien $p > 0$, $pr - 3q^2 - 9p^3 > 0$, $p_4 < 0$.

Si les deux premières inégalités ont lieu, r est nécessairement positif; alors les trois produits dont la somme constitue p_4 sont séparément positifs et on ne peut avoir $p_4 < 0$.

3° *Équation du cinquième degré.* — La formation de la suite de Sturm conduisant à des calculs d'une excessive longueur, nous ferons seulement les remarques suivantes.

Il y a seize combinaisons de signes pour les quantités p_2, p_3, p_4 et p_5. Mais parmi ces seize combinaisons, il y en a cinq qui ne peuvent se présenter, savoir

$(+-+-)$ $(-+--)$ $(-++-)$ $(--+-)$ $(-+-+)$.

Les quatre premières donnent trois couples de racines imaginaires, la cinquième donne quatre couples.

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœnigs**, élève à l'École normale supérieure.

Rappelons d'abord ce théorème :

Si $f(x)$ est un polynôme entier en x et que deux valeurs α et β d'x donnent pour $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ des valeurs de signes contraires, il y a sûrement entre α et β une racine de $f(x) = 0$.

En substituant $-\infty$, 0 et $+\infty$ dans une équation de degré impair, par exemple dans $x^3 + px^2 + qx + r = f(x) = 0$, on trouve les signes $-$, $+$, $+$ ou $-$, $-$ $+$ selon que r est positif ou négatif : il y a dans un cas une racine négative et dans l'autre une racine positive. Ce qui montre dans tous les cas que

L'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ admet toujours une racine réelle. Appelons a cette racine et posons

$$f_1(x) = x^2 + (p + a)\, x + (a^2 + pa + q).$$

En divisant $f(x)$ par $(x - a)$ on trouve

$$f(x) = (x - a)\, f_1(x) + f(a),$$

et comme $f(a) = 0$,

$$f(x) = (x - a)\, f_1(x).$$

On démontre dès les débuts de l'Algèbre que tout polynôme du degré n qui s'annule pour plus de n valeurs distinctes données à x est identiquement nul : ainsi $f(x) = 0$ n'a pas plus de trois racines. L'une d'elles est a, les deux autres sont celles qui annulent $f_1(x)$. La condition de réalité des racines de $f_1(x) = 0$ s'exprime en posant

$$\varphi(x) = 3x^2 + 2px + 4q - p^2,$$

par l'inégalité $\varphi(a) < 0$.

Si les racines de $\varphi(x) = 0$ sont imaginaires, c'est-à-dire si $p^2 - 3q < 0$, $\varphi(x)$ n'est jamais négatif et $f(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle.

Si les racines α et β de $\varphi(x) = 0$ sont réelles, l'inégalité $\varphi(a) < 0$ exprime que a est compris entre α et β. En résumé, posons

$$\alpha = \frac{-p - 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \quad \beta = \frac{-p + 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3}.$$

Si les racines de l'équation $f(x) = 0$ *sont toutes réelles, elles sont comprises entre* α *et* β.

Si une seule racine de l'équation $f(x) = 0$ *est réelle, ou bien* α *et* β *sont imaginaires* ($p^2 - 3q < 0$), *ou bien si* α *et* β *sont réelles, l'unique racine de* $f(x) = 0$ *est extérieure à ces quantités.*

Supposons toutes les racines de $f(x) = 0$ réelles, et soient $a < b < c$ ces racines. On obtient en substituant $-\infty$ et $(a - \varepsilon)$ le signe $-$; comme $\alpha < a$ le résultat de la substitution de α est négatif, car s'il était positif il y aurait une racine entre $-\infty$ et α, et les deux autres ne sauraient être réelles : pour la même raison $f(\beta) > 0$.

Ainsi quand les racines sont réelles, on a $f(\alpha) < 0$.

Supposons réciproquement que $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$; il y a une racine réelle de $f(x) = 0$ comprise entre α et β et par suite, en vertu d'un théorème précédent, en appelant a cette racine, $\varphi(a) < 0$.

Ce qui exprime que les deux autres racines b et c sont réelles, donc

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x) = 0$ *ait ses trois racines réelles, c'est que* $f(\alpha) < 0$ *et* $f(\beta) > 0$.

En effectuant les substitutions, on trouve

$$2p^3 - 9pq + 27r - 2(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q} < 0.$$
$$2p^3 - 9pq + 27r + 2(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q} > 0.$$

c'est-à-dire

$$-2(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q} < 2p^3 - 9pq + 27r < 2(p^2 - 3q)\sqrt{p^2 - 3q}$$

Or on sait qu'en désignant par A une quantité positive, la condition

$X^2 - A^2 < 0$ comprend les suivantes $-A < X < A$.

L'inégalité ci-dessus se traduit donc de la sorte :

$$(2p^3 - 9pq + 27r)^2 - 4(p^2 - 3q)^3 < 0$$

ou bien

$$-(4q^3 + 27r^2) + 18pqr + p^2q^2 - 4p^3r > 0.$$

Ce qui est la condition bien connue pour que les trois racines soient réelles.

SUR LE THÉORÈME DE PASCAL

On sait comment on déduit ce théorème de cette propriété plus générale des coniques : *Si trois coniques* S_1, S_2, S_3, *ont une sécante commune* Δ, *les cordes* Δ_1 *communes à* S_2 *et* S_3; Δ_2 *à* S_1, S_3 ; Δ_3 *a* S_1, S_2, *concourent au même point.*

Mais il est intéressant de démontrer directement ce théorème, et on peut le faire très simplement comme nous allons l'indiquer.

Représentons par $P_1 = 0$ $P_2 = 0 \dots$ $P_6 = 0$ les équations des six côtés de l'hexagone, et par $\alpha = 0$ l'équation d'une diagonale de cet hexagone. La conique proposée étant circonscrite au quadrilatère

$$P_1 = 0,\ P^2 = 0,\ P_3 = 0,\ \alpha = 0$$

a pour équation $\qquad P_2\,\alpha = P_1\,P_3. \qquad$ (1)

Si on considère cette même conique comme circonscrite au quadrilatère

$$P_4 = 0,\quad P_5 = 0,\ P_6 = 0,\quad \alpha = 0$$

son équation sera $\qquad P_4\,P_6 = P_5\,\alpha. \qquad$ (2)

Si avec (1) et (2), on forme la combinaison

$$P_2\,P_4\,P_6 = P_1\,P_3\,P_5, \qquad (3)$$

cette équation représente une courbe du troisième degré, et les coordonnées x' y' d'un point quelconque de la conique considérée satisfaisant à (1) et à (2) vérifieront aussi la combinaison (3). Or, *cette équation* (3) *du troisième degré, étant satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque de la conique, représente donc une conique et une droite* : tous les points dont les coordonnées satisfont à l'équation (3) et qui ne seront pas sur la conique, seront donc en ligne droite. Tels sont les points $P_1 = o$ $P_4 = o$; $P_2 = o$, $P_6 = o$; enfin $P_3 = o$, $P_6 - o$; c'est précisément le théorème de Pascal.

QUESTIONS D'EXAMEN

Parmi les questions qui reviennent le plus fréquemment dans les examens, il en est une catégorie qui mérite de fixer spécialement l'attention, en raison de la diversité des méthodes auxquelles elle donne lieu : c'est la formation de l'équation générale d'une conique satisfaisant à un certain nombre de conditions données, et lorsque ces conditions sont au nombre de quatre pour les coniques à centre, ou de trois pour la parabole et l'hyperbole équilatère, la recherche du lieu décrit par un élément remarquable de la conique dont il s'agit. Lorsque ces questions n'ont pas été préparées à l'avance, et que l'on prend comme données des conditions quelconques, elles sont généralement difficiles à résoudre directement, et nous donnerons quelques exemples des procédés analytiques plus ou moins indirects à l'aide desquels on peut tourner les difficultés qu'elles présentent. Quant aux solutions géométriques, sans les proscrire d'une façon absolue, nous ne les présenterons le plus souvent que comme moyens de vérification, parce que c'est à la solution analytique que l'examinateur s'attache de préférence et que bien souvent même, en posant la question, c'est cette solution seulement qu'il a en vue.

Voici d'abord un premier exemple, dans lequel on arrive assez facilement au lieu demandé en en cherchant préalablement un autre.

On considère toutes les paraboles pour chacune desquelles l'axe rencontre la directrice en un même point A *donné, et qui ont en outre une tangente commune; on demande le lieu décrit par leur sommet.*

Prenons pour axe des x la tangente commune, et pour axe des y la perpendiculaire abaissée sur cette tangente du point donné A, lequel est le pied de chaque directrice sur l'axe correspondant. Soit h l'ordonnée de ce point.

L'équation focale des courbes du deuxième degré étant $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+t)^2$, pour que ces courbes soient des paraboles, il faut que leur excentricité soit égale à l'unité, ce qui donne

$$m^2+n^2=1. \qquad (1)$$

Écrivons d'abord que l'axe des x est tangent à la courbe, en exprimant que l'équation aux x des points d'intersection de la courbe avec Ox a ses racines égales; on aura, pour $y=0$, $\qquad (x-\alpha)^2+\beta^2=(mx+t)^2$

c'est-à-dire

$$x^2(1-m^2)-2x(\alpha+mt)+\alpha^2+\beta^2-t^2=0.$$

La condition de tangence à l'axe des x est donc

$$(\alpha+mt)^2=(1-m^2)(\alpha^2+\beta^2-t^2)$$

c'est-à-dire $\qquad 2\alpha mt=\beta^2-t^2-m^2\alpha^2-m^2\beta^2,$

ou bien $\qquad (m\alpha+t)^2=\beta^2(1-m^2). \qquad (2)$

L'axe est la perpendiculaire abaissée du foyer (α, β) sur la directrice $(mx+ny+t=0)$;

son équation est donc

$$m(y-\beta)-n(x-\alpha)=0. \qquad (3)$$

Il faut écrire que l'axe et la directrice passent par le point $(x=0,\ y=h)$;

on a ainsi: $\qquad m(h-\beta)+n\alpha=0 \qquad (4)$

et $\qquad nh+t=0. \qquad (5)$

Pour avoir directement le lieu des sommets, il faudrait éliminer m, n, t, α et β entre l'équation de la courbe et les équations (1), (2), (3), (4) et (5). Mais ce calcul serait labo-

rieux; au lieu de procéder ainsi, cherchons le lieu des foyers, pour lequel il suffit d'éliminer m, n, t entre (1), (2), (3) et (4).

L'équation (2) donne, en vertu de (1),

$$(m\alpha + t)^2 = \beta^2 n^2;$$

prenons $m\alpha + t = \beta n$; l'équation (3) donnant $t = -nh$, on a $m\alpha = n(h + \beta)$ avec l'équation (4).

De ces deux dernières on tire par division

$$\frac{h-\beta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{h+\beta}, \qquad \text{d'où } h^2 - \beta^2 + \alpha^2 = 0. \quad (6)$$

L'équation du lieu des foyers est donc $\beta^2 - \alpha^2 = h^2$, qui représente une hyperbole équilatère rapportée à son centre et à ses axes, l'axe transverse étant dirigé suivant Oy, et ayant pour demi-longueur h, c'est-à-dire que le point A donné est un de ses sommets réels.

De ce lieu on peut alors déduire très facilement celui des sommets. En effet, le sommet de chaque parabole est sur l'axe, à égale distance du foyer et de la directrice; ses coordonnées X et Y sont donc données par les formules

$$X = \frac{\alpha}{2} \text{ et } Y = \frac{\beta + h}{2}.$$

Par conséquent $\alpha = 2X$ et $\beta = 2Y - h$, et comme α et β satisfont à la relation (6), on a entre X at Y la relation

$$(2Y - h)^2 - 4X^2 = h^2, \text{ ou } \left(Y - \frac{h}{2}\right)^2 - X^2 = \frac{h^2}{4},$$

équation d'une autre hyperbole équilatère dont le centre est sur l'axe des y au milieu de la distance oA, et dont les axes sont parallèles aux axes des coordonnées, l'axe transverse étant dirigé suivant Oy, et ayant $\frac{h}{2}$ pour demi-longueur, de sorte que les sommets réels sont en O et A.

Il est souvent commode d'opérer comme dans l'exemple précédent, et tel lieu dont la recherche directe peut être très difficile, s'obtiendra aisément par l'intermédiaire du lieu d'un autre élément auquel l'élément considéré est lié par des relations simples.

— La transformation des coordonnées est une méthode générale, toujours applicable; lorsqu'elle ne conduit pas à

des calculs trop laborieux, elle est souvent la plus commode de toutes. En voici un exemple :

On considère toutes les hyperboles équilatères qui ont un sommet réel commun, ainsi qu'un point de l'une des asymptotes. On demande l'équation générale de ces hyperboles et le lieu de leurs foyers.

Soit A le sommet réel donné, et B le point commun aux asymptotes. Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à AB au point A. Une des hyperboles considérées a pour équation, par rapport à son centre et à ses axes, $x^2 - y^2 = a^2$.

Si φ est l'angle que fait la droite AB avec l'axe transverse. les formules à employer pour rapporter la courbe aux axes Ax et Ay, sont

$$x = a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

et l'équation de l'hyperbole dont il s'agit est, par rapport aux nouveaux axes,

$$(a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 - (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = a^2.$$

Le faisceau des asymptotes a pour équation, dans le nouveau système d'axes,

$$(a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 - (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = 0.$$

Si d désigne l'abscisse du point B, il faut exprimer que l'équation précédente est vérifiée pour $y' = 0$, $x' = d$, ce qui donne $(a + d\cos\varphi)^2 - d^2 \sin^2\varphi = 0.$

Si l'on veut l'équation générale des hyperboles considérées en fonction d'un seul paramètre, on tire de cette dernière relation $\qquad a + d\cos\varphi = \pm d \sin\varphi,$

d'où $\qquad a = d(\pm \sin\varphi - \cos\varphi),$

ce qui conduit à l'équation générale

$$(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2d(\pm \sin\varphi - \cos\varphi)(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi) - (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 = 0$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\varphi = \lambda$.

$$(x' - \lambda y')^2 + 2d(\pm\lambda - 1)(x' - \lambda y') - (\lambda x' + y')^2 = 0.$$

c'est-à-dire

$$(1 - \lambda^2)(x'^2 - y'^2) - 4\lambda x'y' + 2d(x - \lambda y')(\pm\lambda - 1) = 0.$$

Pour avoir le lieu des foyers, il suffit de remarquer que

les coordonnées des foyers, dans le premier système d'axes, sont

$$\alpha = \pm a\sqrt{2} \text{ et } \beta = 0.$$

Dans le système (Ax, Ay), elles seront donc données par les relations

$$a + \alpha' \cos\varphi - \beta' \sin\varphi = \pm a\sqrt{2}$$

et

$$\alpha' \sin\varphi + \beta' \cos\varphi = 0.$$

En les joignant à la condition $a + d\cos\varphi = \pm d\sin\varphi$, on obtient trois équations entre lesquelles on éliminera φ et a, pour avoir l'équation en α' et β' qui représente le lieu.

On a ainsi

$$d(\pm \sin\varphi - \cos\varphi) + \alpha' \cos\varphi - \beta' \sin\varphi = \pm d\sqrt{2}\,(\pm \sin\varphi - \cos\varphi),$$

équation homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

On a d'ailleurs $\dfrac{\sin\varphi}{\beta'} = -\dfrac{\cos\varphi}{\alpha'}$.

L'équation du lieu est donc

$$d(\pm\beta' + \alpha') - \alpha'^2 - \beta'^2 = \pm d\sqrt{2}\,(\pm\beta' + \alpha')$$

ou, en remplaçant β' et α' par x et y, et réduisant,

$$d(x \pm y)(1 \pm \sqrt{2}) = x^2 + y^2.$$

Cette équation représente un cercle, dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les signes qu'elle renferme.

Il y a quatre de ces cercles. Le signe à choisir dans le facteur $(1 \pm \sqrt{2})$ dépend de celui des deux foyers dont on considère le lieu, et le signe à choisir dans le facteur $(x \pm y)$ dépend de celle des asymptotes sur laquelle se trouve le point fixe B.

On a ici un exemple vraiment remarquable de la facilité avec laquelle la méthode par la transformation des coordonnées conduit à l'équation d'un lieu dont la recherche directe exigerait des calculs fort pénibles. On obtiendrait tout aussi aisément le lieu des seconds sommets réels, celui des centres et ceux des sommets imaginaires, c'est-à-dire des sommets des hyperboles qui sont les conjuguées des proposées ; nous engageons nos lecteurs à les chercher, à titre d'exercice utile.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 174.)

Classe d'une courbe. — L'équation tangentielle $f(u,v) = 0$ d'une courbe établissant entre les coordonnées u et v d'une droite la relation qui exprime que cette droite est tangente à la courbe considérée, si l'on veut déterminer en particulier celle de ces tangentes qui passe par un point donné (α,β) du plan, il faudra résoudre le système des deux équations

$$\left|\begin{array}{l} u\alpha + \beta + 1 = 0 \\ f(u,v) = 0 \end{array}\right.$$

(en prenant l'équation de la droite sous la forme $ux + vy + 1 = 0$).

La première étant du premier degré, le système admet autant de solutions qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation $f(u,v) = 0$. Ce degré est exprimé par celui du terme qui contient les variables u, v au plus haut degré. Il y a donc autant de tangentes passant par un point donné du plan qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation $f(u,v) = 0$. Ce nombre est ce que l'on appelle la *classe* de la courbe.

$F(x,y) = 0$ étant l'équation en coordonnées cartésiennes de la même courbe, le degré de $F(x,y)$ indique le nombre des points de cette courbe situés sur une même droite; on sait que ce nombre est ce qu'on appelle l'*ordre* de la courbe.

Ces deux éléments, ordre et classe, ne sont pas les mêmes, sauf dans des cas particuliers; on sait, en effet, que l'on peut généralement mener d'un point du plan $m(m-1)$ tangentes à une courbe de l'ordre m; donc à partir du troisième degré, la classe de la courbe est supérieure à son ordre.

Les courbes du deuxième degré sont, au contraire, de la deuxième classe; nous avons, en effet, trouvé que l'équation tangentielle des coniques est du deuxième degré en u et v.

Les courbes de la première classe ne peuvent être que des

points; et, en effet, nous avons vu que l'équation du premier degré $Au + Bv + C = o$ représente un point.

La classe d'une courbe n'est pas toujours nécessairement $m(m-1)$; nous verrons, en effet, que l'existence de points singuliers dans la courbe $F(x, y) = o$ exerce une influence sur la classe de cette courbe, et que, dans ce cas, cette classe subit un abaissement.

— *Le premier membre de l'équation tangentielle des coniques est la forme adjointe de la forme quadratique ternaire qui constitue le premier membre de leur équation cartésienne homogène.* — Cette propriété, très importante, résulte, en effet, de ce que nous avons trouvé pour l'équation tangentielle de la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = o$ (1) l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix} = o \qquad (2)$$

dont le premier membre est, au signe près, la forme adjointe de la forme (1).

Le calcul que l'on a fait pour l'obtenir n'est autre, en effet, que le calcul qui sert à la formation de la forme adjointe, les variables nouvelles étant proportionnelles à u, v, w.

On a donc immédiatement, en vertu de cette remarque, le développement de l'équation (2) qui est

$$\left.\begin{array}{l} u^2(E^2 - CF) + v^2(D^2 - AF) + w^2(B^2 - AC) \\ \quad + 2vw(AE - BD) + 2wu(CD - BE) \\ \quad\quad + 2uv(BF - DE) \end{array}\right| = o$$

En changeant tous les signes, on a la forme adjointe elle-même égalée à zéro.

Il résulte de cette propriété que l'équation tangentielle des coniques jouit par conséquent de toutes les propriétés de la forme adjointe.

1° D'abord, la forme adjointe ayant pour expression générale (*)

$$\Delta'_{(a_{11})} X_1^2 + \Delta'_{(a_{22})} X_2^2 + \ldots\ldots + \Delta'_{(aik)} X_i X_k + \ldots\ldots$$

(*) Ce théorème et les suivants ont été démontrés dans notre travail de l'an dernier sur les formes quadratiques.

où Δ désigne le discriminant de la forme proposée, et les lettres a ses divers éléments, les coefficients de la forme qui constitue le premier membre de l'équation tangentielle des coniques doivent être les dérivées du discriminant de la forme (1) par rapport à ses divers éléments, c'est-à-dire les mineurs relatifs à ces mêmes éléments pris avec les signes dont ils sont affectés dans le développement du discriminant.

2° En second lieu, on sait que, lorsque l'invariant (qui n'est autre que le discriminant) d'une forme quadratique est nul, sa forme adjointe est un carré parfait. Donc si $\Delta = o$, le premier membre de (2) est un carré parfait. Or écrire que $\Delta = o$, c'est écrire que la forme (1) est un produit de deux facteurs linéaires; donc l'équation (1) représente dans ce cas deux lignes droites; les coordonnées de leur point d'intersection [point double de la courbe (1)], sont les coefficients x' y' z' de u, v, w dans la forme (2) mise sous la forme $(x'u + y'v + z'w)^2$. L'équation (2) exprime, en effet, que la droite $ux + vy + wz = o$ est tangente à la courbe (1); celle-ci étant formée de deux droites, il ne peut y avoir d'autres tangentes que des droites passant par le point double, puisque ces droites sont les seules qui rencontrent la courbe en deux points confondus; elles passent donc toutes par ce point double, et comme l'équation $ux + vy + wz = o$ exprime précisément que les droites qu'elle représente renferment le point (x, y, z), ce point est le point d'intersection des deux droites. En faisant le calcul, on trouve bien, comme il fallait s'y attendre, les coordonnées du centre de la conique générale représentée par (1). Si l'on représente par $au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2$ la forme (2), et que l'on prenne ses demi-dérivées par rapport aux variables u, v, w

$$1/2\, f'_u = au + bv + dw$$
$$1/2\, f'_v = bu + cv + ew$$
$$1/2\, f'_w = du + ew + fw$$

on reconnaît que quand $\Delta = o$ tous les mineurs de son discriminant sont nuls; car chacun d'eux contient Δ en facteur. Les dérivées partielles de la forme sont donc proportionnelles (ou, en d'autres termes, multiples d'un même

polynôme linéaire); c'est la condition connue pour que la forme soit un carré parfait.

3° L'invariant de la forme adjointe d'une forme quadratique est le réciproque de l'invariant de cette forme, car il a pour éléments les mineurs de ce dernier.

Dans le cas actuel, il est

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Or, on sait que n étant le nombre des variables d'une forme, le réciproque de Δ est égal à Δ^{n-1}. On aura donc dans le cas actuel

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}^2$$

D'ailleurs, il est facile d'établir immédiatement ce fait pour la forme qui nous occupe.

En multipliant les deux déterminants ci-dessus l'un par l'autre, on a pour produit

$$\begin{vmatrix} aA + bB + dD & bA + cB + eD & dA + eB + fD \\ aB + bC + dE & bB + cC + eE & dB + eC + fE \\ aD + bE + dF & bD + eE + eF & dD + eE + fF \end{vmatrix}$$

Mais à cause de la signification de a, b, c, d, e, f, on a

$$aA + bB + dD = \Delta, \quad bA + cB + eD = o, \quad dA + eB + fD = o,$$
$$aB + bC + dE = o, \quad bB + cC + eE = \Delta, \quad dB + eC + fE = o.$$
$$aD + bE + dF = o, \quad bD + eE + eF = o, \quad dD + eE + fF = \Delta.$$

Si donc on appelle Δ' le réciproque de Δ, il vient

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & o & o \\ o & \Delta & o \\ o & o & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$$

Donc $\Delta' = \Delta^2$; C. Q. F. D.

Il résulte de là que Δ' et Δ sont toujours nuls en même temps; ce qui montre que si les mineurs de Δ sont tous nuls, auquel cas Δ est *a fortiori* nul lui-même, Δ' devra être nul, ou, en d'autres termes, que la réciproque du théorème 2° est vraie, c'est-à-dire que la forme adjointe étant un carré parfait, la forme qui lui a donné naissance est nécessairement un produit de facteurs linéaires.

4° La forme adjointe F d'une forme f étant trouvée, proposons-nous de déterminer la forme adjointe de F.

Les calculs faits pour obtenir f nous ont donné comme résultat $F = \Sigma \alpha_{ik} X_i X_k$, avec la condition $f = \frac{F}{\Delta}$, α_{ik} étant le mineur relatif à l'élément a_{ik} dans l'invariant Δ de f.

Or si l'on applique les mêmes calculs à la forme F, on devra poser les équations

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1n}X_n = \xi_1 \\ \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{2n}X_n = \xi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} X_1 + \alpha_{n2} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X^n = \xi_n \end{array}$$

Équations d'où l'on devra tirer $X_1, X_2, \ldots X_n$ en fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, pour reporter leurs valeurs dans F. Il viendra ainsi

$$F = \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)}{\Delta^{n-1}}.$$

$\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ désignant la forme adjointe de F, et Δ^{n-1} étant, d'après la propriété rappelée dans 3°, l'invariant de F.

Mais $$f = \frac{F}{\Delta}; \quad \text{donc } f = \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)}{\Delta^n}.$$

D'autre part les équations primitives (celles qui ont servi au calcul de la forme adjointe F) avaient donné

$$\begin{array}{l} \Delta x_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \ldots + \alpha_{1n} X_n \\ \Delta x_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \ldots + \alpha_{2n} X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta x_n = \alpha_{n1} X_1 + \alpha_{n2} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X_n \end{array}$$

On voit donc que $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ne sont autre chose que $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$.

Par suite

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi^n) = \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) \times \Delta^2}{\Delta^n}$$

$$= \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\Delta^{n-2}}.$$

et par suite la forme adjointe φ de F est identiquement égale à $f\Delta^{n-2}$.

Dans le cas des formes ternaires, on aura donc

$$\varphi = \Delta f.$$

— Cela posé, nous avons vu que si l'on cherche l'équation cartésienne de la courbe dont l'équation tangentielle est

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$

on trouve
$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

qui n'est autre que la forme adjointe de la forme ternaire en u, v, w.

D'après le théorème précédent, on a donc

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = \Delta(\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy = \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}xz + 2\mathrm{E}yz + \mathrm{F}z^2)$$

Cette réciprocité entre l'équation tangentielle d'une courbe et son équation en coordonnées cartésiennes traduit ainsi de la manière la plus nette le principe géométrique de dualité, au moyen des seules ressources de l'analyse. Il en résulte que tout principe relatif aux points d'une conique qui ne dépendra que de la forme de son équation, engendrera un principe corrélatif entre ses tangentes, sans nouvelle démonstration. Comme exemples de cette corrélation, nous citerons les propriétés du pôle et de la polaire, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, la détermination d'une conique par un certain nombre de points et de tangentes, etc. *(A suivre.)*

QUESTION 296

Solution par M. Quiquet, élève au Lycée de Lille.

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients p,q,r *de l'équation du troisième degré* $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ *pour que les racines soient les sinus des angles d'un triangle.*

Il faut éliminer a, b, c entre les équations

$$p = \sin a + \sin b + \sin c,$$
$$q = \sin a \sin b + \sin b \sin c + \sin c \sin a,$$

$r = \sin a \sin b \sin c,$

sachant que $a + b + c = \pi$.

Des deux premières on tire

$p^2 - 2q = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2\cos a \cos b \cos c + 2$

d'où

$(p^2 - 2q - 2)^2 = 4(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c);$ (1)

or

$(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c) = 1 - \Sigma \sin^2 a$
$+ \Sigma \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c,$

et comme $\Sigma \sin^2 a = p^2 - 2q,$

$\Sigma \sin^2 a \sin^2 b = [\Sigma \sin a \sin b]^2$
$- 2 \sin a \sin b \sin c \, \Sigma \sin a = q^2 - 2pr,$

l'équation (1) devient

$$(p^2 - 2q - 2)^2 = 4(1 - p^2 + 2q + q^2 - 2pr - r^2)$$

ou, après réductions,

$$p^4 - 4p^2q + 8pr + 4r^2 = 0.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Montérou, Lycée Louis-le-Grand.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

336. — Etant donné un triangle rectangle isoscèle ABC. d'un point M pris sur l'hypoténuse BC, on abaisse des perpendiculaires MP, MQ, sur les côtés AC, AB. On joint le point P au point Q, et du point M on abaisse une perpendiculaire sur PQ. Démontrer que cette perpendiculaire passe par un point fixe.

337. — Dans un triangle on appelle p le demi-périmètre, r le rayon du cercle inscrit; démontrer que l'on a

$$p^2 \geq 27r^2. \quad \textit{(The Educat. Times.)}$$

338. — Soit ABC un triangle, AD, BE, CF les hauteurs abaissées respectivement sur les côtés BC, AC, AB; O est le point d'intersection de ces hauteurs. Sur AB on prend un point G tel que GC = CA; sur AC le point H tel que BH = BA,

on mène HK parallèle à ED, GK parallèle à FD; CG et DF se coupent en m, BH et DE se coupent en n. Cela posé, on demande de démontrer :

1° Que les six points B, G, O, H, C, K sont sur une même circonférence ;

2° Que les cinq points O, m, D, C, E, sont sur une même circonférence, ainsi que les cinq points O, n, D, B, F ;

3° Que Om est perpendiculaire sur CG, et On sur BH ;

4° Que O est le centre du cercle inscrit dans DFE, triangle qui est le quart du triangle semblable KGH, et aussi le centre du cercle circonscrit à AGH ;

5° Que les quatre points E, O, n, H, sont sur une même circonférence, ainsi que les quatre points F, O, n, G.

(The Educat. Times.)

339. — Dans un cercle on mène à partir d'un point B, sur la circonférence, deux cordes fixes et égales, BC et BC', puis on prend un point A fixe sur la circonférence; une corde PQ se meut, en restant toujours égale à BC. On joint le point B au point P, et le point A au point Q; ces deux lignes se coupent en O; de même les lignes AP et BQ se coupent en O'. Trouver le lieu géométrique du point O et le lieu géométrique de O'. *(The Educat. Times.)*

340. — Connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle, construire géométriquement ce triangle. *(The Educat. Times.)*

341. — Calculer la base et le côté d'un triangle isocèle connaissant la médiane et la hauteur issues d'un des sommets de la base.

Mathématiques spéciales.

342. — Par un des points d'intersection A de deux hyperboles équilatères de même centre O, on mène une sécante qui rencontre les deux courbes aux points B et B'. De ces points on abaisse des perpendiculaires BC, B'C' sur les tangentes aux deux courbes au même point A. Démontrer que si l'on joint le centre aux pieds C et C' de ces deux perpendiculaires, l'angle COC' est quadruple de l'angle des asymptotes. *(E. Fauquembergue.)*

343. — Trouver le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits à une conique donnée. Cas où cette conique est une hyperbole dont les asymptotes font entre elles un angle de 60 degrés. (*E. Fauquembergue.*)

344. — On mène une tangente en un point variable d'une conique, rapportée à son centre et à ses axes, et on considère les cercles tangents à la conique, à l'axe des x et à la tangente. 1° Trouver le lieu des centres de ces cercles; 2° pour chaque position de la tangente, il y a deux cercles correspondants : trouver l'enveloppe de la droite qui joint leurs centres ; 3° examiner le cas particulier où la conique se réduit à un cercle. (*E. Fauquembergue.*)

345. — Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique, les axes de coordonnées étant rectangulaires. Posons

$$\varphi = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 - 4(A + C)f(x, y) = 0.$$

L'équation des quatre directrices de la conique est

$$\varphi^2 + 4(A + C)f\varphi + 16\delta f^2 = 0$$

ou $\delta = AC - B^2$.

L'équation $\varphi = 0$ représente le cercle des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

ERRATUM

Dans notre article sur la série de Taylor, nous avons, au paragraphe 5, pris des dérivées en considérant θ *comme un nombre compris entre* 0 *et* 1. On a objecté que ce *nombre* était *variable*, du moins en général; cette objection nous paraît fondée et l'on doit considérer ce paragraphe comme non avenu.

G. L.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

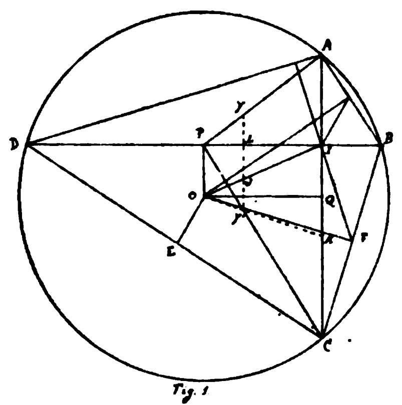
PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 9281-1.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Delpit**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT A DIAGONALES ORTHOGONALES

1. — *La somme des carrés de deux côtés opposés est constante et égale au carré du diamètre.*



Nous rappellerons ce théorème : si par un point I de l'intérieur d'un cercle on mène deux cordes rectangulaires, la somme des carrés des segments interceptés sur ces cordes par le point est égale au carré du diamètre.

Cela posé, on a (*fig. 1*)

$$AB^2 + CD^2 = AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2 = 4R^2.$$

2. — *La perpendiculaire abaissée du centre sur un côté est égale à la moitié du côté opposé.*

Soit OE la perpendiculaire abaissée sur le côté CD. On a

$$OE^2 + EC^2 = R^2.$$

D'ailleurs, en vertu de ce qui précède, on a

$$\frac{AB^2}{4} + \frac{DC^2}{4} = R^2;$$

on en déduit que $\qquad OE = \dfrac{AB}{2}.$

3. — *Les perpendiculaires abaissées du centre sur les quatre côtés partagent le quadrilatère en quatre quadrilatères équivalents.*

Soient E, F, H les milieux des trois côtés. Les triangles COF, FOB sont égaux ; de même les triangles COE, BOH

sont égaux puisqu'ils sont rectangles, et que, d'après une remarque précédente, on a OE = BH, et que les hypoténuses sont égales comme rayons.

Donc les deux quadrilatères EOFC, FOHB sont équivalents. On prouverait de même que les quatre quadrilatères formés de la même manière sont équivalents.

4. — *Le point d'intersection des lignes qui joignent les milieux des côtés est au milieu de la ligne qui joint le centre au point d'intersection des diagonales.*

Menons en effet la médiane IH; elle est égale à la moitié de AB et par suite à OE, d'après ce que nous avons déjà vu; de même IE est égal à OH. Donc la figure EOHI est un parallélogramme; donc la diagonale HE passe par le milieu de OI (*).

5. — *Les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés sur les côtés opposés passent par un même point, qui est le point de concours des diagonales.*

Nous venons de voir que OE était parallèle à IH. Donc, puisque OE est perpendiculaire à CD, il en est de même de la ligne IH, qui est donc confondue avec la perpendiculaire à CD menée par le milieu de AB.

6. — *Lorsque le système des diagonales tourne autour du point I, tous les quadrilatères ainsi formés ont le même centre de gravité.*

Soit P le milieu de la diagonale BD. Menons les médianes AP, CP. Soient γ et γ' les centres de gravité des triangles ABD, BCD; ces points divisent les droites AP, CP dans le rapport de 1 à 2, à partir du point P.

(*) Les deux propositions 3 et 4 ne sont pas particulières au quadrilatère inscrit à diagonales rectangulaires. Si par le milieu de chaque diagonale d'un quadrilatère quelconque, on mène une parallèle à l'autre, et qu'on joigne le point de rencontre de ces deux lignes aux milieux des côtés, on partage le quadrilatère en quatre quadrilatères équivalents, et la ligne qui joint les milieux de deux côtés opposés du quadrilatère passe au milieu de la ligne qui joint le point de concours des diagonales au point que nous venons de déterminer.

(Note de la Rédaction.)

Appelons J le point où la droite $\gamma\gamma'$ coupe la droite OI, et L le point où elle coupe la diagonale BD.

Je dis d'abord que $L\gamma$ est égal à $J\gamma'$.

En effet, on a $$\frac{L\gamma}{AI} = \frac{P\gamma}{PA} = \frac{1}{3}.$$

Donc $$L\gamma = \frac{AI}{3}.$$

On a de même $$L\gamma' = \frac{CI}{3}.$$

Les triangles semblables ILJ, IOP donnent facilement

$$LJ = \frac{2}{3} OP.$$

On en déduit

$$J\gamma = L\gamma + LJ = \frac{AI + 2OP}{3}.$$

Mais $$AI = AQ - IQ; \quad OP = IQ.$$

Donc $$J\gamma = \frac{AQ + IQ}{3} = \frac{CI}{3} = L\gamma'.$$

Par suite, on a aussi $L\gamma = J\gamma'$.

On en tire finalement

$$\frac{J\gamma}{J\gamma'} = \frac{L\gamma'}{L\gamma} = \frac{\text{surf BCD}}{\text{surf ABD}}.$$

Donc le point J est le centre de gravité du quadrilatère.

Donc le centre de gravité se trouve sur la droite qui joint le centre au point de concours des diagonales, et divise cette ligne dans le rapport de 1 à 2; ce point est donc fixe avec le point I.

7. — *Chaque diagonale partage le quadrilatère en deux triangles, dont on considère les centres de gravité. Si on joint le centre de la circonférence aux centres de gravité des triangles, les points où ces droites rencontrent les diagonales sont les points de concours des hauteurs des divers triangles; ces points son en outre symétriques des sommets par rapport aux diagonales.*

O étant le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, et γ' étant son centre de gravité, le point de rencontre des hauteurs de ce triangle se trouve sur la ligne $O\gamma'$ et sa distance au point γ' est double de $O\gamma'$. Ce point est d'ailleurs

sur CI; il est donc bien au point A′ de rencontre de $O\gamma'$ et de CI.

De plus on a $A'I = 3J\gamma' = 3\gamma L = AI$.

A′ est donc le symétrique de A par rapport à CD.

8. — La figure formée en joignant les milieux des côtés du quadrilatère est un rectangle, et par suite inscriptible dans une circonférence; cette circonférence, d'après ce que nous avons vu précédemment, a pour centre le point G, milieu de OI (*fig.* 2), et si nous joignons le point I au milieu d'un côté, la ligne ainsi menée est perpendiculaire sur le côté opposé. Il est facile d'en déduire que les pieds des perpendiculaires abaissées du point I sur les quatre côtés sont sur la même circonférence qui passe par les milieux des côtés.

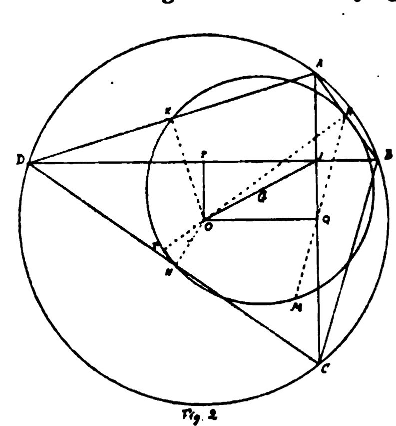


Fig. 2

Soit H le milieu de AB, E le pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur AB; les lignes OH et IE sont parallèles. Cela posé, prolongeons HO d'une longueur OF = IE. La ligne EF passe par le point G; c'est donc un diamètre de la circonférence, et on en déduit facilement que le point F est sur la même circonférence que précédemment.

Menons la ligne HQ, qui passe par le milieu de AB et par le milieu de la diagonale AC, et prolongeons-la jusqu'au point M où elle rencontre la circonférence que nous avons considérée précédemment; l'angle AQH est égal à l'angle ACB; l'angle POK est égal à ADB, et par suite à ACB; donc les deux lignes HM et KO sont symétriques par rapport au diamètre mené par G parallèlement à la diagonale AC; les points O et Q étant deux points symétriques, on voit que le segment QM est égal à la perpendiculaire abaissée du

point I sur le côté AD. Il en résulte que la circonférence qui passe par les milieux des côtés contient en outre *douze* autres points principaux, savoir :

Les pieds des perpendiculaires abaissées du point I sur les quatre côtés ;

Les points obtenus en abaissant du centre du cercle donné des perpendiculaires sur les quatre côtés, et prolongeant chaque ligne, au delà du centre, d'une longueur égale à la perpendiculaire abaissée du point I sur le côté considéré ;

Les points obtenus en menant par le milieu H d'un côté AB une parallèle à l'un des côtés adjacents BC, et prolongeant cette ligne, à partir de la diagonale qui passe par les points A et C, d'une longueur égale à la perpendiculaire abaissée du point I sur le côté AD, opposé à BC.

Cherchons la longueur du rayon de cette circonférence. Appelons l la distance OI. Le triangle OIH nous donne

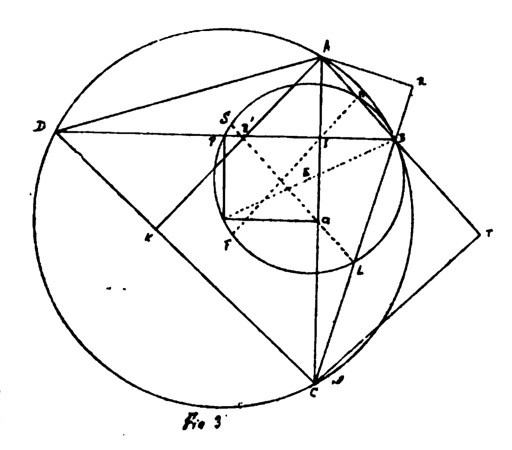
$$OH^2 + HI^2 = 2GH^2 + \frac{l^2}{2}.$$

Donc, en appelant r' le rayon GH, on a :

$$r'^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{l^2}{4}.$$

Il en résulte que la position et la grandeur de ce cercle ne dépendent que de la position du point I.

9. — La circonférence décrite sur OB comme diamètre (*fig. 3*) passe évidemment par les milieux H et L des côtés BA et BC, et aussi au milieu P de la diagonale BD. Nous allons déterminer d'autres points de la circonférence. Soit B' le symétrique de B par rapport au point I. Nous avons vu



que B' est le point de concours des hauteurs du triangle ADC. Donc AB'K est la hauteur de ce triangle. Cela posé, menons la ligne IH; soit F le point où elle rencontre la circonférence décrite sur OB. On a

$$IF \,.\, IH = BI \,.\, PI.$$

Or $$IH = \frac{AB}{2}.$$

Donc on a

$$IF \,.\, AB = 2BI \,.\, PI = BI\,(DI - BI) = BI \,.\, B'D.$$

Mais $$BI \,.\, DB' = B'I \,.\, DB' = AB' \,.\, B'K,$$

et comme $$AB' = AB,$$

On en déduit enfin

$$IF \,.\, AB = AB \,.\, KB',$$

d'où $$IF = KB'.$$

Menons de même la ligne LQ; cette ligne est égale à $\frac{AB}{2}$; de plus, les points I et Q sont équidistants du point E, centre de la circonférence OB, puisque ce sont les projections des extrémités d'un diamètre sur une même droite. Il en résulte que ces points ont même puissance par rapport au cercle; donc, si l'on prolonge la ligne QL jusqu'au point S où elle rencontre la circonférence, on aura

$$QL \,.\, QS = IH \,.\, IF.$$

On en déduit $$QS = IF = B'K.$$

On a donc ainsi sept points situés sur une même circonférence.

10. — *Des extrémités de deux côtés opposés on abaisse des perpendiculaires sur ces côtés. Les pieds de ces quatre perpendiculaires sont sur une même circonférence, ayant pour centre le point* I.

D'abord le point H étant le milieu de AB, nous savons que la ligne IH est perpendiculaire sur CD. Donc le point I est également distant des pieds des perpendiculaires abaissées de A et de B sur CD. Il est aussi à égale distance des pieds des perpendiculaires menées de C et de D sur AB. En outre, les lignes AK et AB étant symétriques par rapport à AC, si de ce point C j'abaisse des perpendiculaires CK et CT sur AK et AB, les distances IK et IT sont égales.

Les huit pieds des perpendiculaires sont sur deux circonférences concentriques ayant pour centre le point I.

11. — On peut démontrer sur les perpendiculaires ainsi menées des sommets sur les côtés, les théorèmes suivants, que nous ne ferons qu'énoncer.

Les perpendiculaires abaissées de deux sommets opposés sur deux côtés opposés sont proportionnelles aux deux autres côtés; on a

$$\frac{AK}{CT} = \frac{AD}{BC}.$$

Les perpendiculaires abaissées d'un même sommet sur les deux côtés qui n'aboutissent pas à ce sommet sont proportionnelles aux autres côtés. On a

$$\frac{AK}{AR} = \frac{AD}{AB}.$$

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des deux sommets opposés sur deux côtés opposés est égale au carré de la diagonale qui joint les deux sommets. On a

$$AK^2 + CT^2 = AC^2.$$

La somme des carrés des hauteurs est égale à deux fois la somme des carrés des diagonales.

La somme des huit hauteurs, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit, est égale au produit du périmètre par la somme des diagonales.

Le produit de la ligne qui joint les pieds des hauteurs issues d'un même sommet par le diamètre du cercle circonscrit est égal au rectangle des diagonales.

On a

$$RK \,.\, 2R = AC \,.\, BD.$$

12. — *On peut toujours inscrire dans le quadrilatère une ellipse dont les foyers soient l'un le centre du cercle, l'autre le point de rencontre des diagonales.*

Considérons (*fig.* 4) les angles COD, ACB; ces deux angles sont complémentaires. Par suite COD est égal à ACB. Donc les angles OCD, ICB sont égaux; pour la même raison les angles IAB, OAD; IDC, ODA sont égaux.

Décrivons une ellipse ayant pour foyers les points O et I, et tangente à un des côtés, BC par exemple; menons du point

C une seconde tangente à cette ellipse ; l'angle qu'elle fera avec le rayon CO sera égal à l'angle ACB ; cette tangente sera par suite confondue avec CD. Pour la même raison, l'ellipse est tangente aux quatre côtés du quadrilatère.

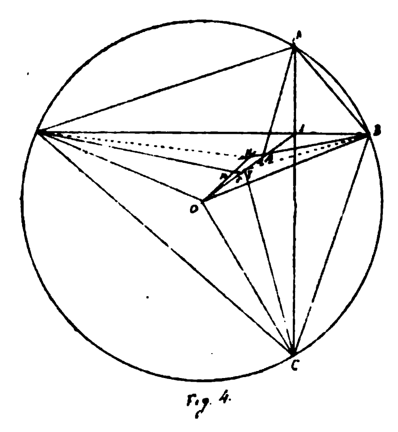


Fig. 4.

Les axes de cette ellipse sont dirigés suivant OI et suivant une perpendiculaire menée à OI par son milieu. Le cercle principal de cette ellipse est le cercle qui passe par les milieux des côtés du quadrilatère. Par suite, le carré du demi-grand axe est $a^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{l^2}{4}$, et le carré du petit axe est $b^2 = \frac{r^2 - l^2}{2}$.

13. — *Si par les milieux des côtés on mène des tangentes à l'ellipse précédente, elles sont parallèles aux côtés opposés.*

En effet, si par le point L par exemple je mène une tangente à l'ellipse, elle fera avec OL un angle égal à ILB; par suite cet angle sera le complément de OLI. La tangente sera donc perpendiculaire à LI, et par suite parallèle à AD.

14. — *Si l'on mène les bissectrices de deux angles consécutifs, ces bissectrices rencontrent* OI *aux points* α *et* β. *Le rapport anharmonique des quatre points* O, α, β, I, *est égal au rapport anharmonique des points correspondant aux deux autres bissectrices.*

Soient α et β les points où les bissectrices des angles A et B rencontrent la ligne OI; les angles OAD, CAB étant égaux, la bissectrice de l'angle A est bissectrice de l'angle OAI. Donc

$$\frac{O\alpha}{\alpha I} = \frac{r}{AI};$$

de même on a

$$\frac{O\beta}{\beta I} = \frac{r}{BI};$$

donc

$$\frac{O\alpha}{\alpha I} : \frac{O\beta}{\beta I} = \frac{BI}{AI}.$$

On a de même

$$\frac{O\gamma}{\gamma I}=\frac{r}{CI}\,; \qquad \frac{O\delta}{\delta I}=\frac{r}{DI}\,;$$

donc
$$\frac{O\delta}{\delta I}:\frac{O\gamma}{\gamma I}=\frac{CI}{DI}.$$

Mais
$$\frac{CI}{DI}=\frac{BI}{AI};$$

donc les deux rapports anharmoniques sont égaux.

On peut déduire de là d'autres théorèmes, en appliquant les propriétés des faisceaux anharmoniques. Par exemple, si on joint le point B aux points γ et β, et le point D aux points α et δ, les deux faisceaux

$$B\,(O,\,I,\,\beta,\,\gamma),\quad D\,(O,\,I,\,\alpha,\,\delta)$$

ont un rapport anharmonique égal et un faisceau homologue commun; il s'ensuit que si l'on prolonge les droites $B\beta$, $B\gamma$, jusqu'à leur rencontre avec $D\alpha$, $D\delta$, la ligne qui joindra les points d'intersection passera par le centre.

15. — Supposons que le système des diagonales tourne autour du point I. Les quatre côtés du quadrilatère envelopperont l'ellipse déjà considérée. Le cercle principal et les cercles directeurs de cette ellipse resteront fixes. Il s'ensuivra que les milieux des côtés et les projections du point I décriront le cercle principal; les symétriques du centre et du point I par rapport aux côtés décriront aussi des circonférences qui seront les cercles directeurs.

Les points de concours des hauteurs des quatre triangles ayant pour bases les diagonales sont symétriques des sommets par rapport aux diagonales, dont ils décrivent une circonférence ayant même rayon que le cercle donné, et pour centre le symétrique du centre par rapport au point d'intersection des diagonales.

Soit γ le centre de gravité d'un des triangles précédents: γ se trouve sur la ligne OB′, et la partage dans le rapport de 1 à 2; or le point B′ décrit une circonférence: il s'ensuit que le point γ décrit une circonférence dont le centre se trouve sur OI.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

par M. **Junck**, élève du Lycée Charlemagne.

Si on considère des fractions irréductibles de même dénominateur $\frac{N}{P}, \frac{N}{P}, \ldots\ldots$ *elles donnent lieu à des quotients décimaux périodiques, simples ou mixtes, qui ont le même nombre de chiffres à la période.*

Ordinairement on démontre ce théorème dans le cas où P est premier avec 10, et on en déduit le théorème général. Mais la démonstration qu'on donne dans la plupart des cours est assez difficile à retenir; nous pensons que la suivante est plus simple.

1° Supposons P premier avec 10. La fraction $\frac{N}{P}$ donne alors naissance à une fraction périodique simple, avec ou sans partie entière.

On a donc
$$\frac{N}{P} = \text{B}, \alpha\beta\gamma\ldots\lambda\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\ldots$$

B étant la partie entière, et $\alpha\beta\gamma\ldots\lambda$ la période.

La génératrice de cette fraction décimale est, comme on sait,
$$\frac{\text{B}\alpha\beta\gamma\ldots\lambda - \text{B}}{999\cdots9}$$
et par suite
$$\frac{N}{P} = \frac{\text{B}\alpha\beta\gamma\ldots\lambda - \text{B}}{999\cdots9}.$$

Mais, d'après un théorème connu, $\frac{N}{P}$ étant une fraction irréductible, P divise le nombre $999\ldots9$. Si donc on effectue la division suivante, en ayant soin d'abaisser à la droite de chaque reste le chiffre 9,

$$\begin{array}{r|l} 9999\cdots9 & \text{P} \\ \cline{2-2} a9 & mnp\ldots l \\ b9 & \\ \vdots & \\ k9 & \\ 0 & \end{array}$$

Le nombre des chiffres 9 qui forment le dividende sera précisément le nombre des chiffres de la période ; ce nombre est indépendant de la valeur des numérateurs N, N′ N″... Le théorème est donc démontré quand N est premier avec 10 ; car pour avoir la période, il suffit de multiplier le quotient obtenu par N, si N est $< P$, et par $N - BP$, si N est $> P$; d'où il résulte que le nombre des chiffres de la période sera toujours le même, quel que soit N.

2° Si P n'est pas premier avec 10, on a $P = p.2^a.5^b$, p étant premier avec 10.

Si l'on a $\frac{N}{P} = A, B\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\alpha\beta\gamma \ldots \lambda \ldots$

B, qui est la partie irrégulière, renferme autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le plus grand des deux nombres a et b.

Posons $a = b + c$; nous aurons

$$\frac{N}{p \, . \, 2^a 5^b} = A, B\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\alpha\beta\gamma \ldots \lambda \ldots$$

Donc $$\frac{N \, . \, 5^c}{p} = AB, \alpha\beta\gamma \ldots \lambda\alpha\beta\gamma \ldots \lambda \ldots$$

$N \, . \, 5^c$ étant premier avec p.

En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que le nombre des chiffres de la période est encore indépendant de N, et qu'il s'obtient par une division.

N. B. — Cette question a été proposée dans la composition d'arithmétique du concours d'admission à l'École navale en 1878.

On demandait d'en faire l'application à l'exemple $\frac{1}{111}$, $\frac{43}{111}$.

Or, on a

999	111
0	9

La période a donc 3 chiffres ; elle est $9 \times 1 = 9$ pour la première fraction, c'est-à-dire de 009, puisqu'on vient de dire qu'elle a 3 chiffres. Elle est 43×9 pour la deuxième fraction, c'est-à-dire 387.

NOTE SUR LA QUESTION 282

Par M. L. Geoffroy, professeur au Collège Chaptal, répétiteur à l'École centrale.

La solution donnée dans le numéro d'avril pour la question 282 est incomplète, les nombres entiers m et n ne sont pas donnés, et par suite la formule (4) de la page 163 ne peut servir au calcul des angles du triangle. La solution suivante va nous montrer que les tangentes des trois angles du triangle sont exprimées par des nombres entiers et positifs.

En effet, d'après l'énoncé on sait que : 1° *le rapport du carré de chacune des hauteurs au rectangle des segments qu'elle détermine sur la base correspondante est exprimé par un nombre entier; 2° le produit des trois hauteurs est un multiple du produit des trois segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés opposés.*

Il résulte immédiatement de l'énoncé les égalités suivantes:

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = p,$$
$$\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = q,$$
$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = r,$$

p, q, r étant des nombres entiers. Enfin, la seconde condition devient $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = s.$

Or, entre les tangentes des angles d'un triangle, on a

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C;$$

d'où l'on tire $\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}.$

On obtient alors, par la première des égalités ci-dessus,

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg}^2 B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}.$$

ou
$$p = \frac{r + \operatorname{tg}^2 B}{r - 1}.$$

Le dénominateur de cette égalité est entier. Donc le numérateur doit être entier, c'est-à-dire que $tg^2 B$ doit être un nombre entier, par suite $tg\ B$ est entier ou incommensurable. Cette dernière hypothèse n'est pas admissible; car,

puisque l'on a

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = s$$
$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = q$$

on en déduit

$$\operatorname{tg} B = \frac{s}{q},$$

quantité commensurable, puisque s et q sont entiers.

Donc tg B est entier. On verrait qu'il en est de même pour les autres tangentes. Donc

Les tangentes des angles du triangle répondant à la question sont exprimées par des nombres entiers.

Cela posé, l'égalité

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

nous permet de ramener la question à la suivante : *Trouver trois nombres entiers dont la somme soit égale au produit.*

Désignons par x le plus petit des trois nombres entiers cherchés, par $x + y$, $x + y_1$, les deux autres. On aura

$$x(x + y)(x + y_1) = 3x + y + y_1$$

ou

$$x^3 + (y + y_1)x^2 + yy_1x = 3x + y + y_1$$

ou enfin

$$x(3 - yy_1) = x^3 + (y + y_1)(x^2 - 1).$$

Le second membre de cette égalité est essentiellement positif ; donc il faut que l'on ait

$$3 - yy_1 > 0.$$

Or, y et y_1 sont deux nombres entiers positifs, différents ; donc il faut faire $y = 1$, $y_1 = 2$.

On obtient, pour déterminer x, l'équation

$$x(x + 1)(x + 2) = 3(x + 1)$$

ou

$$x(x + 2) = 3.$$

En rejetant la solution négative -3, puisque x est entier et positif, on a $x = 1$; donc

$$\operatorname{tg} A = 1 ; \quad \operatorname{tg} B = 2 ; \quad \operatorname{tg} C = 3.$$

On voit donc bien que les tangentes des angles du triangle sont exprimées par des nombres entiers, et même que les angles sont déterminés. Le triangle est donc d'espèce connue, et il est facile de le résoudre puisque l'on en donne un élément linéaire.

NOTE DE COSMOGRAPHIE

(CRÉPUSCULE)

Par M. Bourget, du Collège d'Aix.

A la page 441 de la 4e année de ce journal, M. Morel a donné la formule qui sert à calculer la durée du jour à diverses époques de l'année; nous nous proposons dans cette note d'indiquer comment on peut calculer cette durée en tenant compte du crépuscule.

Prenons pour plan de la figure le plan du méridien du lieu considéré. Soient HH' l'horizon, CC' le cercle crépusculaire à 18° au-dessous de l'horizon, PP' l'axe du monde, et AA' le parallèle décrit par le soleil le jour considéré.

Cela posé, rabattons sur le plan de la figure le cercle AA' en le faisant tourner autour de son diamètre. Les intersections de ce cercle avec les cercles HH', CC', se rabattent suivant les lignes MI, SK, perpendiculaires à AA'. L'arc MS représente le crépuscule, et l'arc SA' la moitié de la nuit diminuée du crépuscule. Nous allons chercher l'expression de l'angle SOA'. Il est clair que, connaissant cet angle, nous connaîtrons l'angle MOS, car si l'angle SOA' augmente, l'angle MOS diminue et *vice versa*.

Le triangle SOK de la figure ci-contre donne

$$\cos \beta = \frac{OK}{OS};$$

cherchons maintenant les valeurs OK et OS, et nous aurons la formule que nous nous proposons d'établir.

Nous avons $OK = (OT + TR) \operatorname{tg} \lambda$,

et supposant le rayon de la sphère céleste égal à l'unité,

$$OK = \left(\sin \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda}\right) \operatorname{tg} \lambda;$$

d'autre part, $OS = OA = \cos \Delta$.

Nous trouvons donc

$$\cos \beta = \frac{\left(\sin \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda}\right) \operatorname{tg} \lambda}{\cos \Delta};$$

formule qui peut s'écrire

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\cos \lambda \cos \Delta}. \qquad (1)$$

Donc, la durée du crépuscule du lieu ne dépend que de la latitude du lieu et de la déclinaison du soleil.

Discussion de la formule

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\cos 18^\circ}{\cos \lambda \cos \Delta}.$$

Pour que l'angle β existe, il faut que son cosinus soit plus petit que l'unité, c'est-à-dire que $\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda \cos \Delta} < 1$.

Mais λ et Δ étant nécessairement aigus, on en tire

$$\cos (\lambda + \Delta) > \cos 72^\circ,$$

ou enfin $\lambda + \Delta < 72^\circ. \qquad (2)$

Si, dans cette formule, nous prenons λ pour inconnue, et si nous faisons varier Δ de o à 23°30′, nous trouverons les valeurs correspondantes de λ. Ces valeurs de λ indiquent les régions pour lesquelles β existe, c'est-à-dire pour lesquelles il y a nuit. Si l'on se place à des latitudes supérieures à celle qu'indique la formule (2), la nuit est remplacée par le crépuscule.

Si, par exemple, $\Delta = 0$, c'est-à-dire si l'on suppose que le soleil soit à l'équinoxe, nous trouvons $\lambda < 72^\circ$, valeur

qui signifie que si l'on se place à 72 degrés de latitude et au delà, le crépuscule durera toute la nuit.

Si, au contraire, $\Delta = 23^\circ 30'$, $\lambda = 48^\circ 30'$, au-dessus de la latitude de $48^\circ 30'$, au solstice d'été, le crépuscule dure toute la nuit.

Mais si l'on faisait varier λ et qu'on prît pour inconnue Δ, on trouverait les déclinaisons à partir desquelles le crépuscule durerait toute la nuit. En effet, si l'on prend $\lambda = 0$ c'est-à-dire si l'on se place à l'équateur, $\Delta < 72^\circ$, ce qui signifie que le soleil doit avoir une déclinaison de 72° pour qu'il n'y ait pas de nuit à l'équateur, ce qui n'a jamais lieu. Si nous prenons $\lambda = 60^\circ$, $\Delta < 12^\circ$, c'est-à-dire qu'à partir du 12° de déclinaison, il n'y a plus de nuit jusqu'à ce que le soleil ait atteint $23^\circ 30'$.

D'après tout ce qui précède, nous pouvons formuler la loi suivante : *Le crépuscule suit les variations du jour.* Si le jour grandit, le crépuscule croît; si le jour diminue, le crépuscule décroît.

Remarque. — On peut facilement rendre la formule (1) calculable par logarithmes. On a en effet

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \Delta + \frac{\sin 18^\circ}{\sin \lambda \cos \Delta} = \frac{\sin \Delta \sin \lambda + \sin 18^\circ}{\cos \Delta \cos \lambda}$$

$$= \frac{\sin (\varphi + 18^\circ)}{\cos \varphi \cos \Delta \cos \lambda}$$

en nommant φ un angle auxiliaire déterminé par la relation

$$\sin \Delta \sin \lambda = \cos 18^\circ \operatorname{tg} \varphi.$$

QUESTIONS D'EXAMEN

Deux triangles sont semblables quand l'une des conditions suivantes est remplie :

1° Les tangentes des angles sont proportionnelles ;

2° Les tangentes des demi-angles sont proportionnelles ;

3° Les cosinus des angles sont proportionnels ;

4° Les sinus des demi-angles sont proportionnels.

1° On a entre les tangentes des angles la relation

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Par hypothèse, on a aussi, en appelant A′, B′, C′ les angles du second triangle

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A'} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B'} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} C'} = t.$$

Par conséquent cette hypothèse donne

$$t\,(\operatorname{tg} A' + \operatorname{tg} B' + \operatorname{tg} C') = t^3 \operatorname{tg} A' \operatorname{tg} B' \operatorname{tg} C'.$$

Mais la formule que nous avons établie plus haut est vraie pour un triangle quelconque, donc elle est vraie pour les angles A′ B′ C′ ; par suite, il vient

$$t^2 = 1.$$

On ne peut supposer $t = -1$, car cela donnerait, puisque les angles A, B, C, A′, B′, C′ sont inférieurs à 180°,

$$A + A' = 2d$$
$$B + B' = 2d$$
$$C + C' = 2d$$

Donc il faut faire $t = 1$, et alors les deux triangles sont équiangles.

2° On a aussi, entre les angles d'un triangle la relation

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1\,;$$

et puisque l'on a

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A'}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B'}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C'}{2}} = m;$$

on en déduit encore $m^2 - 1 = 0$,
puisque la relation est vraie pour les angles d'un triangle quelconque. On aura donc encore $m = 1$, la solution $m = -1$ devant être rejetée, puisque les angles $\frac{A}{2}, \frac{B}{2} \ldots$ sont nécessairement aigus et ont par suite des tangentes essentiellement positives. On en conclut que les deux triangles sont équiangles.

3° Entre les cosinus des angles d'un triangle, on a la relation $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C$.

Cette relation est vraie pour un triangle quelconque, et

si j'ai $$\frac{\cos A}{\cos A'} = \frac{\cos B}{\cos B'} = \frac{\cos C}{\cos C'} = m,$$

cette relation deviendra

$$1 - m^2 \cos^2 A' - m^2 \cos^2 B' - m^2 \cos^2 C' = 2m^3 \cos A' \cos B' \cos C',$$

ce qui peut s'écrire

$$(m^2 - 1)(\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C') + (m^3 - 1)\, 2 \cos A' \cos B' \cos C' = 0.$$

On en tire d'abord $m = 1$;

puis $$(m + 1)(\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C') + 2(m^2 + m + 1) \cos A' \cos B' \cos C' = 0.$$

Cette égalité se réduit, en vertu de la relation que nous avons rappelée, à $2m^2 \cos A' \cos B' \cos C' + m + 1 = 0$.

Cette équation en m a ses racines imaginaires, car la quantité sous le radical est

$$1 - 8 \cos A \cos B \cos C = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 3.$$

Or chacun des carrés $\cos^2 A$, $\cos^2 B$, $\cos^2 C$ étant inférieur à l'unité, leur somme est inférieure à 3, donc la quantité sous le radical est négative.

Il en résulte encore que les triangles ont leurs angles égaux, puisque les angles ont mêmes cosinus et sont positifs, moindres que 180°.

4° Entre les sinus des demi-angles, on a la relation

$$1 - \sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Cette égalité présente la même forme que la précédente, et on verrait facilement que l'hypothèse de la proportionnalité des sinus des demi-angles conduirait à la condition

$$(m - 1)\left(2m^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + m + 1\right) = 0.$$

Le second facteur a encore ses racines imaginaires; donc on doit prendre $m = 1$ et, par suite, les deux triangles sont encore équiangles.

On donne deux nombres a *et* b *et l'on prend la moyenne arithmétique entre ces deux nombres, et on continue ainsi en prenant toujours la moyenne arithmétique du dernier nombre*

formé et du nombre qui le précède. On demande la valeur du terme général de la suite ainsi formée.

On a $$a_1 = \frac{a+b}{2} = a + \frac{b-a}{2};$$

$$a_2 = \frac{b}{2} + \frac{a_1}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^2} = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^2}.$$

De même

$$a_3 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3}$$

$$a_4 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^4}$$

$$a_5 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5}$$

$$a_6 = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5} + \frac{b-a}{2^6}.$$

En général

$$a_{2n-1} = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5} + \ldots + \frac{b-a}{2^{2n-1}}$$

$$a = a + \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^3} + \frac{b-a}{2^5} + \ldots$$
$$+ \frac{b-a}{2^{2n-1}} + \frac{b-a}{2^{2n}}.$$

La différence entre les termes de rang pair et les termes de rang impair tend vers zéro ; à la limite on a, à partir du second terme, une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{b-a}{2}$, et la raison $\frac{1}{4}$; donc on a

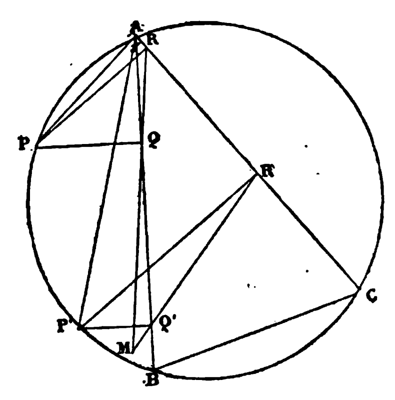
$$\lim . \, a_p = a + \frac{2}{3}(b-a).$$

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

Un triangle ABC *étant inscrit dans un cercle* S, *on considère sur la circonférence deux points* P *et* P′. *Les projections de ces points sur les côtés du triangle sont situés sur deux droites* D *et* D′ *qui se coupent en* M. 1° *Démontrer que ce point* M *décrit une circonférence* S′ *quand le sommet* C *se meut sur le cercle* S, *les*

points A, B, P *et* P′ *restant fixes ;* 2° *trouver le lieu des centres des cercles* S′ *lorsque les points* P *et* P′ *se déplacent sur la circonférence* S *de façon que l'arc* PP′ *conserve une longueur constante* (*).

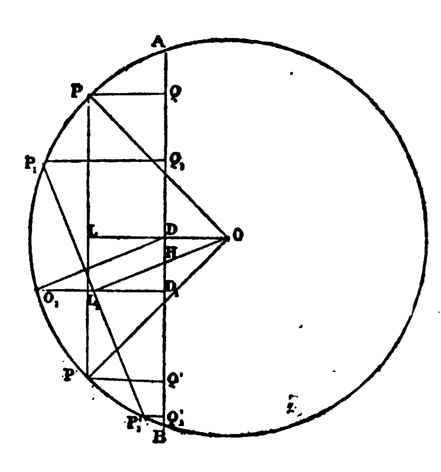
La droite QR correspondant au point P passe toujours par le point fixe Q; la droite Q′ R′ passe par le point Q′. Donc il suffit de démontrer, puisque les points Q et Q′ sont fixes, que l'angle en M est constant. Or, les quatre points A, P′, Q′ et R′ sont sur une circonférence;



donc AQ′R′ = AP′R′

Mais AP′R′ = ATR, puisque PR et P′ R′ sont parallèles comme perpendiculaires à une même droite AC; d'autre part on a MQQ′ = AQR = APR.

Donc QMQ′ = QQ′R′ — Q′QM = ATR — APR = TAP.



Donc l'angle en M est égal à l'angle ayant pour sommet le point A et passant par les points P et P′; il est donc constant, et par suite le lieu du point M est une circonférence passant par les points Q et Q′

Pour trouver le lieu du centre O de la circonférence S′, je considère la position

(*) Composition de géométrie élémentaire donnée à l'Agrégation des sciences mathématiques en 1879.

particulière de PP' où cette droite est parallèle à AB; soit D le milieu de QQ' pour cette position; je prends une autre position P_1P' quelconque, soit D le milieu de Q_1Q_1' et O_1 le centre du cercle correspondant; le triangle $Q_1O_1Q_1'$ est constant d'espèce, et toujours semblable au triangle POP', ou au triangle $P_1OP'_1$; on a donc

$$\frac{O_1D_1}{OL_1} = \frac{Q_1Q'_1}{P_1P'_1} = \frac{OD}{OH}.$$

D'autre part on a $\dfrac{L_1D_1}{L_1H} = \dfrac{OD}{OH}$.

D'où l'on tire $\dfrac{O_1D_1}{OL_1} = \dfrac{L_1D_1}{L_1H} = \dfrac{OD}{OH}$.

Mais on a $OH = L_1O \pm L_1H$;

donc $OD = O_1D_1 \pm L_1D_1 = O_1L_1$.

Par suite la figure DO_1L_1O est un parallélogramme et $DO_1 = OL_1$. Par suite DO_1 est constant; donc le lieu de O_1 est un cercle ayant pour centre le point D et pour rayon la distance du centre O à la corde constante PP'.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Session d'avril 1881.

ACADÉMIE DE CAEN

Calculer la surface d'un triangle, connaissant un côté a, l'angle opposé A, et la médiane m issue du sommet A. Maximum de la surface en supposant m et A invariables.

— Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = a + b + c$$
$$bx + cy + az = cx + ay + bz = a^2 + b^2 + c^2;$$

mettre la valeur des inconnues sous forme entière.

— On peut, à l'aide d'une manivelle dont le bras a 1^m de longueur, faire mouvoir un treuil de $0^m,25$ de diamètre sur lequel est enroulée une corde parallèle à la ligne de plus grande pente d'un plan incliné dont la pente est $\frac{5}{12}$. Quel est le poids P que peut faire remonter le long du plan un homme agissant à l'extrémité de la manivelle avec une force de 10 kilogrammes? Démontrer que le travail de l'homme est égal à celui du poids du corps.

— Connaissant le périmètre et la surface d'un triangle rectangle, calculer les trois côtés et le rayon du cercle inscrit. Chercher les conditions pour que le triangle soit isoscèle.

ACADÉMIE DE PARIS

Calculer le volume d'une sphère, sachant que la différence entre ce volume et celui du cube inscrit dans la sphère est égale à un mètre cube.

— La distance des centres de deux cercles égaux est égale au rayon commun R. Exprimer, au moyen de R, la surface de la partie du plan commune aux deux cercles.

— Trouver le rayon d'un cercle sachant que la différence entre la surface de l'hexagone régulier inscrit et celle du carré inscrit dans le même cercle est égale à 3 mètres carrés.

— Deux cercles égaux de rayon R sont extérieurs l'un à l'autre. La distance des centres OO' est égale à d. D'un point A pris sur la ligne OO' entre les cercles, on mène les tangentes AB, AB', puis on fait tourner la figure autour de OO'. Déterminer la distance OA de façon que la somme des surfaces des deux calottes sphériques engendrées par les arcs BD, B'D' soit égale à la moitié de la surface de l'une des sphères.

— Dans un cercle de rayon donné, mener une corde AB telle que, si l'on joint ses deux extrémités au centre O, et si l'on fait tourner la figure autour du diamètre CD parallèle à la corde AB, le volume engendré par le segment de cercle AMB soit équivalent au volume engendré par le triangle AOB.

— Étant donnés une sphère dont le diamètre est AB, et le plan tangent à l'extrémité B de ce diamètre, mener un plan sécant CD perpendiculaire au diamètre AB, de telle sorte que le volume du segment de sphère CAD soit égal au cylindre dont l'une des bases est la section de la sphère par ce plan CD, dont les arêtes latérales sont parallèles au diamètre AB, et dont l'autre base est située dans le plan tangent à la sphère au point B.

— On donne dans un trapèze ABCD les deux bases parallèles $AB = a$, $CD = b$, les deux diagonales $AD = \alpha$, $BC = \beta$, on demande de calculer la hauteur h.

— Dans un triangle BCA, on divise la base BC en un point D tel que $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$. On demande de calculer la ligne AD; on donne $AB = c$, $AC = b$.

— Trouver le rayon, l'apothème et la surface du dodécagone régulier ayant même périmètre que l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R.

— Démontrer que, quelle que soit la valeur de x, la fraction

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 1}$$

est toujours positive.

— Soient : une circonférence O, C un point de son plan situé à une distance du centre égale au diamètre, CA et CB les tangentes menées de ce point à la circonférence. On fait tourner la figure autour de OC; AMB engendre un segment sphérique. On demande de calculer le rapport du volume de ce segment à celui de la sphère engendrée par le cercle O.

ACADÉMIE DE BORDEAUX

On donne deux circonférences tangentes extérieurement dont les rayons sont $r = a$, $R = 3a$; calculer: 1° l'angle S formé par la tangente commune et la ligne des centres; 2° l'aire du triangle formé par la ligne des centres, la tangente commune et la perpendiculaire à la ligne des centres menée par le point de contact avec la petite circonférence.

— Partager un angle A en deux parties telles que le rapport des sinus soit égal à un nombre donné n. Application: $A = 50°$; $n = 3$.

— Etant donné le rayon R de la base d'un cône et sa hauteur h, déterminer la distance x, à partir du sommet, à laquelle il faut mener un plan parallèle à la base, pour que le volume du tronc de cône soit équivalent à m fois celui de la sphère de diamètre x. Application : $R = 7$; $h = 10$; $m = 3$.

— Calculer le premier terme d'une progression arithmétique sachant que la raison est r, et que la somme des n premiers termes est égale à $(n + 4)$ fois le dernier terme. Application : $r = 3$; $n = 25$.

— La distance des centres de deux circonférences est égal à a; leurs rayons sont égaux respectivement à r et r'. Mener parallèlement à la ligne des centres une droite de longueur donnée comprise entre les deux circonférences.

— Quelle est la plus petite valeur de l'expression $3x^2 - 8x + 7$ quand on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

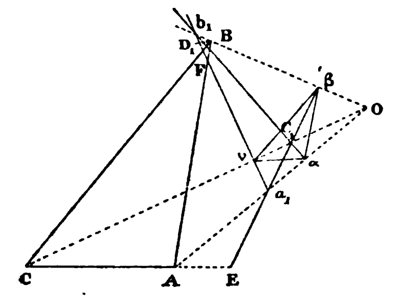
QUESTION 278

Solution par M. A. Prost, à Lons-le-Saulnier.

Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ *deux triangles homothétiques, dont le centre d'homothétie est l'un quelconque des centres des cercles inscrit et exinscrit au triangle* ABC.

Soient αD, βE, γF *des perpendiculaires respectives à* Aα, Bβ, γC.

Démontrer que les points de concours des droites AB *et* γF, CA *et* βE, CB *et* αD *sont en ligne droite.*



Soient les deux triangles homothétiques ABC, $\alpha\beta\gamma$ dont le centre d'homothétie est en O, centre d'un cercle exinscrit au triangle ABC. OC étant bissectrice de l'angle BCA, l'est aussi de $\beta\gamma\alpha$; il

en est de même des bissectrices αA, OB des angles extérieurs A et B, par suite des angles α et β.

Cela posé on voit facilement que les droites OC, βE, αD; puis γF, αD, OB; et βE, γF, OB se coupent respectivement en trois points a_1 b_1 c_1.

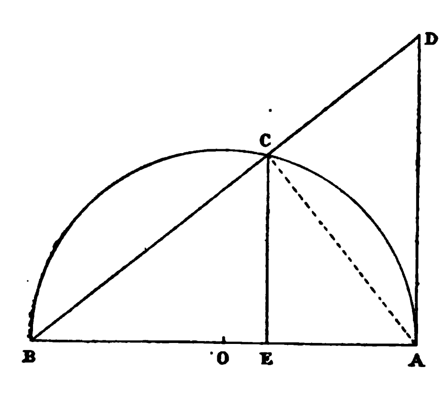
Il en résulte que les sommets C et c_1, B et b_1, A et a_1 des deux triangles ABC, $a_1b_1c_1$, sont sur des droites concourant en O; d'après un théorème connu les points d'intersection D, F, E, des côtés affectés des mêmes lettres sont en ligne droite,

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saulnier; Rivard, au Mans; Van Aubel, à Liège.

QUESTION 279

Solution, par M. LÉON FINAT, élève au Lycée de Moulins.

On donne un demi-cercle ACB *et une tangente* AD *à l'extrémité* A *du diamètre* AB. *On propose de mener par l'extrémité* B *une droite* BCD *qui coupe la circonférence en* C *et la tangente en* D, *de telle sorte que si l'on fait tourner la figure autour de* AB, *la surface de la zone engendrée par* BC *soit égale à la surface du cercle engendré par* AD.



On doit avoir

$$\pi\,\overline{BC}^2 = \pi\,\overline{AD}^2$$

ou $$\overline{DB}^2 = \overline{CA}^2 = BD.\ CD.$$

Le point C partage BD en moyenne et extrême raison. Dès lors on divisera BA en moyenne et extrême raison et par le point E on mènera EC parallèle à AD, puis on joindra BC.

Pour l'expression de la surface on a

$$S = 2\pi R^2 (\sqrt{5} - 1)$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, Prost, à Lons-le-Saunier; Bourget, à Aix; Simonet à Neufchâteau; Lapareillé, Daguilhon, au lycée Henri IV; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Joly, à Tarbes; Chrétien, au Havre; Andrieux, Tinel, à Rouen; de Barrau, à Toulouse; Pierron, à Nantes; Pfender, à Besançon; Desprez, collège Stanislas; Latallerie, à Saint-Dier (Puy-de-Dôme); Gobert, collège Chaptal; Hamon, Rivard, au Mans; Blessel, à Paris; Duley, à Châteauroux.

QUESTION 286

Solution par M. LAPAREILLÉ, élève du Lycée Henri IV.
(Classe de M. Colas.)

Établir une relation entre les coefficients de l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$, *pour qu'on puisse la mettre sous la forme*

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + p(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + q = 0.$$

Développant il vient :

$$\alpha^2 x^4 + 2\alpha\beta x^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2 + p\alpha)x^2 + (2\beta\gamma + p\beta)x + (\gamma^2 + q + p\gamma) = 0$$

ou

$$x^4 + \frac{2\beta}{\alpha}x^3 + \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2\gamma + p}{\alpha}\right)x^2 + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{2\gamma + p}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma^2 + q + p\gamma}{\alpha^2} = 0.$$

L'équation donnée peut s'écrire

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{f}{a} = 0.$$

Pour que la transformation soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{2\beta}{\alpha} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2\gamma + p}{\alpha} = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{2\gamma + p}{\alpha} = \frac{d}{a} \quad (3)$$

$$\frac{\gamma^2 + q + p\gamma}{\alpha^2} = \frac{f}{a} \quad (4)$$

Éliminant α, β, γ et p entre ces équations on aura la relation cherchée.

De (1) on tire
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{2a};$$
portant cette valeur dans (3), il vient
$$\frac{2\gamma + p}{\alpha} = \frac{2d}{b}$$
et alors (2) donne
$$\frac{b^2}{4a^2} + \frac{2d}{b} = \frac{c}{a};$$
d'où
$$b^3 = 4ad(c - 2a):$$
telle est la relation cherchée.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Blessel, à Paris; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Baudouin, à Beauvais; Joly, à Tarbes; Henry, à Bréchaincourt (Vosges).

QUESTION 287

Solution par M. LAPAREILLÉ, élève au Lycée Henri IV.
(Classe de M. Colas.)

On donne $x - y = a$, $xy = b$. *Exprimer* $x^n - y^n$ *en fonction de* b *et de* a *pour une valeur entière, positive et quelconque de* n.

Posons
$$x^{n-2} - y^{n-2} = \Delta_{n-2} \quad (1)$$
$$x^{n-1} - y^{n-1} = \Delta_{n-1} \quad (2)$$
$$x + y = S \quad (3)$$

Multiplions membre à membre (2) et (3), on a
$$x^n - y^n + xy(x^{n-2} - y^{n-2}) = S\Delta_{n-1},$$
d'où
$$\Delta_n = S\Delta_{n-1} - b\Delta_{n-2}; \quad (4)$$
or $(x - y)^2 = a^2$, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$,
donc
$$x + y = S = \sqrt{a^2 + 4b}$$
et (4) devient $\Delta_n = \Delta_{n-1}\sqrt{a^2 + 4b} - b\Delta_{n-2}$.

Alors en faisant $n = 2, 3, 4, \ldots$, on trouve $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$, $x^4 - y^4$, ..., et par suite $x^n - y^n$.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Fievet, à Lille; Blessel, à Paris; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Joly, à Tarbes; Hamon, Rivard, au Mans.

NOTE D'ALGÈBRE

Formule de Taylor pour une fonction entière.

1. — L'objet de cette note est d'obtenir le développement de $f(x+h)$, ordonné suivant les puissances croissantes de h, par l'application immédiate de la règle de dérivation d'une fonction de fonction. $f(x)$ est supposé polynôme entier et rationnel en x.

Je remarque d'abord que dans un tel polynôme, dont je désigne un terme par $A_p x^p$, la dérivée d'ordre p se réduit, pour x nul, à son terme tout connu qui est $1 . 2 \dots p . A_p$. Inversement, le coefficient de x^p s'obtiendra, si l'on sait former la dérivée d'ordre p, en y faisant x nul, puis divisant par $1 . 2 \dots p$.

Ceci posé, $f(x+h)$ est un polynôme en h; la dérivée d'ordre p, par rapport à h, est $f^p(x+h)$ et se réduit à $f^p(x)$ pour h nul, donc le coefficient de h^p est $\dfrac{f^p(x)}{1 . 2 \dots p}$, c. q. f. t.

2. — Le même raisonnement conduit à écrire immédiatement tel terme que l'on veut du développement de $(x+a)^m$ pour m entier, ce qui fournit une démonstration de la formule du binôme, qui n'est pas supposée connue pour ce qui précède.

De même, par l'application de la règle des fonctions composées, on pourra écrire un terme de degré donné en t du développement de $f(x+at, y+bt \dots z+ct)$, si $f(x, y \dots z)$ est polynôme entier et rationnel en $x, y \dots z$.

Par un raisonnement analogue, dans le polynôme $f(x, y \dots z)$, le coefficient de $x^\alpha y^\beta \dots z^\gamma$ s'obtient en faisant $x, y \dots z$ nuls dans le polynôme obtenu après α dérivations par rapport à x, β par rapport à y, etc., puis divisant par $1.2 \dots \alpha . 1.2 \dots \beta . 1.2 \dots \gamma$, d'où les développe-

ments de $f(x + a, y + b \ldots z + c)$, et en particulier celui de $(a + b + \ldots c)^m$ pour m entier.

NOTE SUR L'ÉQUATION EN S

Par M. G. Lemaire, élève au Lycée Charlemagne.

Théorème. — *L'équation en* S *ne peut avoir une racine triple que dans le cas où la surface proposée représente une sphère, cette racine triple étant d'ailleurs différente de zéro.*

On sait comment on démontre que l'équation en S ne peut pas avoir trois racines nulles; nous nous proposons de montrer que l'équation en S n'a jamais trois racines égales excepté dans l'hypothèse

$$A = A' = A'' \quad B = B' = B'' = 0,$$

auquel cas la surface, comme on le sait, représente une sphère.

Remarquons d'abord que si une équation du troisième degré a une racine triple, celle-ci est nécessairement réelle, nous la représenterons par a. On aurait donc, par application de principes connus,

$$A + A' + A'' = 3a \qquad (1)$$

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 3a^2 \qquad (2)$$

Élevant la première au carré et retranchant le double de la seconde, on a d'abord

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 3a^2 \qquad (3)$$

qui prouve, ceci est très connu, l'impossibilité de la racine triple nulle. La combinaison de (2) et (3) donne alors

$$A^2 + A'^2 + A''^2 - AA' - AA'' - A'A'' + 3B^2 + 3B'^2 + 3B''^2 = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{2}(A - A')^2 + \frac{1}{2}(A' - A'')^2 + \frac{1}{2}(A'' - A)^2 + 3B^2 + 3B'^2 + 3B''^2 = 0$$

laquelle, pour des valeurs réelles des coefficients, exige bien

$$A = A' = A'' \quad B = B' = B'' = 0.$$

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

Par M. Ibach, étudiant à la Faculté des sciences de Marseille.

I

Soit un déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda + \mu + \nu$$

Je pose les notations suivantes que j'emploierai constamment :

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{b_3} \\ \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \qquad C = \begin{vmatrix} (a_2b_3) & (b_1a_3) & (a_1b_2) \\ (b_2c_3) & (c_1b_3) & (b_1c_2) \\ (a_3c_2) & (c_3a_1) & (c_2a_1) \end{vmatrix}$$

et

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_2b_3)} & \frac{1}{(b_1a_3)} & \frac{1}{(a_1b_2)} \\ \frac{1}{(b_2c_3)} & \frac{1}{(c_1b_3)} & \frac{1}{(b_1c_2)} \\ \frac{1}{(a_3c_2)} & \frac{1}{(c_3a_1)} & \frac{1}{(c_2a_1)} \end{vmatrix}$$

Les formes de A et B montrent qu'il n'y a pas, en général, entre eux, de relation remarquable ; sauf pour le cas du 2e degré où A étant égal à $\lambda + \mu$, B a pour valeur $\frac{A}{\lambda\mu}$.
On a donc pour le cas du 2e degré :

$$A = B \,.\, \lambda\mu. \qquad (1)$$

Le déterminant C est le réciproque de A ; on a, par conséquent, $C = A^{n-1}$ (n étant le degré).

Dans le cas du 3e ordre, il existe entre B et D une relation simple, que je vais établir ; mais je démontrerai auparavant le théorème suivant :

Théorème I. — *Lorsqu'un déterminant est nul, ses mineurs du premier ordre sont proportionnels.*

Ainsi, je suppose B = o (*), je puis alors trouver des valeurs acceptables de λ, μ, ν telles que

$$\frac{\lambda}{a_1} + \frac{\mu}{a_2} + \frac{\nu}{a_3} = 0$$
$$\frac{\lambda}{b_1} + \frac{\mu}{b_2} + \frac{\nu}{b_3} = 0$$
$$\frac{\lambda}{c_1} + \frac{\mu}{c_2} + \frac{\nu}{c_3} = 0.$$

En combinant ces équations deux à deux, je puis obtenir les trois séries de rapports

$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{a_2 b_3}\right)} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{b_1 a_3}\right)} = \frac{\nu}{\left(\frac{1}{a_1 b_2}\right)};$$
$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{b_2 c_3}\right)} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{c_1 b_3}\right)} = \frac{\nu}{\left(\frac{1}{b_1 c_2}\right)};$$
$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{a_3 c_2}\right)} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{c_3 a_1}\right)} = \frac{\nu}{\left(\frac{1}{c_2 a_1}\right)}.$$

Eliminant ensuite λ, μ, ν, j'obtiens

$$\frac{\left(\frac{1}{a_2 b_3}\right)}{\left(\frac{1}{b_2 c_3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{b_1 a_3}\right)}{\left(\frac{1}{c_1 b_3}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a_1 b_2}\right)}{\left(\frac{1}{b_1 c_2}\right)}; \qquad (2)$$
$$\frac{\left(\frac{1}{a_2 b_3}\right)}{\left(\frac{1}{a_3 c_2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{b_1 a_3}\right)}{\left(\frac{1}{c_3 a_1}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a_1 b_2}\right)}{\left(\frac{1}{c_2 a_1}\right)};$$
$$\frac{\left(\frac{1}{b_2 c_3}\right)}{\left(\frac{1}{a_3 c_2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{c_1 b_3}\right)}{\left(\frac{1}{c_3 a_1}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{b_1 c_2}\right)}{\left(\frac{1}{c_2 a_1}\right)},$$

et le théorème est démontré.

Théorème II. — *Dans le cas du troisième ordre, les déterminants* B *et* D *sont nuls en même temps.*

(*) J'ai pris B, parce que le calcul me servira au théorème suivant.

Je suppose, par exemple, $B = 0$. Alors, appliquant le théorème précédent, j'obtiens les égalités (2); et comme elles ne contiennent que des mineurs du deuxième degré, puisque A est du troisième, elles peuvent se transformer en les suivantes :

$$\frac{(a_2b_3)\cdot\dfrac{c_2c_3}{a_2a_3}}{(b_2c_3)} = \frac{(b_1a_3)\cdot\dfrac{c_1c_3}{a_1a_3}}{(c_1b_3)} = \frac{(a_1b_2)\cdot\dfrac{c_1c_2}{a_1a_2}}{(b_2c_1)};$$

$$\frac{(a_2b_3)\cdot\dfrac{c_2c_3}{b_2b_3}}{(a_3c_2)} = \frac{(b_1a_3)\cdot\dfrac{c_2c_3}{b_1b_3}}{(c_3a_1)} = \frac{(a_1b_2)\cdot\dfrac{c_1c_2}{b_1b_2}}{(c_2a_1)}.$$

Désignant par u_1, u_2 les valeurs communes de ces rapports, je remplace dans D les éléments des deuxième et troisième lignes par leurs valeurs tirées des équations précédentes.

J'obtiens ainsi $D = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(a_2b_3)} \cdot \dfrac{1}{(b_1a_3)} \cdot \dfrac{1}{(a_1b_2)} \\ \dfrac{1}{u_1}\,\dfrac{1}{(a_2b_3)} \cdot \dfrac{a_2a_3}{c_2c_3} \cdot \dfrac{1}{u_1} \cdot \dfrac{1}{(b_1a_3)} \cdots \\ \dfrac{1}{u_2} \cdot \dfrac{1}{(a_2b_3)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix}$

ou, en faisant sortir les facteurs communs, multipliant d'abord par $(c_1c_2c_3)^2$, divisant ensuite par le produit des éléments :

$$D - \frac{c_1c_2c_3}{a_1a_2a_3 \cdot b_1b_2b_3} = \frac{1}{u_1u_2}\;\frac{1}{(a_2b_3)\cdot(b_1a_3)\cdot(a_1b_2)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{c_1} & \dfrac{1}{c_2} & \dfrac{1}{c_3} \\ \dfrac{1}{b_1} & \dfrac{1}{b_2} & \dfrac{1}{b_3} \\ \dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{a_3} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$D = \frac{a_1a_2a_3 \cdot b_1b_2b_3}{c_1c_2c_3} \cdot \frac{B}{u_1u_2 \cdot (a_2b_3) \cdot (b_1a_3) \cdot (a_1b_2)},$$

et le théorème est démontré.

Remarque. — La forme précédente, étant symétrique par rapport aux éléments du déterminant, peut prendre deux autres formes analogues.

Je vais appliquer les résultats précédents au théorème suivant :

Application I. — *Les six sommets de deux triangles circonscrits à une conique sont sur une conique.*

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des côtés d'un des triangles.

$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$, celle d'une conique inscrite, (4)

$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma} = 0$, — — circonscrite. (3)

Je considère de plus trois tangentes à la conique (3)

$$\left.\begin{array}{l} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0. \\ b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma = 0. \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = 0. \end{array}\right\} (5) \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{l}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \frac{n}{a_3} = 0. \\ \frac{l}{b_1} + \frac{m}{b_2} + \frac{n}{b_3} = 0. \\ \frac{l}{c_1} + \frac{m}{c_2} + \frac{n}{c_3} = 0. \end{array}\right\} (6)$$

(les déterminants A et B des systèmes (5), (6) étant les mêmes que précédemment).

Ces tangentes forment un nouveau triangle circonscrit dont je désignerai les sommets par (a_1b_1), (b_1c_1), (c_1a_1). J'exprime que ces trois sommets sont sur (4) qui est déjà circonscrite au premier triangle. Pour cela, je tire

$$\frac{\alpha}{(a_2b_3)} = \frac{\beta}{(b_1a_3)} = \frac{\gamma}{(a_1b_2)};$$

$$\frac{\alpha}{(b_2c_3)} = \frac{\beta}{(b_3c_1)} = \frac{\gamma}{(b_1c_2)};$$

$$\frac{\alpha}{(a_2c_3)} = \frac{\beta}{(c_1a_3)} = \frac{\gamma}{(a_1c_2)};$$

éliminant ensuite α, β, γ, et successivement entre (2) et les rapports précédents, j'obtiens les conditions

$$\left.\begin{array}{l} (a_1b_1)\ldots\ldots \frac{\lambda}{(a_2b_3)} = \frac{\mu}{(b_1a_3)} = \frac{\nu}{(a_1b_2)} = 0, \\ (b_1c_1)\ldots\ldots \frac{\lambda}{(b_2c_3)} = \frac{\mu}{(b_3c_1)} = \frac{\nu}{(b_1c_2)} = 0, \\ (c_1a_1)\ldots\ldots \frac{\lambda}{(a_2c_3)} = \frac{\mu}{(a_1c_3)} = \frac{\nu}{(a_1c_2)} = 0. \end{array}\right\} (7)$$

Je cherche l'équation de la conique passant par $(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$ et deux des sommets $(a_1b_1,\ b_1c_1)$ par exemple, elle sera

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{(a_2b_3)} & \frac{1}{(b_1a_3)} & \frac{1}{(a_1b_2)} \\ \frac{1}{(b_2c_3)} & \frac{1}{(b_3c_1)} & \frac{1}{(b_1c_2)} \end{vmatrix} = 0,$$

et en exprimant que le troisième sommet a_1c_1 se trouve sur cette conique, j'obtiens enfin la condition définitive $D = 0$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_2b_3)} & \frac{1}{(b_1a_3)} & \frac{1}{(a_1b_2)} \\ \frac{1}{(b_2c_3)} & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(a_2c_3)} & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Or, le déterminant B est nul, puisque le système (6) homogène et du premier degré doit donner pour l, m, n des solutions autres que o; donc, d'après le théorème II, D est nul aussi et le théorème est démontré.

Interprétation géométrique de la condition $D = 0$.

Le calcul précédent montre que $D = 0$ exprime que six points sont sur une conique.

Interprétation géométrique de la condition $B = 0$.

Le calcul précédent montre, de même, que $B = 0$ exprime que six droites sont tangentes à une même conique.

Remarque. — Les déterminants B et D jouent d'ailleurs le même rôle, et pour s'en assurer, il suffit de changer les notations. Aussi, si j'avais considéré les coordonnées des sommets du deuxième triangle circonscrit au lieu des équations de ses côtés, les rôles auraient été changés; $B = 0$ eût été la condition pour que six points soient sur une conique et $D = 0$ la condition pour que six droites soient tangentes. Cette remarque démontre, si l'on veut, que la réciproque du théorème II est vraie.

II

Je considère encore le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

avec les mêmes notations que précédemment. Je suppose qu'il satisfasse aux relations suivantes

$$\frac{a_1}{(b_2c_3)} = \frac{a_2}{(c_1b_3)} = \frac{a_3}{(b_1c_2)} = u_1;$$

$$\frac{b_1}{(a_2c_3)} = \frac{b_2}{(a_3c_1)} = \frac{b_3}{(a_1c_2)} = u_2;$$

$$\frac{c_1}{(a_2b_3)} = \frac{c_2}{(a_3b_1)} = \frac{c_3}{(a_1b_2)} = u_3;$$

Je vais alors démontrer le théorème suivant:

Théorème III. — *Le déterminant* A *est égal à la racine* (n — 2)^{me} *de l'inverse du produit* $u_1\ u_2\ u_3$, *valeurs communes des rapports.*

En effet, le déterminant réciproque de A est égal à

$$C = \begin{vmatrix} (b_2c_3). & (c_1(. & (b_3b_1c_2) \\ (a_2c_3). & (a_3c_1). & (a_1c_2) \\ (a_2b_3). & (a_3b_1). & (a_1b_2) \end{vmatrix}$$

et, en éliminant les mineurs entre C et les rapports (7).

$$C = \frac{A}{u_1u_2u_3};$$

mais

$$C = A^{n-1};$$

donc

$$A = \frac{1}{\sqrt[n-2]{u_1u_2u_3}}.$$

Remarque. — Si les quantités $u_1u_2u_3$ étaient toutes égales à 1, le déterminant A serait lui-même égal à 1.

Il résulte aussi des relations (7) que B et D sont liés par

$$B = \frac{D}{u_1u_2u_3}.$$

ou

$$B = A^{n-2}D,$$

puisque

$$A^{n-2} = \frac{1}{u_1u_2u_3}.$$

Théorème IV. — *Lorsqu'un déterminant du 3e ordre satisfait aux relations* (7) *les déterminants* B *et* D *formés avec lui sont nuls tous deux.*

Je considère toujours le déterminant A écrit précédemment; on aura

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{}{a_3} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{b_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Son réciproque E sera

$$E = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{b_2c_3}\right) & \left(\frac{1}{c_1b_3}\right)^{a} & \cdot \\ \left(\frac{1}{a_2c_3}\right) & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Comme A est du troisième degré, ses mineurs du premier ordre sont du deuxième, et le déterminant E s'écrit

$$E = \begin{vmatrix} \frac{(b_2c_3)}{b_2c_2b_3c_3} & \frac{(c_2b_3)}{c_1c_3b_1b_3 1} & \cdots \\ \frac{(a_2c_3)}{a_1c_1a_3c_3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

En multipliant par le carré du produit P des éléments, et divisant ensuite par ce même produit, j'obtiens

$$PE = \begin{vmatrix} \frac{(b_2c_3)}{a_1} & \frac{(c_1b_3)}{a_2} & \cdots \\ \frac{(a_2c_3)}{b_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Or, le deuxième membre de cette égalité est nul à cause des relations (7). Donc [en supposant que P ne soit pas nul, ce qui est nécessaire, d'ailleurs, à cause de (7)] E est nul aussi, et comme $E = B^2$,
B est égal à O et le théorème est démontré, puisque d'après (II) B et D sont nuls en même temps.

Application II. — *Les six sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont sur une conique.*

Soient $\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0$
l'un des triangles, et

$$\left.\begin{array}{l} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0 \\ b_1\alpha + b_2\beta + \ldots \\ c_2\alpha + c_2\beta + \ldots \end{array}\right\} (8) \quad \text{les équations des côtés du deuxième.}$$

Les deux triangles précédents seront autopolaires par rapport à une même conique, si le dernier l'est par rapport à

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Le sommet $(a_1 b_1)$ est déterminé par

$$\frac{\alpha'}{(a_2b_3)} = \frac{\beta'}{(a_3b_1)} = \frac{\gamma'}{(a_1b_2)}$$

et sa polaire, qui est $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$,
doit aussi être $c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = 0$.

On a donc les conditions

$$\frac{c_1}{(a_2b_3)} = \frac{c_2}{(a_3b_1)} = \frac{c_3}{(a_1b_2)};$$

$$\frac{b_1}{(a_2c_3)} = \frac{b_2}{(a_3c_1)} = \frac{b_3}{(a_1c_2)};$$

$$\frac{a_1}{(b_2c_3)} = \frac{a_2}{(c_3b_3)} = \frac{a_3}{(b_1c_2)};$$

mais elles expriment que le déterminant A du système (8) rentre dans la catégorie des déterminants étudiés précédemment, et nous avons vu que pour ceux-ci

$$D = 0.$$

Or, telle est la condition pour que les six sommets soient sur une même conique : le théorème est donc démontré.

Application III. — *Les six côtés sont tangents à une même conique.*

Ce théorème est encore évident, puisque B est nul aussi et que B exprime que les six côtés sont tangents à une même conique.

Interprétation géométrique des relations (7).

Le calcul précédent montre qu'assujettir un déterminant aux conditions (7), c'est exprimer que deux triangles sont autopolaires par rapport à une même conique.

Cette dernière remarque est applicable aux surfaces deuxième degré.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite;* voir page 232.)

Transformation des coordonnées tangentielles déduites de la propriété fondamentale de la forme adjointe. — Nous avons démontré, dans notre travail sur les formes quadratiques, que si une forme f est transformée par une certaine substitution linéaire en une autre forme f', la forme F, adjointe de f, est transformée en la forme F′, adjointe de f', par la substitution adjointe de la substitution donnée.

Il résulte immédiatement de ce principe que la forme f étant transformée en f' par une substitution linéaire, il suffira de prendre la substitution adjointe de celle-ci pour avoir les formules qui transforment l'équation tangentielle de la courbe relative au premier cas, en l'équation tangentielle de la courbe pour le second cas.

Or, soit
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \ldots + \alpha_{1n}\,x'_n \\ x_1 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}\,x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x'_1 + \alpha_{n2}x'_2 + \ldots + \alpha_{nn}\,x'_n \end{array}\right. \qquad (1)$$
la première substitution, dont le déterminant est R, la substitution adjointe est, comme on sait, la suivante
$$\begin{array}{l} x_1 = \mathrm{R}'_{(\alpha_{11})}x'_1 + \mathrm{R}'_{(\alpha_{12})}x'_2 + \ldots + \mathrm{R}'_{(\alpha_{1n})}x'_n \\ x^2 = \mathrm{R}'_{(\alpha_{21})}x'_1 + \mathrm{R}'_{(\alpha_{22})}x'_2 + \ldots + \mathrm{R}'_{(\alpha_{2n})}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \mathrm{R}'_{(\alpha_{n1})}x'_1 + \mathrm{R}'_{(\alpha_{n2})}x'_2 + \ldots + \mathrm{R}'_{(\alpha_{nn})}x'_n\,. \end{array}$$

L'équation tangentielle d'une conique $f(x, y, z) = 0$ étant la forme adjointe $F(u, v, w)$ de f égalée à o, quand f sera changée en f', F se changera en F' par la substitution adjointe. F' égalée à o étant d'ailleurs l'équation tangentielle de la courbe après substitution, la substitution adjointe donne donc les formules de transformation de F en F', c'est-à-dire les formules de transformation des coordonnées tangentielles.

Or on a, pour la première substitution,

$$x = x'\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} + y'\frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + az',$$

$$y = x'\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} + y'\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} + bz',$$

$$z = z'.$$

$$\text{Donc } R = \begin{vmatrix} \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} & \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} & a \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} & \frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et par suite la substitution adjointe donnera

$$u = u'\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} - v'\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$v = -u'\frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + v'\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$

$$w = \frac{\sin(\theta - \alpha)\sin\alpha'}{\sin^2\theta} - \frac{\sin(\theta - \alpha')\sin\alpha}{\sin^2\theta} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\theta}.$$

Application de l'équation tangentielle des coniques à la recherche des foyers. — On démontre, dans tous les cours de spéciales, que les foyers d'une conique sont des points tels que si l'on mène de ces points des tangentes à la courbe, ces tangentes ont les directions isotropes, c'est-à-dire les directions asymptotiques du cercle.

Cela posé, si $\varphi(u, v) = 0$ est l'équation tangentielle d'une conique, c'est-à-dire la condition pour qu'une droite $ux + vy + 1 = 0$ soit tangente à cette conique, on exprimera que la tangente passe par un point (α, β) en écrivant la relation $u\alpha + v\beta + 1 = 0$, et cette relation jointe

à l'équation tangentielle $\varphi(u, v) = 0$ détermine les coordonnées u et v des tangentes qu'on peut mener à la courbe par le point (α, β). L'équation $\varphi(u, v) = 0$ étant du second degré, il y aura deux solutions, c'est-à-dire deux tangentes issues du point $(\alpha\beta)$. Pour que ces tangentes aient les directions isotropes, il faut que u et v satisfassent à l'équation $u^2 + v^2 = 0$ en coordonnées rectangulaires, ou à l'équation $u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta = 0$ en coordonnées obliques d'angle θ. L'expression de cette condition conduira à la détermination du point $(\alpha\beta)$, qui dès lors sera un foyer.

Prenons pour exemple l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; son équation tangentielle, déterminée comme il a été dit précédemment, sera

$$a^2u^2 + v^2b^2 = 1.$$

On a d'ailleurs $u\alpha + v\beta + 1 = 0.$

Ces deux équations déterminent les coordonnées des deux tangentes qu'on peut mener à l'ellipse du point $(\alpha\beta)$; pour que ces droites aient les directions isotropes, c'est-à-dire pour que le point $(\alpha\beta)$ soit un foyer, il faut qu'on ait (les coordonnées étant rectangulaires)

$$u^2 + v^2 = 0.$$

Or on tire de ces équations $u^2 = \frac{1}{a^2 - b^2}$ et $v^2 = \frac{1}{b^2 - a^2}$.

Supposons $a > b$, c'est-à-dire que l'axe des x ait été choisi de telle façon qu'il soit le plus grand des deux axes en longueur, on aura, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$u = \pm \frac{1}{c} \text{ et } v = \pm \frac{1}{c}\sqrt{-1},$$

d'où la condition $\pm\frac{\alpha}{c} \pm \sqrt{-1} \cdot \frac{\beta}{c} + 1 = 0.$

Cette condition exige que l'on ait séparément $\beta = 0$ et $\alpha = \pm c$, formules qui donnent les coordonnées des deux seuls foyers réels de la courbe.

Les directrices correspondantes s'obtiendront en prenant les polaires respectives des foyers; ce qui donne les deux droites $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

Dans la pratique, on cherche généralement la condition

pour qu'une droite $y = mx + n$ soit tangente à la conique donnée, et on écrit que m satisfait à l'une des relations $1 + m^2 = 0$, ou bien $1 + m^2 + 2m \cos \theta = 0$, relation qui fournit deux équations pour déterminer α et β, en égalant séparément à zéro le coefficient de la partie réelle et celui de la partie imaginaire.

Si l'équation des coniques considérées contient un paramètre variable, l'élimination de ce paramètre entre les deux équations ainsi obtenues fournira le lieu décrit par les foyers.

Cette méthode nous semble la plus simple de toutes celles que l'on donne ordinairement pour la détermination des foyers, ou des lieux de foyers, et surtout quand des motifs particuliers, tirés de la nature de la question, engagent à adopter des coordonnées obliques. Il ne sera pas inutile d'en donner un exemple :

On considère toutes les coniques tangentes à deux droites données en des points donnés A *et* B; *trouver le lieu de leurs foyers.*

Si l'on prend pour axes les deux droites données, en appelant a et b les coordonnées respectives des points A et B, l'équation générale des coniques considérées sera

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + 2\lambda xy = 0.$$

Écrivons qu'une droite $y = mx + n$ est tangente à cette courbe, nous aurons

$$n^2(2 + \lambda ab) + 2n(am - b) - 2amb = 0.$$

La condition pour que la tangente passe par le point $(\alpha\beta)$ est $\alpha\beta = m + n$, de sorte que l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues du point $(\alpha\beta)$ est

$$(\beta - m\alpha)^2(2 + \lambda ab) + 2(\beta - m\alpha)(am - b) - 2amb = 0,$$

c'est-à-dire

$$m^2[\alpha^2(2 + \lambda ab) - 2a\alpha] + 2m[a\beta + b\alpha - ab - \alpha\beta(2 + \lambda ab)] + \beta^2(2 + \lambda ab) - 2b\beta = 0,$$

L'équation qui donne les directions isotropes en coordonnées obliques est

$$m^2 + 2m \cos\theta + 1 = 0.$$

On aura donc

$$\alpha^2(2 + \lambda ab) - 2a\alpha = \frac{a\beta + b\alpha - ab - \alpha\beta(2 + \lambda ab)}{\cos\theta} = \beta^2(2 + \lambda ab) - 2b\beta.$$

Entre ces deux équations éliminant λ, on aura l'équation du lieu des foyers.

Or, on a

$$2+\lambda ab = \frac{2(a\alpha - b\beta)}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{a\beta + b\alpha - ab + 2b\beta\cos\theta}{\beta(\beta\cos\theta + \alpha)}.$$

L'équation du lieu est donc

$$2y(x+y\cos\theta)(ax-by) = (x^2-y^2)(ay+bx-ab+2by\cos\theta),$$

qui représente une courbe du troisième degré ayant un point double à l'origine des axes, et qui, par conséquent, est facile à construire par le procédé $y = tx$ (c'est une courbe unicursale). Son équation, dont la forme est $A_1A_2A_3 = B_1B_2B_3$, dans laquelle A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 sont des fonctions linéaires des coordonnées x et y, met immédiatement en évidence plusieurs propriétés de la courbe, que le lecteur trouvera facilement.

(A suivre.)

QUESTION 257.

Solution par M. Baron, élève au Lycée Henri IV.

A partir du point A *où la normale en* M *rencontre l'un des axes, nous menons une perpendiculaire à cette normale ; cette droite rencontre le diamètre* OM *en un point* D. *Nous abaissons de ce point* D *une perpendiculaire sur l'axe dont nous avons considéré le point de rencontre avec la normale. Cette perpendiculaire rencontre la normale au centre du cercle osculateur à la courbe en* M.

Je prends pour axes de coordonnées Mx et My, parallèles aux axes de l'ellipse. L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2x\cos\varphi}{a}+\frac{2y\sin\varphi}{b} = 0. \quad (1)$$

Nous avons vu (n° 256) que le centre du cercle osculateur était déterminé par l'intersection de la perpendiculaire au milieu de la seconde corde commune au cercle et à la courbe, avec la normale en M.

Les équations de la normale et de la corde commune sont

$$y = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} x \qquad (2)$$

$$y + 2b \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} (x + 2a \sin^2\varphi \cos \varphi) \qquad (3)$$

Leur point d'intersection aura pour abscisse

$$x = -\frac{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi) \cos \varphi}{a}. \qquad (4)$$

Cela posé, je remarque que si la parallèle menée par D à l'axe OB passe par le centre du cercle osculateur, l'abscisse du point D sera la même que celle de I.

Or, la ligne OM a pour équation

$$y = \frac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi} x. \qquad (5)$$

Le point A, intersection de la normale en M avec OA, a pour coordonnées $y = -b \sin \varphi$

$$x = -\frac{b^2 \cos \varphi}{a}.$$

La perpendiculaire à MA par le point A est

$$y + b \sin \varphi = -\frac{b \cos \varphi}{a \sin \varphi} \left(x + \frac{b^2 \cos \varphi}{a}\right) \qquad (6)$$

Cherchons l'abscisse du point commun à cette droite et à OM; on trouve après réduction

$$x = -\frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi}{a}$$

Donc la parallèle à OB menée par le point D passe par le centre du cercle osculateur, et le détermine par son intersection avec la normale.

QUESTION 273

Solution par M. DUPUY, élève du Lycée de Grenoble.

Si m désigne un nombre entier et positif, à quelle condition doit-il satisfaire pour que

$$(x + y)^m - (x^m + y^m)$$

soit divisible par $\quad x^2 + xy + y^2$?

Il s'agit de chercher pour quelle valeur de m l'expression

$$(x+y)^m - (x^m + y^m)$$

s'annule quand on y remplace x par sa valeur en fonction de y tirée de l'équation

$$x^2 + xy + y^2 = 0.$$

On trouve $x = y\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$;

en appelant j et j^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité, on voit que l'on a

$$x = jy, \text{ et } x = j^2y.$$

Portant ces valeurs dans l'expression proposée, il viendra

$$(jy+y)^m - (j^m y^m + y^m) = 0, \text{ ou } (j+1)^m = j^m + 1$$

$$\text{et } (j^2y+y)^m - (j^{2m} y^m + y^m) = 0, \text{ ou } (j^2+1)^m = j^{2m} + 1.$$

Remplaçant j par sa valeur, il vient

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^m = (-1)^m\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^m + 1.$$

Or $$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3};$$

donc on a

$$\cos\frac{m\pi}{3} + i\sin\frac{m\pi}{3} = (-1)^m\left(\cos\frac{m\pi}{3} - i\sin\frac{m\pi}{3}\right) + 1.$$

Si donc m est pair, on aura, tous calculs faits,

$$\sin\frac{m\pi}{3} = \frac{1}{2i},$$

équation impossible.

Au contraire, pour m impair, on aura

$$\cos\frac{m\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

équation qui sera satisfaite pour $m = 6p \pm 1$.

En considérant la seconde équation, on retrouvera la même condition. Donc, pour que l'expression

$$(x+y)^m - (x^m + y^m)$$

soit divisible par $x^2 + xy + y^2$, il faut que m soit de la forme $6p \pm 1$.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Andrieu, au lycée de Rouen ; Le Pont, au lycée Saint-Louis ; Boulogne, au lycée de Lille.

QUESTION 297

Solution par M. Baron, élève au Lycée Henri IV.

Si α, β, γ, δ *sont racines de l'équation du quatrième degré* $f(x) = 0$, *on peut exprimer la somme*

$$\Sigma = f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) + f'(\delta)$$

sous forme d'un produit de trois facteurs.

En effet, en supposant le premier coefficient égal à l'unité, on a

$$f'(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta),$$
$$f'(\beta) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta),$$
$$f'(\gamma) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta),$$
$$f'(\delta) = (\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma).$$

En faisant la somme, il vient

$$\Sigma = (\alpha - \beta)[\alpha^2 - \beta^2 - (\alpha - \beta)(\gamma + \delta)] + (\gamma - \delta)[\gamma^2 - \delta^2 - (\gamma - \delta)(\alpha + \beta)]$$

$$\Sigma = (\alpha - \beta)^2[(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)] + (\gamma - \delta)^2[(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)]$$

$$\Sigma = (\alpha - \beta + \gamma - \delta)(\alpha - \beta - \gamma + \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta).$$

Remarque. — On peut facilement trouver l'expression de Σ en fonction des coefficients sans connaître les racines de $f(x) = 0$.

En désignant par S_1, S_2, S_3 les sommes des puissances 1, 2, 3 des racines, si

$$f(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$
$$f'(x) = 4A_0x^3 + 3A_1x^2 + 2A_2x + A_3,$$

on aura donc les relations suivantes :

$$4A_0S_3 + 3A_1S_2 + 2A_2S_1 + 4A_3 - \Sigma = 0.$$
$$A_0S_3 + A_1S_2 + A_2S_1 + 3A_3 = 0,$$
$$A_0S_2 + A_1S_1 + 2A_2 = 0.$$
$$A_0S_1 + A_1 = 0.$$

Éliminant S_1, S_2, S_3, il vient

$$\begin{vmatrix} 4A_0 & 3A_1 & 2A_2 & 4A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & 3A_3 \\ 0 & A_0 & A_1 & 4A_2 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 \end{vmatrix} + A_0^3\Sigma = 0$$

ou $$A_0^2\Sigma + \begin{vmatrix} A_1 & 2A_2 & 8A_3 \\ A_0 & A_1 & 2A_2 \\ 0 & A_0 & A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

c'est-à-dire $$A_0^2\Sigma + A_1^3 + 8A_0A_3 - 4A_0A_1A_2 = 0$$

et $$\Sigma = \frac{4A_0A_1A_2 - 8A_0^2A_3 - A_1^3}{A_0^2}.$$

Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Boulogne, Quiquet, de Lille, Petit, de Grenoble; Séry, lycée Saint-Louis; Leffuber, à Rennes; Gino Loria, à Mantoue.**

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Géométrie analytique à deux dimensions.

Etant donnés une parabole et un point A dans son plan, trouver sur la courbe un point M tel que la droite AM soit normale à la parabole au second point N où elle la rencontre. Discussion des résultats.

— Etant donnée l'équation $x^2 + y^2 - 1 - (2x + y - 1)^2 = 0$, calculer les coordonnées : 1° des foyers; 2° des sommets réels; 3° des sommets imaginaires, de la courbe qu'elle représente.

Equation du second degré qui représente le faisceau des asymptotes.

— Points remarquables de la courbe $x^3 + xy^2 + y^3 - x^2 = 0$.

— Etant donnée la courbe dont l'équation est $y^2 = \dfrac{x^3}{1-x}$, calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle formé par les trois tangentes issues d'un point donné $(\alpha\beta)$.

— Sachant que pour qu'une forme homogène du second degré à trois variables soit un carré parfait, il faut et il suffit que les trois dérivées partielles de cette forme soient des multiples d'un même polynôme homogène du premier degré, appliquer cette propriété à la recherche des foyers de la courbe

$$y^2 - 3xy + x^2 - 1 = 0.$$

— Lieu des contacts des tangentes menées d'un point $(\alpha\beta)$ du plan à toutes les hyperboles ayant mêmes asymptotes.

— Trouver les tangentes horizontales de la courbe

$$y = x^2 \pm \frac{1}{2} x^2\sqrt{1 + x}.$$

— Soit l'équation $Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dx^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky = 0$, on demande le lieu des milieux des cordes menées de l'origine des coordonnées dans la courbe représentée par cette équation.

— Chercher la relation qui doit exister entre les coefficients des équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 1 = 0,$$

$$\text{et } A'(x-\lambda)^2 + 2B'(x-\lambda)y + C'y^2 + 1 = 0,$$

pour que l'axe des x soit une sécante commune aux deux coniques qu'elles représentent. — Quelles applications immédiates peut-on faire du résultat trouvé?

— Soient $f(x,y) = 0$ et $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ les équations d'une courbe quelconque et d'une droite ; trouver l'équation de la courbe symétrique de la courbe donnée par rapport à la droite donnée.

— On demande de former l'équation générale des courbes du quatrième degré ayant deux branches passant à l'origine des axes. — Cela posé, trouver les contacts des tangentes menées de l'origine à la courbe complète, et former l'équation du faisceau de ces tangentes.

— Recherche des sécantes communes aux deux coniques

$$x^2 + xy - x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0.$$

— Rechercher, par le calcul et par le raisonnement direct, si deux coniques peuvent être bitangentes en des points imaginaires.

— Construire la courbe ayant pour équation $y = x\frac{e^x}{e^x - 1}$.

— On mène à la courbe $y = x^3$ une tangente qui rencontre la courbe ou un second point B autre que le contact A. On demande le lieu des milieux des segments AB compris sur chaque tangente entre ces deux points.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques élémentaires.

346. — Sur une droite, à partir d'un point A, on porte des longueurs égales AB, BC, CD... à la suite les unes des autres ; au point A on élève une perpendiculaire AX, et l'on joint X aux divers points de division. Trouver une relation entre les angles sous lesquels on voit du point X les divers segments AB, BC, CD, etc.

347. — Dans un parallélogramme, on donne la somme des côtés et des diagonales $2a$, un angle β, et l'angle des diagonales ω. Trouver les côtés et les diagonales.

348. — Trois circonférences passent en un point H, et se coupent en trois autres points situés sur une droite xy. Si par un point quelconque de xy, on mène des tangentes aux trois circonférences, les trois points de contact ainsi obtenus et le point H sont sur une même circonférence.

349. — Dans tout quadrilatère, les diagonales coupent les côtés du parallélogramme maximum inscrit aux sommets d'un deuxième quadrilatère, inscrit dans le parallé-

logramme semblable au quadrilatère donné, et égal au quart de ce premier quadrilatère.

350. — Les centres de gravité des quatre triangles dans lesquels tout quadrilatère est divisé par ses deux diagonales sont les sommets d'un second quadrilatère semblable au parallélogramme maximum inscrit dans le quadrilatère proposé, et équivalent aux $\frac{2}{9}$ de ce quadrilatère.

351. — On donne un cercle O, deux diamètres rectangulaires AA′, BB′; trouver sur OB un point C tel qu'en joignant AC et en menant DCD′ parallèle à AA′ le prolongement de AC partage l'arc BD′ en deux parties égales.

352. — Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la bissectrice de cet angle ou de son supplément.

353. — Sur la circonférence d'un demi-cercle de diamètre AB, on donne un point P. On demande de mener par ce point une droite PX rencontrant le diamètre en X de telle manière que, si l'on élève par le point X l'ordonnée XY du cercle perpendiculaire au diamètre AB, on ait

$$PX^2 - XY^2 = d^2. \qquad \text{(Lieber.)}$$

354. — Mener par un point P, pris dans l'intérieur d'un cercle, une corde qui soit divisée en moyenne et extrême raison par le point P. *(Lieber.)*

Mathématiques spéciales.

355. — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0$$

pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

356. — Étant donnée une conique, on considère les cercles qui sont tangents à cette conique et tels que les tangentes communes à la conique et au cercle soient parallèles. Trouver le lieu des centres de tous ces cercles.

357. — Étant donnée une conique tangente en deux points fixes A et B aux deux côtés d'un angle fixe, on mène à cette conique une troisième tangente variable terminée en C et D aux côtés de l'angle donné; par les points C et D, on mène des parallèles aux deux côtés de l'angle: on demande le lieu des points d'intersection de ces parallèles quand la troisième tangente prend toutes les positions possibles. *(On pourra employer les coordonnées trilinéaires pour résoudre ce problème.)*

358. — On demande si la série

$$1 + \frac{2^m}{1} + \frac{3^m}{2^m + p} + \frac{4^m}{3^m + p} + \ldots + \frac{n^m}{(n-1)^m + p} + \ldots$$

est convergente.

On pourra appliquer le théorème qui permet de considérer le rapport $\dfrac{\mathrm{L}\,.\,\dfrac{1}{u_n}}{\mathrm{L}\,.\,n}$ comme caractère de convergence.

359. — Trouver la condition pour que les polynômes

$$ax^7 + bx^3 + c$$
$$cx^7 + bx^4 + a$$

aient un facteur commun du second degré.

360. — Le quotient de $(2m-1)!$ par $(m)!\,(m-1)!$ est toujours un nombre pair, excepté quand m est une puissance de 2; l'exposant de la puissance de 2 qui entre en facteur dans le quotient est $(q-p-1)$, q étant la somme des chiffres de $2m-1$ écrits dans le système binaire et p l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui entre en facteur dans m. (*Wolstenholme.*)

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 11624-1.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE 1881

Composition de Mathématiques (trois heures).

On donne un cône de révolution dont la génératrice SA *fait avec l'axe* SZ *un angle* β, *et une ellipse dont les demi-axes sont* a *et* b.

1° *Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue en coupant le cône par un plan convenablement déterminé.*

2° *Si* AB *est la trace du plan sécant sur le plan méridien* ASB *qui lui est perpendiculaire, démontrer la relation*

$$SA \;.\; SB = \frac{b^2}{\sin^2 \beta}.$$

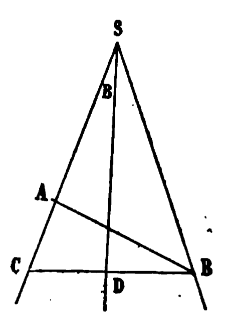
3° *Calculer en fonction des données* a, b, β, *par des formules logarithmiques, l'angle* SAB, *la portion* SA *de la génératrice, ainsi que l'aire du triangle* SAB.

On appliquera ces formules aux nombres suivants :

$$a = 43^m{,}906,\ b = 25^m{,}4346,\ \beta = 5°\ 12'8'',48.$$

1° Supposons que le plan sécant soit déterminé d'après les conditions de l'énoncé ; soit AB sa trace sur le plan méridien qui lui est perpendiculaire. Si l'on mène BC perpendiculaire à SZ, on sait que la longueur AC est égale à la distance focale $2c$; dans le triangle ABC on connaît donc $AB = 2a$, $AC = 2c$, l'angle $C = 90° - \beta$. On peut donc construire ce triangle ; la construction est toujours possible d'une seule manière, parce que

$$AB > AC.$$



La perpendiculaire DS élevée sur le côté AB en son milieu détermine la position du point S, et par suite le triangle SAB. Ce triangle détermine la position du plan sécant.

2° Le triangle ABC donne la relation

$$AB^2 = AC^2 + 4BD^2 - 4BD.AC \sin \beta$$

ou bien $\quad a^2 = c^2 + BD^2 - 2BD \,.\, c \sin\beta$;

d'où l'on tire $\quad BD = c\sin\beta + \sqrt{b^2 + c^2 \sin^2\beta}$

en prenant le radical avec le signe +, car le signe — donnerait pour BD une valeur négative qui ne convient pas à la question.

On a ensuite

$$SB = \frac{BD}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2\sin^2\beta}}{\sin\beta} + c$$

et $\quad SA = SB - 2c = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2\sin^2\beta}}{\sin\beta} - c.$

Donc $\quad SA \,.\, SB = \dfrac{b^2 + c^2\sin^2\beta}{\sin^2\beta} - c^2 = \dfrac{b^2}{\sin^2\beta}.$

3° Le triangle ABC donne

$$\frac{a}{\cos\beta} = \frac{c}{\sin B};$$

d'où $\quad \sin B = \dfrac{c\cos\beta}{a}.$

En posant $\quad \dfrac{b}{a} = \cos\varphi,$

on a $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sin\varphi$

et par suite $\quad \sin B = \sin\varphi\cos\beta.$

L'angle SAB est égal à B + C ou à 90° — β + B, expression dans laquelle il faut prendre pour B l'angle aigu correspondant à la valeur de sin B.

La valeur de SA trouvée plus haut peut s'écrire

$$SA = c\left[\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2\sin^2\beta}} - 1\right]$$

ou, en posant $\quad \operatorname{tg}\psi = \dfrac{b}{c\sin\beta} = \dfrac{\cot\varphi}{\sin\beta}$

$$SA = c\,[\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} - 1] = c\,\frac{(1 - \cos\psi)}{\cos\psi}$$

$$= \frac{2c\sin^2\dfrac{\psi}{2}}{\cos\psi} = \frac{2a\sin\varphi\sin^2\dfrac{\psi}{2}}{\cos\psi}.$$

Enfin la surface du triangle SAB a pour expression

$$S = \frac{1}{2}SA.\,SB\sin 2\beta = \frac{b^2\sin 2\beta}{2\sin^2\beta} = b^2\cot\beta.$$

APPLICATION NUMÉRIQUE

Calcul de l'angle φ. $\cos\varphi = \frac{b}{a} = \frac{25,4346}{43,906}$

$$\log 25,4346 = 1,425\ 4249$$
$$\text{colog}\ 43,906 = \bar{2},357\ 4761$$
$$\log\cos\varphi = \bar{1},762\ 9010$$
$$\varphi = 54^\circ 35' 56'',08.$$

Calcul des angles B et SAB.

$\sin B = \sin\varphi . \cos\beta$.

$$\log\sin\varphi = \bar{1},911\ 2198.2$$
$$\log\cos 5^\circ 12' 8'',48 = \bar{1}.998\ 2072.9$$
$$\log\sin B = \bar{1},909\ 4271.1$$
$$B = 54^\circ 16' 5'',33$$
$$90^\circ - \beta = 84^\circ 47' 51'',52$$
$$SAB = B + 90^\circ - \beta = 139^\circ 3' 56'',85.$$

Calcul de l'angle ψ.

$$\text{tg}\ \psi = \frac{\cot\varphi}{\sin\beta} = \frac{\cot 54^\circ 35' 56'',08}{\sin\ 5^\circ 12' 8'',48}$$
$$\log\cot 54^\circ 35' 56'',08 = \bar{1},851\ 6811.8$$
$$\text{colog}\sin 5^\circ 12' 8'',48 = 1,042\ 5195.6$$
$$\log\text{tg}\ \psi = 0,894\ 2007.4$$
$$\psi = 82^\circ 43' 45'',13$$
$$\frac{1}{2}\psi = 41^\circ 21' 52'',57.$$

Calcul de SA.

$$SA = \frac{2a\sin\varphi\sin^2\frac{\psi}{2}}{\cos\psi}$$
$$= \frac{2.43,906.\ \sin\ 54^\circ 35' 56'',08 \sin^2 41^\circ 21' 52'',57}{\cos 82^\circ 43' 45'',13}$$
$$\log 2 = 0.30103$$
$$\log a = 1,6425239$$
$$\log\sin\varphi = \bar{1},9112198.2$$
$$2\log\sin\frac{\psi}{2} = \bar{1},6402035.4$$
$$\text{colog}\cos\psi = 0,8977068.5$$
$$\log SA = 2,3926841.1 \qquad SA = 246,9927.$$

Calcul de la surface du triangle SAB.

$$S = b^2 \cot \beta = (25{,}4346)^2 \cot 5^\circ 12' 8'',48$$

$$2 \log b = 2{,}8108498$$

$$\log \cot \beta = 1{,}0407268.5$$

$$\log S = 3{,}8515766.5$$

$$S = 7105.2057$$

DEUXIÈME QUESTION. — *Résoudre l'équation* $\sqrt{mx + a} + \sqrt{x + b} = c$, *les lettres* a, b, c, m *désignant des nombres donnés dont le dernier est supérieur ou au moins égal à* 1. *Condition de réalité des racines. Limites de* c.

En faisant disparaître successivement les deux radicaux d'après la méthode connue, on obtient l'équation du second degré

$$x^2(m-1)^2 + 2x[(m-1)(a-b-c^2) - 2c^2] + (a-b-c^2)^2 - 4bc^2 = 0$$

La condition de réalité des racines est

$$[(m-1)(a-b-c^2) - 2c^2]^2 + 4bc^2(m-1)^2 - (m-1)^2(a-b-c^2)^2 > 0$$

ou, après réduction et division par $4c^2$, facteur positif :

$$c^2 - (m-1)(a-b-c^2) + b(m-1)^2 > 0$$

$$mc^2 + (m-1)(mb-a) > 0$$

On voit que si $mb - a$ est positif, les racines seront toujours réelles ; si $mb - a$ est négatif, c devra être plus grand que $+\sqrt{\frac{(a-mb)(m-1)}{m}}$ ou plus petit que $-\sqrt{\frac{(a-mb)(m-1)}{m}}$.

Il est essentiel d'observer qu'une seule des valeurs de x peut satisfaire à l'équation donnée, si les radicaux n'y sont pas affectés du double signe.

ÉPURE

On donne un plan PαP', *incliné de 40 degrés sur le plan horizontal et dont la trace horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 36 degrés. Un cercle situé sur ce plan, dans le premier dièdre, est tangent aux deux traces* αP *et* αP' *et a pour diamètre 54 millimètres; ce cercle est la base d'un cône*

droit, situé au-dessus du plan PαP' *et dont la hauteur égale 108 millimètres. On demande :*

1° De construire les projections de ce cône ;

2° De trouver les points de rencontre de ce cône avec la parallèle à la ligne de terre menée par le milieu de la hauteur ;

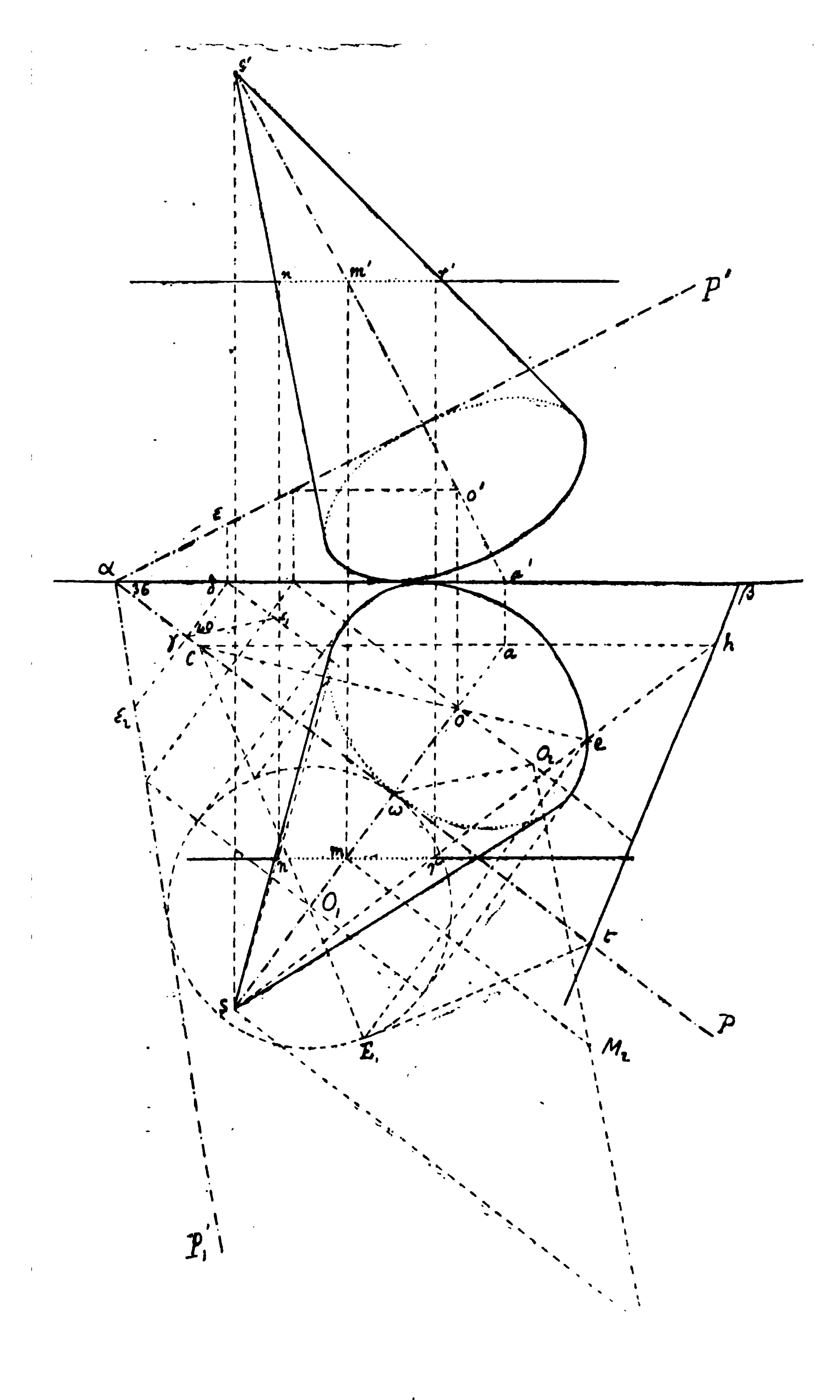
3° De mener le plan tangent au cône par le point de rencontre situé à droite.

Pour construire l'épure, je vais déterminer les diverses parties du problème sans me servir des projections du cône.

D'abord, je déterminerai facilement la trace horizontale et la trace verticale du plan, ainsi que le rabattement de la trace verticale de ce plan. Il suffit pour cela de mener αP faisant avec la ligne de terre l'angle de 36°; ensuite, je mènerai $\gamma\delta$ perpendiculaire à αP, $\delta\varepsilon_2$ parallèle à αP, jusqu'à la rencontre avec $\gamma\varepsilon_2$ faisant avec $\gamma\delta$ un angle de 40°; $\delta\varepsilon_2$ est égal à la cote d'un point de la trace verticale αP', et si, sur le prolongement de $\delta\gamma$ je prends $\gamma\varepsilon_1$ égal à $\gamma\varepsilon_2$, le point ε_1 sera un point du rabattement de la trace verticale.

D'après cela, j'aurai facilement sur le plan rabattu le cercle de base, puisque je connais son rayon, et que je sais qu'il est tangent aux deux traces αP et $\alpha P_1'$. Le centre de ce cercle se trouve sur la bissectrice de l'angle des deux traces, et aussi sur une parallèle à la ligne αP, distante de cette droite de 27 millimètres. J'aurai donc facilement ce centre rabattu en O_1, et par suite ses deux projections seront en o et o'.

Pour avoir le sommet, je remarque que le plan projetant horizontalement la hauteur coupe le plan PαP' suivant une ligne de plus grande pente ; si je rabats ce plan projetant, la ligne de plus grande pente se rabat suivant ωO_2 et la hauteur suivant O_2S_2, perpendiculairement à la droite précédente; je prends $O_2S_2 = 108$ millimètres, et en menant du point S_2 une perpendiculaire à $o\omega$, j'ai en s la projection horizontale du sommet; il est donc facile d'obtenir la projection verticale de ce sommet, puisque je connais la projection verticale de la hauteur; j'aurai aussi facilement le point (m, m') milieu de la hauteur, et par suite les projections de la droite parallèle à la ligne de terre.



s'
n
m'
r'
P'
o'
ε
α
a'
β
δ
ω
γ
c
a
h
ε₁
o
e
O₂
ω
n
m
r
O₁
t
s
P
E₁
M₂
P₁'

L'intersection de cette droite avec le cône s'obtiendra avec la plus grande facilité. En effet le plan déterminé par cette droite et le sommet est un plan méridien de la surface. J'obtiendrai facilement la trace horizontale de ce plan en cherchant la trace horizontale (a, a') de la hauteur et menant par ce point une parallèle à la ligne de terre. Soit C le point où cette droite rencontre la trace horizontale du plan ; je mène CO_1, j'ai le rabattement de l'intersection du plan de base avec le plan méridien considéré ; par suite j'aurai facilement les projections de l'intersection de la base du cône et de ce plan méridien ; en joignant ces points au sommet s, j'aurai les projections des génératrices qui passent par les points de rencontre de la droite et du cône. J'aurai donc en n et r les projections horizontales de ces points.

Pour la troisième partie, je mène au point E_1 la tangente au cercle de base ; elle rencontre en t la trace horizontale du plan ; du reste la trace horizontale de la génératrice passant en r est h ; donc th est la trace horizontale du plan cherché. Il est facile d'avoir la trace verticale que je n'ai pas menée dans la figure.

Il ne reste plus qu'à construire les projections horizontales et verticales de la base du cône, et à mener par les points s et s' des tangentes respectivement à ces courbes pour terminer l'épure.

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1881

Géométrie.

Démontrer que deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.

— Dans un triangle ABC, on donne b et a. Une transversale rencontre AB au point D, AC au point E, BC au point F. On donne $AE = \beta$; $FB = m$. Démontrer que si l'on appelle Σ la surface de ADE, S la surface de ABC, on a

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{1 + \frac{\alpha}{m}}{1 + \frac{\alpha}{m} \frac{\beta}{b}} \times \frac{\beta^2}{b^2}$$

Statique.

Un triangle ABC a l'un de ses sommets, A, qui est fixe. Déterminer la force à appliquer au point B pour que le côté BC soit horizontal.

— On donne un triangle quelconque; on demande quel est le cercle qu'il faut enlever autour du centre du cercle circonscrit pour que le centre de gravité de la partie restante soit au point de concours des hauteurs.

Arithmétique.

Extraire la racine carrée de $43 + \frac{5}{11}$ à $\frac{1}{7}$ près. Raisonnement.

Algèbre.

On coupe un cône par un plan parallèle à la base et on considère le cylindre droit ayant même base que le cône, et sa base supérieure sur le plan sécant. Étudier la variation de la somme de la surface latérale du cylindre et de la surface latérale du cône supérieur.

Trigonométrie.

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

Géométrie descriptive.

On donne un plan formant un angle de 39° avec le plan horizontal et dont la trace horizontale fait un angle de 53° avec la ligne de terre. Trouver les projections d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier ayant son centre et le milieu d'un des côtés sur la trace du plan. Cet hexagone est situé dans le plan; la hauteur de la pyramide est 15 centimètres, le côté de l'hexagone a 3 centimètres, et le sommet de la pyramide est dans le second dièdre. On cherchera la projection de la section par le plan bissecteur du premier dièdre.

SUR DEUX PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

Par **E. Catalan** (*).

I. Premier problème. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés*, a, b, c, ... k, l?

Ce problème est loin d'être nouveau. On en trouve une

(*) Cette Note a pour origine un travail de M. Minine (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 58). Touchant ce travail, je ferai une seule remarque : les énoncés adoptés par l'auteur peuvent être remplacés par ceux-ci :

De 1 *à* p (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers, donnés ?*

Quelle est la somme des nombres compris entre 1 *et* p (inclusivement), *et non divisibles par des nombres premiers, donnés ?*

solution dans mes *Mélanges mathématiques* (p. 133), calquée sur celle d'un problème plus simple (N. A. 1842, p. 466).

En appelant $f(n)$ le nombre cherché, et en désignant par $\left(\frac{A}{B}\right)$ (*) le plus grand entier contenu dans $\frac{A}{B}$, on a

$$f(n) = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum\left(\frac{n}{abc}\right) + \dots \quad (A)$$

II. *Exemple.* — Soient : $n = 60$, $a = 5$, $b = 7$, $c = 13$. La formule donne

$$f(60) = 60 - (12 + 8 + 4) + 1 = 37.$$

En effet, de 1 à 60, il y a 37 nombres premiers avec 5, 7 et 13 ; savoir :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 53, 54, 56, 58, 59.

III. *Remarque.* — L'inspection de la formule (A) suggère une autre solution, basée sur un raisonnement bien connu (**).

Le nombre cherché serait

$$n - \left(\frac{n}{a}\right) - \left(\frac{n}{b}\right) - \left(\frac{n}{c}\right) - \dots = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right),$$

si chaque multiple de a n'avait été *supprimé qu'une fois* ; si chaque multiple de b n'avait été supprimé qu'une fois ; etc. Mais, parmi les multiples de a, il en est qui sont multiples de b, c'est-à-dire multiples de ab. Ces derniers multiples (aussi bien que les multiples de ac, de bc,...) ont donc été *supprimés à tort* : en les rétablissant, on trouve, au lieu de l'expression précédente,

$$n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right).$$

Cette application singulière de la *méthode des approximations successives* donne, finalement, la formule (A) (***).

(*) Ainsi que je l'ai déjà fait observer, le symbole $\left(\frac{A}{B}\right)$ équivaut à celui-ci : $E\left(\frac{A}{B}\right)$, adopté par Legendre.

(**) Laplace en a fait usage, dans la *Théorie des probabilités*.

(***) Afin d'abréger, je ne fais qu'indiquer la marche à suivre.

IV. *Cas particulier.* — Si $a, b, c, \ldots$ sont les *facteurs premiers de* n (inégaux), $f(n)$ devient la fonction numérique $\varphi(n)$ (*);

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots;$$

ou $$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots; \quad (B)$$

ce qui est la formule connue (**).

V. Second problème. — *Quel est la somme,* S(n), *des nombres considérés dans le premier problème?*

1° La somme des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ est $\frac{1}{2} n(n+1)$.

2° La somme des multiples de a égale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right] a.$$

3° La somme des multiples de ab est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right) + 1\right] ab, \text{ etc.}$$

En répétant, mot à mot, le raisonnement indiqué ci-dessus (III), on trouve

$$2S(n) = n(n+1) - \sum a\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right) + 1\right] + \sum ab\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right) + 1\right] - \ldots \quad (C)$$

VI. *Exemple.* — Soient encore : $n = 60$, $a = 3$, $b = 7$, $c = 13$. Nous aurons

$$2S(60) = 60 \cdot 61 - 5 \cdot 12 \cdot 13 - 7 \cdot 8 \cdot 9 - 13 \cdot 4 \cdot 5 + 35 \cdot 1 \cdot 2 = 3\,660 - 780 - 504 - 260 + 70,$$

ou $$S(60) = 1093;$$

comme on peut le vérifier sur les nombres donnés plus haut.

VII. *Cas particulier.* — Lorsque $a, b, c, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, le second membre de (C) se réduit à

(*) De Gauss, si mes souvenirs sont fidèles.

donc

(**) N. A. (1842, p. 46).

$$u\left\{n+1-\sum\left[\frac{n}{a}+1\right]+\sum\left[\frac{n}{ab}+1\right]\right.$$
$$\left.-\sum\left[\frac{n}{abc}+1\right]+\ldots\right\}$$

La quantité entre *accolades* peut être écrite ainsi :

$$n\left[1-\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{ab}-\sum\frac{1}{abc}+\ldots\right]$$
$$+1-\sum 1+\sum 1-\sum 1+\ldots$$
$$=n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$
$$+(1-1)(1-1)(1-1)\ldots$$
$$=\varphi(n).$$

Donc, σ désignant la somme cherchée,

$$\sigma=\frac{1}{2}\,n\varphi(n),$$

ou

$$\sigma=\frac{1}{2}\,\varphi(n^2),$$

conformément à un théorème connu (*).

QUESTIONS D'EXAMENS

Établir par la géométrie la surface du quadrilatère inscrit en fonction des quatre côtés.

Je mène la diagonale BD ; j'ai, en appelant S la surface du quadrilatère $S=\frac{ch}{2}+\frac{ah'}{2}.$

Les triangles semblables BFC, ADE me donnent

$$\frac{h}{h'}=\frac{b}{d};$$

d'où je tire $h'=\frac{hd}{b}.$

(*) Ce théorème, que l'on peut démontrer en *trois lignes*, est dû, je pense, à M. D. Postula. (N. C. M., t. IV, pp. 207 et 208).

Donc $$S = h\left(\frac{cb + da}{2b}\right)$$

D'autre part, en cherchant, par les deux triangles BAD, BCD, la valeur de la diagonale, j'ai

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2c \,.\, FC = a^2 + d^2 + 2a \,.\, DE.$$

Comme j'ai aussi la projection $\frac{FC}{DE} = \frac{b}{d}$, d'où je tire

$$DE = \frac{FC \,.\, d}{b},$$

j'obtiens $$FC = \frac{b(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{2(cb + ad)}.$$

et par suite

$$h^2 = b^2 - \frac{b^2(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{4(cb + ad)^2}.$$

Donc

$$S^2 = \frac{4(cb + ad)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2}{16}.$$

On a, par une transformation simple,

$$S^2 = \frac{(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d)}{16}.$$

En posant, comme à l'ordinaire

$$a + b + c + d = 2p,$$

on trouve

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Par un point A *pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante* AMN, *et on joint le centre aux trois points* A, M, N. *Démontrer que l'on a*

$$\text{tg}\,\frac{AOM}{2} \,.\, \text{tg}\,\frac{AON}{2} = \text{const.}$$

Je joins le point M et le point N au point B, extrémité du diamètre qui passe par le point A. J'ai

$$MBA = \frac{MOA}{2};$$

$$NBA = \frac{NOA}{2}.$$

Il faut donc démontrer que j'ai

$$\text{tg MBA . tg NBA} = \text{const.}$$

Pour cela, je joins les points M et N à l'autre extrémité C du diamètre AOB. J'ai

$$\text{tg MBA} = \frac{\text{MC}}{\text{MB}}\,;\ \text{tg NBA} = \frac{\text{NC}}{\text{NB}}.$$

Donc $$\text{tg MBA . tg NBA} = \frac{\text{MC . NC}}{\text{MB . NB}}.$$

D'autre part, les deux triangles MBN, MCN ayant un angle égal, on a $\dfrac{\text{MCN}}{\text{MBN}} = \dfrac{\text{MC . NC}}{\text{MB . NB}}$

et aussi $$\frac{\text{MCN}}{\text{MBN}} = \frac{\text{CQ}}{\text{BP}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}.$$

Donc $$\text{tg MBA . tg NBA} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}.$$

La différence entre un arc du premier quadrant et son sinus est moindre que le double du carré de l'arc divisé par le rapport de la circonférence au diamètre, en supposant le rayon égal à l'unité.

On a $$2a < \pi$$

et aussi $$a < \text{tg}\, a \qquad \frac{\pi}{2} - a < \text{cotg}\, a.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres de la première inégalité par $\cos^2 a$, et les deux membres de la seconde par $\sin^2 a$,

$$a \cos^2 a < \sin a \cos a$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^2 a > \sin a \cos a;$$

d'où l'on tire $$a \sin^2 a > a - \sin a \cos a$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin^2 a < \sin a \cos a;$$

d'où $$\frac{\frac{\pi}{2} - a}{a} < \frac{\sin a \cos a}{a - \sin a \cos a}$$

ou $$\frac{\pi}{2a} < \frac{a}{a - \sin a \cos a}.$$

On en tire $\quad a \sin a \cos a < \frac{2a^2}{\pi}$,

et, *a fortiori*, $\quad a - \sin a < \frac{2a^2}{\pi}$.

A *et* B *sont deux nombres entiers et positifs, ayant plus de la moitié des chiffres de gauche communs, et on a* A > B. *Démontrer que l'on a toujours* $\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p}$ p *étant entier et positif.*

On a identiquement

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} = x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1}$$

ou, puisque $\qquad x > y,$

$$\frac{x^p - y^p}{x - y} > p \cdot y^{p-1}.$$

Posons $\qquad x^p = A; \quad y^p = B,$

il vient $\qquad \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p} \cdot \frac{A - B}{\sqrt[p]{B^{p-1}}}$

ou $\qquad \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p} \cdot \sqrt[p]{\frac{(A - B)^p}{B^{p-1}}}.$

Soit k le nombre des chiffres de A — B; B a au moins $2k + 1$ chiffres;

donc on a $\qquad A - B < 10^k; \; B \geq 10^{2k}.$

Donc $\qquad \frac{(A - B)^p}{B^{p-1}} < \frac{10^{kp}}{10^{2kp - 2k}}$

ou $\qquad \frac{(A - B)^p}{B^{p-1}} < \frac{1}{10^{(p-2)k}}.$

Comme on a certainement

$$p \geq 2,$$

on voit que cette expression est inférieure à 1; donc

$$\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{B} < \frac{1}{p}.$$

Dans un triangle on appelle p *le demi-périmètre,* S *la surface,* r *le rayon du cercle inscrit,* A, B, C *les angles. Démontrer que les racines de l'équation*

$$x^3 - p\left(tg\,\frac{A}{2} + tg\,\frac{B}{2} + tg\,\frac{C}{2}\right)x^2 + p^2x - \frac{S^2}{r} = 0$$

sont les rayons des cercles ex-inscrits au triangle.

On a
$$p\ \mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = r_a\,;$$

Donc déjà la somme des racines peut être considérée comme la somme des rayons des cercles ex-inscrits.

On a aussi

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2\left(\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{C}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\right)$$

ou, d'après une relation connue entre les demi-angles d'un triangle,
$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2.$$

Enfin on a
$$r_a r_b r_c = pS = \frac{S^2}{r}.$$

On voit donc bien que r_a, r_b, r_c sont les racines de l'équation proposée.

Étant donnés deux nombres entiers a *et* b, *premiers entre eux, on peut toujours trouver deux autres nombres entiers* x *et* y, *tels que l'on ait l'identité*

$$ax - by = 1.$$

Soient a et b les deux nombres entiers donnés, que nous supposons premiers entre eux; effectuons les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur; le dernier reste sera l'unité, et nous aurons

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + R_1 \\ b &= R_1q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2q_3 + R_3 \\ &\ldots\ldots \\ R_{n-3} &= R_{n-2}\,q_{n-1} + R_{n-1} \\ R_{n-2} &= R_{n-1}\,q_n + 1 \end{aligned}$$

Deux restes consécutifs quelconques satisfont à la condition énoncée; car on a d'abord

$$R_{n-2} - R_{n-1}\,q_n = 1.$$

Éliminons R_{n-1} entre cette égalité et la précédente; nous aurons $R_{n-3}\, q_n - R_{n-2} = R_{n-2}\, q_{n-1}\, q_n - 1$;

d'où $R_{n-3}\, q_n - R_{n-2}\,(1 + q_n\, q_{n-1}) = -1$

et l'on voit que les nombres q_n et $1 + q_{n-1}$ satisfont à la condition demandée par rapport aux deux restes consécutifs R_{n-3} et R_{n-2}.

En général, si la condition est remplie pour deux restes consécutifs quelconques, il est facile de voir qu'elle l'est aussi pour les deux précédents.

Car si l'on a, m et n étant deux nombres entiers,

$$mR_p - nR_{p+1} = \pm 1$$

en éliminant R_{p-1} entre cette relation et l'égalité,

$$R_{p-1} = R_p\, Q_{p+1} + R_{p+1},$$

il vient $mR_p - nR_{p-1} = -nR_p\, Q_{p+1} \pm 1$

ou $nR_{p-1} - R_p\,(m + nQ_{p+1}) = \mp 1,$

relation qui satisfait encore à la condition énoncée.

Or, la condition étant remplie, pour les restes R_{n-3} et R_{n-2}, ainsi que nous l'avons reconnu directement, elle l'est aussi pour les restes R_{n-4} et R_{n-3}, et ainsi de suite. en remontant, de sorte qu'elle sera également remplie pour les deux nombres d'où l'on part, a et b.

Il existe donc des nombres entiers x et y tels que l'on ait $ax - by = \pm 1.$

Soient, par exemple les deux nombres 56 et 15 qui sont premiers entre eux; on a

$$\begin{aligned} 56 &= 15 \times 3 + 11 \\ 15 &= 11 \times 1 + 4 \\ 11 &= 4 \times 2 + 3 \\ 4 &= 3 \times 1 + 1 \end{aligned}$$

La dernière égalité, retranchée de la précédente, donne

$$11 - 4 = 4 \times 2 - 1$$

d'où $11 - 4 \times 3 = -1.$

Retranchons celle-ci de la précédente multipliée par 3, nous aurons

$$15 \times 3 - 11 = 11 \times 1 \times 3 + 1$$

ou $15 \times 3 - 11 \times 4 = 1.$

Enfin, retranchons cette dernière de la première égalité

multipliée par 4, et nous aurons

$$56 \times 4 - 15 \times 3 = 15 \times 3 \times 4 - 1,$$

c'est-à-dire $\quad 56 \times 4 - 15 \times 15 = -1,$

Les deux nombres 4 et 15 satisfont donc à l'égalité

$$56x - 15y = -1.$$

— Supposons qu'il faille satisfaire à l'égalité $ax - by = c$ par des valeurs entières de x et de y, a et b étant deux nombres premiers entre eux. Soient α et β deux nombres entiers, tels que l'on ait

$$a\alpha - b\beta = \pm 1$$

il en résulte $a \,.\, \alpha c - b \,.\, \beta c = \pm c$

de sorte que, si l'on a

$$a\alpha - b\beta = +1,$$

on aura $\quad x = c\alpha$

et $\quad y = c\beta,$

et si l'on a $\quad a\alpha - b\beta = -1,$

on aura $\quad x = -c\alpha$

et $\quad y = -c\beta.$

On déduit facilement de là toutes les solutions en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$; mais ce n'est pas là ce qui nous occupe.

— Proposons-nous maintenant la question suivante, tout à fait analogue à celle que nous venons de traiter :

Étant donnés deux polynômes entiers en x, f(x) *et* φ(x), *premiers entre eux, on peut toujours trouver deux autres polynômes entiers en* x, u *et* v, *tels que l'on ait identiquement*

$$\mathrm{u}f(\mathrm{x}) - \mathrm{v}\varphi(\mathrm{x}) = \pm 1.$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit le polynôme du moindre degré, et effectuons la recherche du plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $\varphi(x)$; les opérations se traduisent par les identités suivantes :

$$f(x) = \varphi(x)Q_1 + R_1$$
$$\varphi(x) = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n-3} = R_{n-2}Q_{n-1} + R_{n-1}$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n$$

Les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant par hypothèse premiers entre eux, le dernier reste R_n est indépendant de x.

Deux restes consécutifs quelconques satisfont à la condition énoncée ; car on a d'abord

$$R_{n-2} - R_{n-1}Q_n = R_n .$$

Éliminons R_{n-1} entre cette égalité et la précédente ; il vient $\quad R_{n-1}Q_n - R_{n-2}(1 + Q_n Q_{n-1}) \quad = R_n$

et l'on voit que les polynômes $\frac{Q_n}{R_n}$ et $\frac{1 + Q_n Q_{n-1}}{R_n}$, qui sont entiers en x (puisque R_n est indépendant de x), satisfont à la condition demandée, par rapport aux restes R_{n-1} et R_{n-2}.

En général, si la condition est satisfaite pour deux restes consécutifs quelconques, nous allons montrer qu'elle l'est encore pour les deux précédents.

Car si l'on a, M et N étant deux polynômes entiers en x,

$$MR_p - NR_{p+1} = \pm 1$$

en éliminant R_{p+1} entre cette relation et l'égalité précédente $R_{p-1} = R_p Q_{p+1} + R_{p+1}$, il vient

$$NR_{p-1} - R_p(M + NQ_{p+1}) = \mp 1$$

relation qui satisfait encore à la condition demandée.

Or la condition étant remplie pour les deux restes R_{n-1} et R_{n-2}, elle l'est successivement pour ceux qui précèdent, de sorte qu'en remontant on voit qu'elle est encore remplie pour les deux polynômes donnés $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Il existe donc des polynômes entiers en x, u et v, tels que l'on ait identiquement

$$uf(x) - v\varphi(x) = \pm 1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

La méthode que nous venons d'exposer montre en outre comment on peut déterminer ces polynômes sans résoudre d'équation.

Soient, par exemple, les deux polynômes $(x^2+1)^2$ et $(x-1)^3$, qui sont premiers entre eux ; on a

$$(x^2 + 1)^2 = (x - 1)^3(x + 3) + 4(2x^2 - 2x + 1)$$
$$2(x - 1)^3 = (2x^2 - 2x + 1)(x - 2) + x$$
$$2x^2 - 2x + 1 = x \cdot 2(x - 1) + 1$$

Éliminons l'avant-dernier reste, x, entre les deux dernières égalités ; il vient

$$4(x-1)^2(x-1)-(2x^2-2x+1)=2(2x^2-2x+1) \times (x-2)(x-1)-1$$

c'est-à-dire

$$4(x-1).(x-1)^3-(2x^2-2x+1)(1+2[x-2)(x-1)] = -1$$

ou $4(x-1).(x-1)^3-(2x^2-2x+1)(2x^2-6x+5) = -1$

Éliminons de même le reste intermédiaire $(2x^2-2x+1)$ entre cette égalité et la première ; nous aurons

$$(x^2+1)^2(2x^2-6x+5)-16(x-1).(x-1)^3 =(x-1)^3(x+3)(2x^2-6x+5)+4$$

c'est-à-dire

$$(x^2+1)^2(2x^2-6x+5) -(x-1)^3[16(x-1)+(x+3)2x^2-6x+5)]=4.$$

Les deux polynômes entiers en x, $\dfrac{2x^2-6x+5}{4}$ e $\dfrac{16(x-1)+(x+3)(2x^2-6x+5)}{4}$, satisfont donc à l'égalité $vu(x^2+1)^2-(x-1)^3=1$

et l'on a

$$u=\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}, \text{ et } v=\frac{x^3}{2}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}.$$

— Supposons maintenant qu'il faille satisfaire à l'égalité

$$uf(x)-v\varphi(x)=F(x)$$

au moyen de polynômes entiers u et v.

Soient m et n deux polynômes entiers, tels que l'on ait

$$mf(x)-n\varphi(x)=\pm 1;$$

il en résulte $mF(x).f(x)-nF(x).\varphi(x)=\pm F(x)$, de sorte que si l'on a $mf(x)-n\varphi(x)=+1$, on aura

$$u=mF(x), \text{ et } v=nF(x).$$

et si au contraire $mf(x)-n\varphi(x)=-1$, on aura

$$u=-mF(x), \text{ et } v=-nF(x),$$

— Les théorèmes précédents sont susceptibles d'une application très importante dans la décomposition d'une fraction rationnelle en d'autres plus simples.

Soit, en effet, la fraction $\dfrac{F(x)}{f(x)\varphi(x)}$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux polynômes premiers entre eux.

Nous venons de voir que l'on peut toujours satisfaire à l'identité $$uf(x) - v\varphi(x) = F(x)$$
au moyen de polynômes entiers en x, u et v. Or on déduit de cette identité :
$$\frac{u}{\varphi(x)} - \frac{v}{f(x)} = \frac{F(x)}{f(x)\varphi(x)}$$
et l'on voit que la fraction donnée est ainsi décomposée en deux autres plus simples.

Comme exemple de cette application, considérons la fraction $$\frac{x^3 - 5x + 7}{(x^2+1)^2(x-1)^3}.$$

Nous avons trouvé plus haut que l'on a
$$(x^2+1)^2(2x^2 - 6x + 5) - (x-1)^3(2x^3 + 3x - 1) = 4$$
Il en résulte
$$\frac{4}{(x^2+1)(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 6x + 5}{(x^2-1)^3} - \frac{2x^3 + 3x - 1}{(x^2+4)^2}$$
et, par suite,
$$\frac{x^3 - 5x + 7}{(x^2+1)^2(x-1)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{(2x^2-6x+5)(x^3-5x+7)}{(x-1)^3} - \frac{(2x^3+3x-1)(x^3-5x+7)}{(x^2+1)^2}\right]$$

Or, si l'on effectue les deux quotients entre parenthèses, on trouve pour les parties entières deux quantités égales, $2x^2 - 11$, qui, par conséquent, se détruisent, et il ne reste plus qu'à décomposer par les procédés connus deux fractions rationnelles ne renfermant chacune qu'un seul facteur distinct au dénominateur.

QUESTION 288.

Solution par M. Daguillon, élève du Lycée Henri IV.

Soient un triangle ABC,O *le centre du cercle circonscrit. On joint* OA, OB, OC *qui rencontrent la circonférence en* M, M′; M″; *on mène* MD *perpendiculaire sur* BC, M′D′ *perpendiculaire sur* AC, *et* M″D″ *perpendiculaire sur* AB. *Démontrer que les droites* AD, BD′, CD″ *concourent en un même point.*

Joignons MM', M'M'', MM''. On voit facilement que les côtés du nouveau triangle ainsi formé sont respectivement parallèles et égaux aux côtés AB, BC, CA du triangle donné.

Si donc on prolonge MD jusqu'en E, intersection avec M'M'', nous aurons

$$\frac{BD}{DC} = \frac{M''E}{EM'};$$

de même

$$\frac{CD'}{D'A} = \frac{ME'}{E'M''},$$

et

$$\frac{AD''}{D''B} = \frac{M'E''}{E''M};$$

d'où

$$\frac{BD.CD.AD''}{DC.AD'.BD''} = \frac{M''E.ME'.M'E''}{EM'.E'M''.E''M}.$$

Mais les droites ME, M'E', M''E'' étant les hauteurs du triangle MM'M'' se coupent en un même point, et, d'après le théorème de Céva,

$$\frac{M''E.ME'.M'E''}{EM'.E'M''\cdot E''M} = 1; \quad \text{donc} \quad \frac{BD.CD.AD''}{DC.AD'.BD''} = 1.$$

Ce qui établit, en vertu de la réciproque que les droites AD, BD', CD'' sont concourantes.

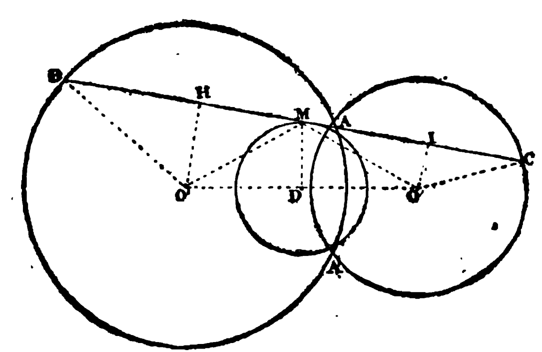
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Boudignier, à Lille; Baudoin, à Beauvais; Bourget, à Aix; Ch. Jullien, au lycée Henri IV; Tinel, à Rouen; Duley, à Châteauroux: Van Aubel, à Liège; Rivard, au Mans; Gino Loria, à Mantoue.

QUESTION 289.

Solution par M. PERRIER, (Henri), élève au Lycée de Lons-le-Saulnier.

On donne deux cercles qui se coupent; par l'un des points d'intersection on fait passer une corde commune aux deux cercles: trouver le lieu du milieu de ces cordes.

Abaissons des centres O et O′ les perpendiculaires OH, O′I sur la corde commune. On a $HI = \frac{BC}{2}$. Prenons BM $= HI$, M est un point du lieu; joignons ce point aux points



O et O′. On a

$$\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2$$
$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'I}^2 + \overline{MI}^2$$

d'où $\overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2 + \overline{O'I}^2 + \overline{MI}^2$. (1)

Or $BM = HI$, ou $BH + HM = HM + MI$, donc $MI = BH$;
$MC = HI$, ou $MI + IC = HM + MI$, donc $HM = IC$;
dès lors la relation (1) devient

$$\overline{MO}^2 + \overline{MO'}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{O'I}^2 + \overline{BH}^2 = R^2 + R'^2.$$

Le lieu des points M est donc une circonférence ayant pour centre le milieu D de OO′ et pour rayons

$$\sqrt{\frac{R^2 + R'^2 - 2\,\overline{OD}^2}{2}}.$$

Cette circonférence passera évidemment aux points A et A′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Prost, à Lons-le-Saulnier; 'avre, à Passy; Dupuy, à Grenoble; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Daguillon, Vitte, au lycée Henri IV; Lerouge, à Paris; Henry, à Bréchaincourt; Andrieu, à Rouen.

QUESTION 290

Solution par M. Paul Boudignier, élève du Lycée de Lille.

Étant donnés deux points A *et* B *sur une droite infinie, on sait qu'il y a deux points* C *et* D *qui divisent* AB *dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$. *Dans quel rapport le point* O *milieu de* CD *divise-t-il* AB? *Le point* O *est-il entre* A *et* B; *ou en dehors de ce segment?*

On démontre facilement que $CB = \frac{n.AB}{m+n}$,

$DB = \frac{nAB}{m \cdot n}$ et par suite que $CD = \frac{2mnAB}{m^2 - n^2}$

$$OC = \frac{CD}{2} = OD = \frac{mnAB}{m^2 - n^2}.$$

Le point O est en dehors de AB, car

$$\frac{mnAB}{m^2 - n^2} > \frac{nAB}{m+n}$$

ou

$$m > m - n.$$

Calcul du rapport $\frac{OA}{OB}$.

$$OB = OC - BC = \frac{mnAB}{m^2 - u^2} - \frac{nAB}{m+n}, OB = \frac{n^2AB}{m^2 - n^2},$$

$$OA = OB + AB = \frac{n^2AB}{m^2 - n^2} + AB = \frac{m^2AB}{m^2 - n^2}$$

Dès lors $$\frac{OA}{OB} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Le point O divise donc AB dans un rapport égal au carré de celui dans lequel les points C et D divisent cette même droite.

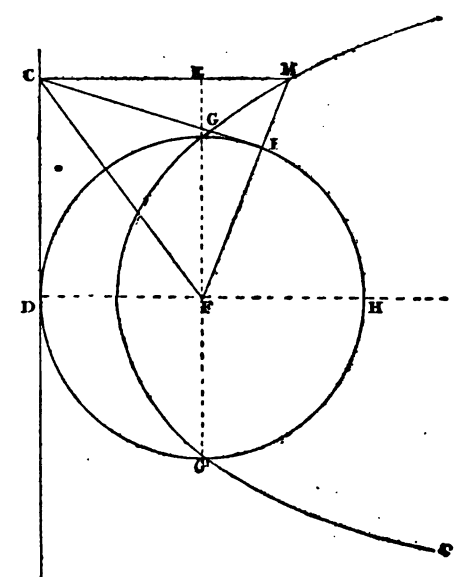
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Henry, à Bréchaincourt; Vigny, Barchat, à Vitry-le-François; Daguillon, Jullien, Lapareillé, au lycée Henri IV; Baudoin, à Beauvais; Fievet, à Lille; Tinel, à Rouen; Prost et Perrier, à Lons-le-Saulnier; Gobert, au collège Chaptal; Lerouge, à Paris; Rivard, au Mans.

QUESTION 291

Solution par M. Daguillon, élève du Lycée Henri IV
(Classe de M. Macé de Lépinay).

On donne une parabole; soit M *un point de cette courbe; on projette ce point sur la directrice. et de ce point* C *projection de* M *on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur* FM. *Trouver le lieu du pied* I *de cette perpendiculaire.*

Joignons CF. Puisque CM = FM, le triangle CMF est isoscèle. Si donc de F on abaisse une perpendiculaire FE sur MC, cette droite qui est parallèle à DC donne EC = FI = DF. Le lieu du point I est donc une circonférence ayant son centre au foyer F de la parabole et pour rayon le paramètre DF de la courbe. Les points G et G′ intersections de la parabole avec la perpendiculaire menée à l'axe par le foyer, et le point D, appartiennent au lieu.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lapareillé, au Lycée Henri IV; Favre, à Passy; Baudouin, à Beauvais; Boudignier, à Lille; Simonet, à Neufchâteau; Tinel, à Rouen; Calon, au Lycée Louis-le-Grand; Fiévet, à Lille; Torre Vittorio, à Alexandrie (Italie); Prost et Perrier, à Lons-le-Saulnier; Talbourdeau, à Moulins; Henry, à Bréchincourt; Hamon, au Mans; Gobert, au collège Chaptal; Bonnieux, à Rouen.

QUESTION 292

Solution par M. Malcor, élève du Lycée du Havre.

On donne une parabole; par le pied O *de la directrice on mène une sécante à la parabole; soient* A *et* B *les points d'intersection et* C *le milieu de* AB. *On projette le point* C *sur la directrice et de cette projection on abaisse une perpendiculaire* DI *sur la sécante* OAB. *Trouver le lieu du point* I.

On sait que dans toute parabole les milieux des cordes parallèles sont sur une parallèle à l'axe. Ceci posé, la tangente à la courbe au point R, intersection de CD avec la parabole, est parallèle à la sécante OAB.

Le symétrique du foyer par rapport à cette tangente étant le point D, l'angle OIF est droit et le lieu est alors une circonférence décrite sur OF comme diamètre.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Daguillon, au lycée Henri IV; Dupuy, à Grenoble; Tinel, à Rouen; Torre Vittorio, à Alexandrie; Perrier, Prost, à Lons-le-Saulnier; Baudoin, à Beauvais.

QUESTION 300

Solution par M. Dupuy, au Lycée de Grenoble.

On donne dans une circonférence O *une corde* CD *et un diamètre* AB.

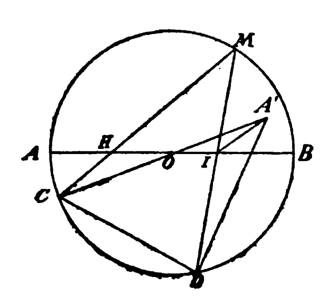
Déterminer un point M *sur la circonférence, de telle manière que les lignes* MC, MD *déterminent sur le diamètre* AB *des segments* OH, OI *dont le rapport soit égal à un rapport donné.*

(Delpit.)

Soient n le rapport donné et 2α l'arc sous-tendu par CD. Par I menons IA' parallèle à CM et rencontrant en A' le rayon CO.

Les triangles semblables CHO, OA'I donnent

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OI}{OH} = n$$



dont le point A' est fixe.

L'angle MIA' = DMC = α; l'angle DIA' = 180 — α.

Donc le point I se trouve à l'intersection du diamètre AOB avec la circonférence dans laquelle A'D sous-tend un arc capable de 180 — α.

On mènera DIM, puis MHC. On aura ainsi les deux segments cherchés OH et OI.

On en obtient deux autres en remarquant que le diamètre AOB coupe la circonférence DIA' en un second point.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Santal, institution Saint-Louis, à Perpignan; Joly, à Tarbes; Gino Loria, à Mantoue.

QUESTION 302

Solution par M. DELPIT, élève à l'École préparatoire Sainte-Barbe.

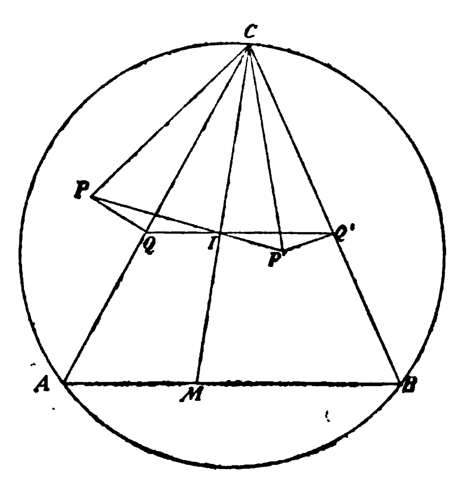
Étant donné un segment de cercle ACB, C étant le milieu de l'arc du segment, on décrit sur les droites AC et BC des circonférences qui se coupent sous un angle égal à l'angle dont le segment est capable.

Quel est le lieu du point de rencontre M de ces circonférences?

Soit P et P' les centres des deux circonférences. Par hypothèse l'angle PCP' est égal à l'angle ACB. Les angles PCQ et P'CQ' sont donc égaux. Q et Q' sont d'ailleurs les milieux de CA et de CB. Il en résulte que les triangles rectangles PCQ P'CQ' sont égaux. Donc PC = P'C.

Le triangle PCP' étant isoscèle et son angle au sommet étant égal à l'angle ACB, l'angle à la base CPP' de ce triangl

est égal à l'angle CQQ'. Soit I le point de rencontre de PP' avec QQ'. Puisque $\widehat{CPI} = \widehat{CQI}$, ce quadrilatère CPQI est inscriptible et l'angle PIC est droit, puisqu'il est égal à PQC. Donc si du point C on abaisse une perpendiculaire sur PP', elle passe précisément par le point I. Dès lors le symétrique de C par rapport à PP' se trouve sur la droite AB.



Le lieu cherché est donc la droite AB.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Baudouin, à Beauvais; Dupuy, à Grenoble.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Nous nous proposons de vérifier dans cette note *que si* f(x, y, z) = o *représente l'équation générale des surfaces du second degré, et si les trois plans du centre passent par une droite, la fonction proposée peut se mettre sous la forme* $\varphi(P, Q) = o$ ($P = o$ $Q = o$ étant les équations de deux plans).

1. — Nous distinguerons deux cas et nous supposerons d'abord que les coefficients A, A', A″ ne sont pas nuls à la fois ; par exemple, et pour fixer les idées, faisons l'hypothèse $A'' \lessgtr o$. Les plans du centre

$$Ax + B''y + B'z + C = o,$$
$$B''x + A'y + Bz + C' = o,$$
$$B'x + By + A''z + C'' = o,$$

passant par une même droite, on sait qu'il existe des coefficients λ, μ, ν, qui ne sont pas tous nuls, et qui satisfont aux équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda A + \mu B'' + \nu B' = o, \\ \lambda B'' + \mu A' + \nu B = o, \\ \lambda B' + \mu B + \nu A'' = o, \\ \lambda C + \mu C' + \nu C'' = o. \end{array}\right.$$

Ceci rappelé, on remarquera que l'on a

$$A''f(x, y, z) = (A''z + B'x + By + C'')^2 + (AA'' - B'^2)x^2 + (A'A'' - B^2)y^2 + (A''B'' - BB')2xy + (A''C - B'C'')2x + (A''C' - BC'')2y + A''F - C''^2 = o.$$

2. — Le premier cas qui nous occupe se divise ici, lui-même, en deux cas particuliers. Il peut arriver, en effet, *que les coefficients des termes en* x^2 *et en* y^2, *soient nuls l'un et l'autre*, et il est facile de reconnaître que, dans cette hypothèse, *la surface proposée représente un cylindre parabolique.*

En effet, λ, μ, ν, étant des paramètres qui ne sont pas tous nuls, nous l'avons dit, les équations (1) donnent, pour être compatibles, la condition

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = o$$

qu'on peut écrire,

$$A'(AA'' - B'^2) + 2BB'B'' - AB^2 - A''B''^2 = o$$

mais on suppose $\quad AA'' = B'^2;$

la relation simplifiée est donc

$$2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 = o$$

ou, en multiplant par A'' qui n'est pas nul,

$$2A''BB'B'' - AA''B^2 - A''^2B''^2 = o$$

ou encore $\quad (BB' - A''B'')^2 = o$

en tenant compte de l'hypothèse

$$AA'' = B'^2.$$

De ceci il résulte donc que les coefficients des termes en x^2 et en y^2, dans la partie qui suit $(A''z + B'x + By + C'')^2$, et vu les conditions particulières où nous sommes placés, ne peuvent être nuls simultanément, sans que, nécessairement, le coefficient du terme en xy soit nul, lui aussi. On peut donc dire $\quad A''f(x,y,z) = P^2 + Q$

sans que $Q = o$ puisse être parallèle à $P = o$, puisque Q renferme la variable z, et P, seulement les variables x, y. En résumé $f = o$ est un cylindre parabolique.

3.— Supposons maintenant que les coefficients

$$AA' - B'^2, \qquad A'A'' - B^2,$$

ne soient pas nuls à la fois et supposons, par exemple,

$$AA' - B'^2 \gtrless o;$$

en posant

$$f(x, y) = (AA' - B'^2)x^2 + (A'A'' - B^2)y^2 + 2(A''B' - BB')xy$$
$$+ 2(A''C - B'C'')x + 2(A''C' - BC'')y + A''F - C''^2)$$

on aura $\qquad (AA' - B'^2)F(x, y) =$

$$[(AA' - B'^2)x + (A''B' - BB')y + (A''C' - B'C'')]^2$$
$$+ [(A'A'' - B^2)(AA' - B'^2) - (A''B' - BB')^2]y^2$$
$$+ [(A''C' - BC'')(AA' - B'^2) - (A''B' - BB')(A''C - B'C'')]\ 2y$$
$$+ (AA' - B'^2)(A''F - C''^2) - (A''C' - B'C'')^2.$$

On remarque alors que le coefficient du terme en y^2 est

$$A''\begin{vmatrix} A & B'' & B \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

et celui du terme en y,

$$A''\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}$$

Ces deux coefficients sont nuls, si l'on tient compte, comme on doit le faire, des équations (1).

On a donc enfin

$$A''f(x, y, z) = (A''z + B'x + By + C'')^2$$
$$+ \frac{1}{AA'' - B'^2}\left\{(AA' - B'^2)x + (A''B' - BB')y + (A''C' - B'C'')\right\}$$
$$+ H$$
$$H = \frac{A''}{AA' - B'^2}\left\{F(AA' - B'^2) - AC''^2 - A'C'^2 + 2B'CC''\right\}$$

La surface f représente donc un cylindre elliptique, si $AA'' - B'^2 > o$ et $H \gtrless o$; un cylindre hyperbolique, si $AA' - B'^2 < o$ et $H \gtrless o$; une droite, si $AA'' - B'^2 > o$ et $H = o$ deux plans sécants, si $AA' - B'^2 < o$ et $H = o$.

4\. — Il nous reste à examiner le cas où l'on a simultanément $A = o \quad A' = o \quad A'' = o.$

Comme l'on suppose toujours,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = o$$

On a donc, $2BB'B'' = o.$

Nous supposerons $B'' = o.$

Les équations (1) donnent,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = o$$

ou

$$\begin{vmatrix} O & O & B' \\ B' & B & O \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = o$$

c'est-à-dire $B'C' = BC$

B' et B ne peuvent pas être nuls à la fois, pour des raisons évidentes; supposons $B' \gtrless o$; alors, $C' = \dfrac{BC}{B'}$ et l'équation devient

$$2z(By + B'x) + \frac{2C}{B'}, (By + B'x) + 2C''z + F = o.$$

C'est bien une fonction de z et de $(By + B'x)$, et la surface représente un cylindre hyperbolique.

Résumé. — Il résulte du calcul précédent, qu'étant donnée une fonction $f(x, y, z)$, avec cette particularité que les trois équations $f'_x = o \quad f'_y = o \quad f'_z = o$ représentent trois plans passant par une droite, *on pourra toujours en suivant la méthode dite par décomposition en carres lui donner la forme* $\varphi(P, Q) = o$ qui caractérise les surfaces cylindriques, du moins dans le cas général, celui où les coefficients A, A', A'' ne sont pas nuls simultanément. Quant au cas particulier où $A = A' = A'' = o$, nous avons montré que la forme $\varphi(P, Q) = o$ se révèle alors immédiatement.

La méthode précédente paraît offrir, exposée sur l'équation générale comme nous venons de le faire, une certaine longueur; mais elle est d'une grande simplicité dans la

pratique, parce qu'elle conduit au but par une marche sûre, rapide, et qui n'exige d'autre effort de mémoire que celui qui consiste à se rappeler qu'il faut employer la méthode de la décomposition en carrés, méthode familière aux élèves et d'une pratique commode.

On pourra essayer cette manière de faire sur les exemples suivants :

Démontrer, en les ramenant à la forme φ (P,Q) = o, *que les équations suivantes*

$$(b^2 + c^2) x^2 + (a^2 + c^2) y^2 + (b^2 + a^2) z^2 - 2bcyz - 2aczx - 2abxy - d^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

$$(ax - by)^2 + (by - cz)^2 + (cz - ax)^2 = d^2 (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$(b + c) x^2 + (a + c) y^2 + (a + b) z^2 - 2ayz - 2bzx - 2cxy = 1,$$

$$a^2 (y^2 + z^2) + b^2 (x^2 + z^2) + 2abxy = d^2 (a^2 + b^2),$$

enfin $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy = 1$ (*si, pour cette dernière,* $a + b + c = 0$), *représentent des surfaces cylindriques.*

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 277.)

Point de contact d'une tangente donnée. — Application aux coniques. — Équation du pôle d'une droite donnée par rapport à une conique. — Soit $f(u, v) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles; proposons-nous de trouver l'équation du point de contact d'une tangente dont les coordonnées sont u_1 et v_1. Considérons une tangente voisine de la proposée, et soient $u_1 + \Delta u_1$ $v_1 + \Delta v_1$ les coordonnées. L'équation du point d'intersection de ces deux droites est

$$v - v_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta u_1} (u - u_1)$$

Si l'on suppose que la seconde tangente se rapproche indéfiniment de la première, le point d'intersection des deux tangentes se rapproche indéfiniment du point de contact de la droite (u_1,v_1) de manière à avoir ce point pour limite. Δu_1 tendant alors vers zéro, Δv_1 tend aussi vers zéro et la limite du rapport $\frac{\Delta v_1}{\Delta u_1}$ est précisément la dérivée (calculée pour les valeurs particulières u_1, v_1) de la variable v par rapport à la variable u, v étant une fonction implicite de u déterminée par l'équation $f(u,v) = o$. Or on a

$$v'_u = -\frac{f'_u}{f'_v}.$$

L'équation du point de contact de la tangente (u_1,v_1) est donc

$$v - v_1 = -\frac{f'_{u_1}}{f'_{v_1}}(u - u_1)$$

ou bien

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} = u_1 f'_{u_1} + v_1 f'_{v_1}.$$

Si l'on remplace u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$, pour transformer l'équation de la courbe donnée en une équation homogène $f(u,v,w) = o$, l'équation du point de contact deviendra, tout à fait comme en coordonnées cartésiennes,

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = o$$

sous la condition de remplacer w et w_1 par l'unité à la fin des calculs.

Plus généralement, soient $p, q, r, s, \ldots$ des fonctions linéaires en u et v de la forme

$$p = \alpha u + \alpha' v + \alpha''$$
$$q = \beta u + \beta' v + \beta''$$
$$r = \gamma u + \gamma' v = \gamma''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et supposons que l'équation de la courbe soit exprimée au moyen de ces fonctions linéaires, par une relation de la forme

$$f(p, q, r, s, \ldots) = o.$$

Le théorème des fonctions composées donne

$$f'_u = f'_p \cdot p'_u + f'_q \cdot q'_u + f'_r \cdot r'_u + \ldots$$

c'est-à-dire $f'_u = \alpha f'_p + \beta f'_q + \gamma f'_r + \ldots$

De même $f'_v = \alpha' f'_p + \beta' f'_q + \gamma' f'_r + \ldots$

L'équation $uf'_{u_1} + vf'_{v_1} = u_1 f'_{u_1} + v_1 f'_{v_1}$ devient alors

$f'_p(\alpha u + \alpha' v - \alpha u_1 - \alpha' v_1) + f'_q(\beta u + \beta' v - \beta u_1 - \beta' v_1) + \ldots = 0$

c'est-à-dire $\quad f'_{p_1}(p - p_1) + f'_q(q - q_1)$

$$+ f'_{r_1}(r - r_1) + \ldots = 0.$$

Si la fonction $f(p, q, r, \ldots)$ est homogène et du degré m en $p, q, r, \ldots$ le théorème d'Euler donne

$$p_1 f'_{p_p} + q_1 f'_{q_1} + r_1 f'_{r_1} + \ldots = m f(p_1, q_1, r_1, \ldots)$$

Mais par hypothèse la droite (u_1, v_1) est une des tangentes de la courbe considérée ; on a donc $f(p_1, q_1, r_1, \ldots) = 0$. et alors l'équation de son point de contact se réduit à

$$p f'_{p_1} + q f'_{q_1} + r f'_{r_1} + \ldots = 0.$$

La forme ordinaire, que nous avons donnée tout d'abord, n'est qu'un cas particulier de celle-ci ; il suffit, en effet, de réduire les fonctions linéaires à trois, et de supposer

$$p = u, \; q = v, \; r = w.$$

— *Coordonnées des tangentes menées aux points de rencontre d'une courbe avec une droite donnée.* — L'équation du point de contact d'une tangente $(u_1 v_1 w_1)$ à la courbe $f(u,v,w) = 0$ étant $u f'_{u_1} + v f'_{v_1} + w f'_{w_1} = 0$, si l'on considère une droite $(u_0, v_0\, w_0)$ donnée dans le plan, et que l'on exprime que l'équation précédente est vérifiée par les coordonnées u_0 et v_0 de cette droite, la condition obtenue

$$u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0$$

signifie que la droite donnée $(u_0\, v_0\, w_0)$ passe par le point de contact de la tangente $(u_1 v_1 w_1)$.

Les coordonnées des tangentes à la courbe $f(u,v,w) = 0$ aux points où elle est rencontrée par la droite $(u_0 v_0 w_0)$ sont donc les solutions communes aux deux équations

$$u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0$$

et
$$f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Si n est le degré en u et v de la courbe donnée (c'est-à-dire sa classe), la première équation est de degré $n - 1$ en u_1 et v_1, la deuxième du degré n ; le nombre des solutions du système est donc en général $n\,(n - 1)$; de sorte qu'on peut dire qu'une courbe de la n^{me} classe est en général rencontrée par une droite en $n\,(n - 1)$ points, c'est-à-dire qu'elle est de l'ordre $n - 1$. Il faut excepter le cas des tangentes multiples, où l'ordre est abaissé.

Si l'on interprète ce calcul en remarquant que les valeurs u_1 et v_1 sont celles qui satisfont à la fois aux deux équations tangentielles $f(u,v,w) = 0$ et $u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0$, on voit que les tangentes dont il s'agit sont les tangentes communes aux deux courbes $f(u,v,w) = 0$ et $u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0$.

Dans le cas des courbes de la deuxième classe, l'équation $u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0$ est du premier degré, et de plus permutable, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire $uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0$. Cette équation représente alors un point; toutes les droites passant par ce point peuvent être considérées comme des tangentes, et alors les tangentes communes $(u_1 v_1 w_1)$ ne sont autre chose que les deux tangentes qu'on peut mener du point considéré à la courbe $f(u,v,w) = 0$. Ce point n'est donc lui-même autre chose que le pôle de la droite $(u_0 v_0 w_0)$.

Exprimer qu'un point $mU + nV + pW = 0$ *est sur une courbe* $f(U, V, W) = 0$. — D'après ce qui précède, il suffira d'écrire que le point considéré est le contact d'une certaine tangente. On identifiera donc l'équation $uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0$ avec l'équation du point donné, d'où il résultera les équations

$$\frac{f'_{u_1}}{m} = \frac{f'_{v_1}}{n} = \frac{f'_{w_1}}{p} \text{ avec } m_{u_1} + n_{v_1} + p_{w_1} = 0.$$

L'élimination de $u_1 v_1 w_1$ entre ces relations donnera la condition cherchée. Dans le cas des courbes de la deuxième classe, on trouve, comme en coordonnées cartésiennes et par le même procédé, la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & D & m \\ B & C & E & n \\ D & E & F & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tangentes communes à deux courbes du deuxième degré. — Applications diverses du principe de dualité considéré dans son expression analytique. — Soient $F(u, v) = 0$ et $f(u, v) = 0$ les équations tangentielles de deux coniques; l'équation $F(u,v) + \lambda f(u, v) = 0$, où λ désigne un paramètre arbitraire, repré-

sente toutes les coniques qui sont tangentes aux tangentes communes des deux coniques proposées.

Il faut d'abord observer que *cinq droites quelconques étant données, il existe une conique, et une seule, tangente à ces cinq droites.* — Cette proposition, qui peut être démontrée de bien des manières, résulte immédiatement de ce que l'équation tangentielle d'une conique est de la forme

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0. \quad (1)$$

Pour exprimer que la conique considérée est tangente aux cinq droites données, il faut écrire les cinq conditions

$$au_1^2 + 2bu_1v_1 + cv_1^2 + 2du_1 + 2ev_1 + f = 0$$
$$au_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$au_5^2 + 2bu_5v_5 + cv_5^2 + 2du_5 + 2ev_5 + f = 0.$$

Ces cinq conditions forment un système de cinq équations linéaires à cinq inconnues, et elles admettent généralement un système de valeurs uniques et bien déterminées pour les cinq inconnues $\frac{a}{f}, \frac{b}{f}, \frac{c}{f}, \frac{d}{f}, \frac{e}{f}$; car, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que le déterminant formé par les coefficients de ces inconnues fût nul, ce qui ne peut arriver que pour des valeurs particulières des coordonnées u_1v_1, u_2v_2, etc., et non pour des valeurs quelconques de ces quantités. En reportant ces valeurs dans l'équation générale des coniques (1), on aura l'équation tangentielle d'une conique unique et bien déterminée.

Ce théorème est d'ailleurs la conséquence immédiate, par la méthode des polaires réciproques, du théorème qui dit que par cinq points donnés dont il n'y a pas plus de trois en ligne droite, passe une conique et une seule.

Cela posé, l'équation $F(u, v) + \lambda f(u, v) = 0$ représente des courbes de la deuxième classe, puisqu'elle est du second degré en u et v; ces courbes sont tangentes aux droites qui touchent à la fois les deux courbes F et f, puisque les valeurs de u et v qui annulent à la fois $F(u, v)$ et $f(u, v)$ annulent évidemment $F(u, v) + \lambda f(u, v)$; enfin, elle représente toutes les coniques jouissant de cette propriété, puisque, en considérant l'une d'elles et

choisissant une tangente autre que les tangentes communes aux deux courbes F et f, on pourra toujours déterminer λ par la condition que la courbe $F + \lambda f = o$ touche cette dernière droite; la conique $F + \lambda f = o$ ainsi déterminée aura alors cinq tangentes communes avec la courbe considérée, et par conséquent coïncidera avec elle.

Si l'on choisit λ de manière que la forme $F + \lambda f$ se décompose en un produit de facteurs linéaires, en annulant le discriminant de cette forme supposée rendue homogène, les deux facteurs séparément égalés à zéro représentent chacun un point, qui est l'intersection de deux tangentes communes aux deux courbes considérées. Ces points sont en nombre égal au nombre des valeurs de λ fournies par l'équation

$$\begin{vmatrix} a + a'\lambda & b + b'\lambda & d + d'\lambda \\ b + b'\lambda & c + c'\lambda & e + e'\lambda \\ d + d'\lambda & e + e'\lambda & f + f'\lambda \end{vmatrix} = o \qquad (2)$$

c.-à-d. au nombre de trois; on leur donne quelquefois le nom de points ombilicaux.

L'équation en λ (2), qui détermine ces valeurs, donne lieu à une discussion tout à fait semblable à celle que l'on fait pour l'équation en λ analogue en coordonnées cartésiennes.

Les théorèmes ainsi établis directement vérifient complètement le principe de dualité; ainsi :

Il y a toujours un système de points ombilicaux réels, de même qu'il y a toujours un système de sécantes communes réelles.

Si les coniques ont quatre tangentes communes réelles, les trois systèmes de points ombilicaux sont réels. Ce théorème est le corrélatif de celui-ci : Deux coniques se coupant en quatre points, tous simultanément réels, les trois systèmes de cordes communes sont réels.

Tous les théorèmes relatifs aux tangentes communes et aux points ombilicaux sont de la même manière corrélatifs de ceux qui concernent les points de rencontre et les sécantes communes.

On peut d'ailleurs dire d'une manière générale que l'équation cartésienne et l'équation tangentielle des coniques étant absolument de la même forme, toutes les propriétés

dont la démonstration est une conséquence de la forme de l'équation ont leurs corrélatives établies par ce fait même. Nous laisserons donc à nos lecteurs le soin de faire eux-mêmes l'étude complète des tangentes communes à deux coniques. et des propriétés des points ombilicaux.

(A suivre.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Examens oraux de 1881.

Segment sphérique à deux bases.

— On donne deux nombres A et B, et leur plus grand commun diviseur; trouver le plus petit commun multiple.

— Théorème des fonctions homogènes.

— Quand les trois plans du centre sont parallèles, la surface du second degré est un cylindre parabolique.

— Si l'équation en S a une racine double, que peut-on dire des directions principales?

— Un point (o, o') est lié à un plan $P\alpha P'$. On fait tourner le plan autour de αP, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal. Trouver les nouvelles projections du point.

— Résoudre $x^5 - 1 = 0$.

— Construire la courbe $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\cos^3\omega + \sin^3\omega}{3\sin\omega\cos\omega}$.

— Comment l'hyperboloïde est-il coupé par un plan parallèle à un plan tangent au cône asymptote?

— Dérivée de x^{x^2}.

— On a une courbe asymptote à une droite donnée dans le plan horizontal; elle sert de base à un cylindre dont les génératrices ont une direction donnée. Ce cylindre étant coupé par un plan, on demande s'il y aura des branches infinies.

— Théorème de Pascal.

— Volume du prisme oblique.

— Construire un trièdre connaissant une face et les deux dièdres adjacents.

— Si une fraction est irréductible, et si son dénominateur ne contient ni le facteur 2, ni le facteur 5, elle donne naissance à une fraction périodique.

— L'expression

$$z = \frac{(x-y)a^m + (a-x)y^m - (a-y)x^m}{(x-y)(a-y)(a-x)}$$

devient $\dfrac{0}{0}$ quand on y fait $x = y = a$; trouver sa véritable valeur.

— Définir a^x.

— Discuter $xy = z^2$.

— Condition pour que
$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
soit un carré parfait.

— Résolution algébrique de l'équation du troisième degré. Après avoir posé $x = y + z$, on est conduit à résoudre les équations simultanées $3yz + p = 0$, $y^3 + z^3 + q = 0$; montrer que les six valeurs de x que l'on trouve se réduisent à trois.

— Étudier la série
$$1 + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^4 + 1} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{x^{2n} + 1} + \ldots$$
et montrer qu'elle est convergente pour toutes les valeurs positives et négatives de x, excepté pour $x = 1$.

— On pose
$$X = ax + by + cz;\ Y = a'x + b'y + c'z;\ Z = a''x + b''y + c''z;$$
prouver que, si le déterminant des neuf coefficients est nul, l'un au moins des mineurs étant différent de zéro, il existe une relation linéaire et homogène entre X, Y, Z. Examiner le cas où tous les mineurs sont nuls, et où l'un au moins des coefficients a, b, c, ... est différent de zéro.

— Minimum de la fonction
$$z = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2.$$
Examiner le cas où le déterminant $ab' - ba'$ est nul.

— Équation d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

— Un plan étant donné par ses traces, amener ce plan à être de front par une rotation. Comment l'axe doit-il être choisi? Trouver ce que devient, après la rotation, un point du plan dont on donne la projection verticale.

— Définition précise d'une fonction croissante. A quel caractère reconnaît-on qu'une fonction est croissante, la variable étant comprise entre a et b? Si la dernière est positive ou nulle pour toute valeur de x comprise entre a et b, on a $f(\beta) - f(\alpha) > 0$, α et β étant deux nombres compris entre a et b, et $\beta > \alpha$.

— On donne dans un plan un cercle C, et deux droites OA, OB, qui se coupent en O. On fait tourner C autour de OA, puis autour de OB. Trouver la projection de l'intersection de ces deux surfaces sur le plan AOB.

— Résoudre $x^2 - 4 = 0$ et prouver qu'il n'y a pas d'autres racines que $+2$ et -2.

— Démontrer qu'un produit ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

— Que représente $xy = z$?

— Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse.

— Condition de réalité des racines de $x^3 + px + q = 0$.

— Plus courte distance de la ligne de terre à une droite (l, l').

— Discuter la courbe $\quad x = \dfrac{1 + t}{1 - t},\ y = \dfrac{t}{1 - t}.$

— Définir $\sqrt{2}$.

— Limite supérieure des racines d'une équation.

— Plan tangent en un point d'une surface.

— Pour quelles valeurs de x la série

$$1 + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x^2+1} + \ldots + \frac{x^n}{x^n+1} \ldots$$

est-elle convergente ?

— Démontrer que x^n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, si x est plus petit que 1.

— Limite de $\frac{\sin x}{x}$, pour $x = 0$.

— On considère l'expression $ax + by$, a et b étant entiers; soit ω leur plus grand commun diviseur; on donne à x et à y toutes les valeurs possibles, excepté *zéro*; démontrer que l'on peut toujours satisfaire en nombres entiers à l'équation $ax + by = \omega$.

— On donne $z^2 - 2zy + y^2 + 2z - 1 = 0$.

Trouver la portion du plan des xy recouverte par la projection de cette surface sur le plan.

— Génératrices rectilignes de la surface

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

— Toute fonction entière de $\sin x$ et de $\cos x$ peut se mettre sous la forme

$$F + \sin x \cdot f,$$

F et f étant des fonctions entières de $\cos x$; de plus, elle ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule façon.

— Résoudre le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0 \end{aligned}$$

— Trouver $\sqrt{1 + 2i}$.

— Etant données deux droites dans le plan horizontal et un point de l'espace, construire l'angle des deux plans déterminés par ce point et l'une ou l'autre de ces deux droites.

— Quotient de deux imaginaires.

— Diamètres conjugués dans une surface du second degré.

— Surface d'un triangle en fonction des trois côtés. La formule trouvée est-elle homogène ? — Pourquoi une surface est-elle du second degré ?

— On donne une tangente à une parabole, le point où elle coupe l'axe, et un point de la directrice : trouver l'équation générale.

— Que représente $PQ + R = 0$, $P = 0$; $Q = 0$, $R = 0$ étant les équations de trois plans ?

— Elimination de Cauchy sur l'exemple

$$ax^4 + bx + c = 0 \qquad x^3 + px + q = 0.$$

— Dans une hyperbole, on donne un foyer et un sommet du rectangle construit sur les axes. Equation générale.

— On donne une tangente à une conique, le point de contact et les points de rencontre de cette tangente avec les deux directrices; équation générale.

— Théorie des plans cycliques.

— Étant donnée l'équation d'une courbe, comment reconnaîtra-t-on que la droite $y = ax + b$ est asymptote ?

— Conditions pour que le cône

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

soit de révolution. Démontrer que l'équation

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2) + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0$$

représente un cône de révolution, et que, réciproquement, l'équation d'un pareil cône peut être mise sous cette forme.

— Construire la courbe

$$y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}.$$

Étudier la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine.

— On prend trois axes rectangulaires ox, oy, oz. Une sphère a son centre sur l'axe ox; une droite mobile s'appuie sur l'axe oz, reste parallèle au plan xoy et est toujours tangente à la sphère. Trouver la surface engendrée par cette droite.

QUESTION 298

Solution par M. Quiquet, élève du Lycée de Lille.

Si l'on cherche toutes les équations du quatrième degré telles que les carrés de leurs racines soient en même temps racines de la même équation, on obtient seize *équations satisfaisant à cette condition. 1° Former ces équations. 2° Il y en a* dix *dont les coefficients sont réels; démontrer qu'aucune n'est irréductible, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en d'autres équations de degrés moindres. Trouver leurs racines. 3° Des* six *équations dont les coefficients sont imaginaires et qui satisfont à la question, il y en a trois qui sont les conjuguées des trois autres; démontrer* à priori *qu'il doit en être ainsi.*

Nous pouvons mettre ces équations sous la forme générale

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0 \qquad (\alpha)$$

en supposant le premier coefficient égal à l'unité.

Soient a, b, c, d les racines de (α), il faut que

$$A = \Sigma a = \Sigma a^2$$
$$B = \Sigma ab = \Sigma a^2b^2$$
$$C = \Sigma abc = \Sigma a^2b^2c^2$$
$$D = abcd = a^2b^2c^2d^2$$

en éliminant a, b, c, d entre ces huit relations, nous obtiendrons quatre équations ne contenant plus que les coefficients A, B, C, D, ce qui nous permettra d'obtenir leurs valeurs.

Si l'on remarque que

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$$
$$(\Sigma ab)^2 = \Sigma a^2b^2 + 2\Sigma abc\Sigma a - 2abcd$$
$$(\Sigma abc)^2 = \Sigma a^2b^2c^2 + 2abcd\Sigma ab$$
$$(abcd)^2 = a^2b^2c^2d^2,$$

on obtient immédiatement

$$A^2 = A + 2B \qquad (1)$$
$$B^2 = B + 2AC - 2D \qquad (2)$$
$$C^2 = C + 2BD \qquad (3)$$
$$D^2 = D \qquad (4)$$

telles sont les équations simultanées auxquelles doivent satisfaire les coefficients d'une équation du 4e degré mise sous la forme (α) pour qu'elle admette comme racines les carrés de ses racines.

Résolvons ce système et pour cela remarquons que (4) ne fournit pour D que les valeurs $D = 0$ ou $D = 1$.

Soit d'abord $D = 0$.

(3) donne alors $C = 0$ ou $C = 1$. Si $C = 0$, (2) donne $B = 0$ ou $B = 1$. Soit $B = 0$, alors (1) donne $A = 0$ ou $A = 1$; soit $B = 1$, de (1) on tire $A = 2$ ou $A = -1$. Si $C = 1$, on résoudra

$$A^2 = A + 2B \qquad (5)$$
$$B^2 = B + 2A \qquad (6)$$

Ces deux équations retranchées membre à membre donnent $A^2 - B^2 = -(A - B)$;

d'où $$A = B \text{ et } A + B = -1.$$

Si $A = B$, (5) donne pour A et B, 3 ou 0. Si $A + B = -1$, (5) peut s'écrire $A^2 + A + 2 = 0$;

d'où $$A = \frac{-1 \pm 7i}{2}$$

et par suite $$B = -1 - A = \frac{-1 \mp 7i}{2}$$

en prenant les signes supérieurs et inférieurs ensemble.

D'ailleurs, on remarque que l'on peut permuter les valeurs de A et B, car (5) et (6) se déduisent l'une de l'autre par le changement de A en B et de B en A.

Supposons maintenant $D = 1$.

Les équations deviennent alors

$$A^2 = A + 2B \qquad (7)$$
$$B^2 = B + 2AC - 2 \qquad (8)$$
$$C^2 = C + 2B \qquad (9)$$

Retranchons (9) de (7) membre à membre, il en résulte

$$A^2 - C^2 = A - C.$$

d'où $\qquad A = C \quad \text{et} \quad A + C = 1.$

Soit d'abord $A = C$. Si l'on élimine B entre (7) et (8) dans cette hypothèse, il vient

$$\left[\frac{A(A-1)}{2}\right]^2 = \frac{A(-1)}{2} + 2A^2 - 2,$$

équation qui se dédouble en

$$A = 1$$

et $\qquad A^2(A-1) = 2A + 8(A+1).$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$A[A(A-1)-2] = 8(A+1)$$

ou $\qquad A[(A^2-1)-(A+1)] = 8(A+1),$

d'où l'on tire $\qquad A = -1$

et $\qquad A(A-2) = 8.$

Ainsi lorsque $A = C$, on obtient pour A et C les valeurs $1, -1, 4, -2$. Alors (7) ou (9) donnent pour B les valeurs correspondantes $0, 1, 6, 3$.

Soit maintenant $A + C = 1$. Alors $2AC = -2C(C-1)$. Or (9) donnera $2B = C(C-1)$, donc (8) devient

$$B^2 + 3B + 2 = 0,$$

d'où $B = -1$ et $B = -2$.

Si $B = -1$, de (9) on tire $C = \dfrac{1 \pm 7i}{2}$,

d'où $\qquad A = 1 - C = \dfrac{1 \mp 7i}{2}.$

Si $B = -2$, on a pour C $\dfrac{1 \pm 15i}{2}$, et pour A $\dfrac{1 \mp 15i}{2}$; les signes supérieurs et inférieurs devant encore être pris ensemble, dans les deux cas.

On peut donc former le tableau suivant :

D	C	B	A
0	0	0	0
			1
		1	2
			-1
	1	0	0
		3	3
		$\frac{-1-7i}{2}$	$\frac{-1+7i}{2}$
		$\frac{-1+7i}{2}$	$\frac{-1-7i}{2}$
1	1	0	1
	-1	1	-1
	4	6	4
	-2	3	-2
	$\frac{1+7i}{2}$	-1	$\frac{1-7i}{2}$
	$\frac{1+7i}{2}$		$\frac{1+7i}{2}$
	$\frac{1+15i}{2}$	-2	$\frac{1-15i}{2}$
	$\frac{1-15i}{2}$		$\frac{1+15i}{2}$

On voit donc bien qu'il existe toujours seize équations répondant à la question, que *dix* ont leurs coefficients réels, savoir

$$x^4 = 0 \qquad (10)$$

$$x^4 - x^3 = 0 \qquad (11)$$

$$x^4 - 2x^3 = 0 \qquad (12)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 = 0 \qquad (13)$$

$$x^4 - x = 0 \qquad (14)$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0 \qquad (15)$$

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \qquad (16)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (17)$$

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad (18)$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad (19)$$

que *six* ont des coefficients imaginaires, et que, parmi ces six, *trois* sont les conjuguées des trois autres, savoir

$$x^4 - \frac{-1 \mp 7i}{2}x^3 + \frac{-1 \mp 7i}{2}x^2 - x = 0$$

$$x^4 - \frac{1 \mp 7i}{2}x^3 - x^2 - \frac{1 \pm 7i}{2}x + 1 = 0$$

$$x^4 - \frac{1 \mp 15i}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1 \pm 15i}{2}x + 1 = 0$$

Il faut prendre dans ces équations les signes supérieurs et les signes inférieurs ensemble comme il a déjà été dit.

Les six premières équations à coefficients réels ont 4, 3, 2, ou au moins une racine égale à zéro qui est lui-même son carré; leur premier membre peut se décomposer immédiatement, ce qui donne $x^4 = 0$ (10)

$$x^3(x - 1) = 0 \quad (11)$$
$$x^2(x - 1)^2 = 0 \quad (12)$$
$$x^2(x^2 + x + 1) = 0 \quad (13)$$
$$x(x^3 - 1) = 0 \quad (14)$$
$$x(x - 1)^3 = 0 \quad (15)$$

(11), (12) et (15) admettent respectivement 1, 2, 3 fois la racine 1, qui est aussi son propre carré. Quant à (14), elle admet les 3 racines cubiques de l'unité 1, α, β, et l'on sait que α et β sont les carrés l'une de l'autre, (13) a aussi α et β pour racines.

Les équations (16), (17), (18), (19) sont réciproques; leur degré peut donc s'abaisser de moitié. Mais on peut remarquer immédiatement que (16) admet deux fois la racine 1 et que (18) n'est autre que le développement de $(x - 1)^4$. On a donc $(x - 1)^2(x^2 + x + 1) = 0$ (16)

$$(x - 1)^4 = 0 \quad (18)$$

Ainsi (16) admet deux fois la racine 1 et les racines cubiques α et β de l'unité; (18), quatre fois la racine 1.

D'ailleurs (17) a pour racines les quatre racines cinquièmes imaginaires de l'unité, et l'on sait que les puissances d'une racine imaginaire de l'équation binôme telle que $x^5 - 1 = 0$ sont aussi racines de cette équation. Les carrés des racines sont donc bien racines de l'équation. Ces racines sont

$$\frac{\pm\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}$$

en prenant le même signe devant $\sqrt{5}$.

En posant $x + \frac{1}{x} = y$, l'équation (19) peut s'écrire $y^2 + 2y + 1 = 0$ ou $(y + 1)^2 = 0$.

Les racines de (19) sont donc deux à deux égales, les valeurs de x sont données par l'équation $x^2 - xy + 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$ et elles ne sont autres encore que α et β.

On peut, par conséquent, former le tableau suivant des racines.

0 0	0 0	(10)
0 0	0 1	(11)
0 1	0 1	(12)
0 $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$	0 $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$	(13)
0 $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$	1 $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$	(14)
0 1	1 1	(15)
1 $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$	1 $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$	(16)
$\frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{-\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{-\sqrt{5} - 1 - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	(17)

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{1} \qquad (18$$

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \qquad (19$$

Il reste à démontrer pourquoi des six équations à coefficients imaginaires, trois sont les conjuguées des trois autres.

Soit $P + Qi = 0$ une équation telle que si elle admet la racine $p + qi$, elle admette aussi $(p + qi)^2$. Alors l'équation $P - Qi = 0$ admettra évidemment la racine $(p - qi)$, et aussi $(p - qi)^2$, puisqu'elle ne diffère de la première que par le changement de signe de i. Donc, à toute équation de la forme
$$P + Qi = 0$$
satisfaisant à la question, correspond une équation de la forme
$$P - Qi = 0$$
satisfaisant également à la question.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Boulogne, élève du lycée de Lille.

NOTE

MM. Baron et Daguillon, élèves du Lycée Henri IV, classe de M. de l'Épinay, nous ont adressé des solutions des questions 293 et 294.

Ces questions sont trop simples pour qu'il y ait lieu d'en insérer les solutions. Elles avaient été proposées pour faire connaître à nos lecteurs le genre de questions posées en Angleterre aux élèves qui étudient la géométrie analytique.

(Note de la rédaction.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1881

Composition de Mathématiques.

On considère une parabole P et une droite AB normale au point A à cette courbe (ce point A se projetant d'ailleurs sur l'axe au foyer même de la courbe). Trouver le lieu des sommets des sections faites dans le cylindre droit qui a pour base P, par des plans passant par AB.

Épure.

Un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 190 millimètres, a l'une de ses faces ABC sur le plan horizontal ; le sommet D est au-dessus du plan de projection. On considère un cône ayant son sommet en A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD, et un cône ayant son sommet en B et pour base le cercle inscrit dans le triangle ACD. On demande de représenter ce qui reste du tétraèdre lorsque l'on a ôté le volume compris dans l'intérieur des deux cônes. On indiquera la construction à faire pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 1881

On considère la courbe du troisième ordre

$$27y^2 = 4x^3.$$

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et n pour que la droite

$$y = mx + n$$

soit tangente à cette courbe ;

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = B;$$

3° Par un point A pris sur la courbe on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables M, M'. On demande le lieu du milieu du segment MM'. Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points M et M' sont réels.

CORRESPONDANCE

M. Catalan nous fait remarquer que le problème traité p. 10 est bien connu. On en trouve une solution dans son *Manuel de Cosmographie*, 1880, p. 103.

M. Catalan nous signale aussi la question 213, p. 86, qui a été énoncée et démontrée par lui-même en 1858 (Comptes rendus. t. XLII).

G. L.

AVIS

Nous prions nos correspondants de vouloir bien, lorsqu'ils nous envoient des solutions de questions proposées, se conformer aux indications suivantes:

1° Mettre en tête leur nom, ainsi que la désignation exacte de l'établissement auquel ils appartiennent ;

2° Reproduire le numéro et l'énoncé de la question;

3° Mettre chaque question sur une feuille à part et surtout chaque figure sur une feuille spéciale, qui peut être réunie à la solution ou bien porter le numéro de la question correspondante;

4° Eviter, dans la rédaction, les abréviations qui ne sont pas usitées dans l'impression.

5° Ecrire lisiblement, et surtout soigner les symboles et formules.

Toute solution qui ne remplirait pas les premières conditions pourrait donner lieu à des erreurs ou à des oublis. Si les deux dernières conditions ne sont pas remplies, nous serons obligés de renvoyer les copies à leurs auteurs, pour obtenir une nouvelle rédaction satisfaisant à ces conditions ; les élèves qui se préparent aux examens nous sauront gré de les avoir habitués à ces détails tout matériels, qui ont une influence dans la correction des copies.

Nos correspondants nous rendront service en nous envoyant les questions du Baccalauréat ès sciences données dans les diverses Facultés et aussi en nous faisant connaître, pour ceux qui se préparent aux écoles, leur rang d'admission s'il y a lieu.

Le Rédacteur-Gérant.
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE — 1845-1

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Delpit**, élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

PROPRIÉTÉS DU TÉTRAÈDRE A ARÊTES ORTHOGONALES

On nomme *tétraèdre à arêtes orthogonales* un tétraèdre dans lequel les arêtes opposées sont perpendiculaires (*).

1. — *On peut toujours construire une infinité de tétraèdres jouissant de cette propriété.*

Donnons-nous par exemple comme base le triangle quelconque BCD ; menons les trois hauteurs de ce triangle ; par ces droites faisons passer des plans perpendiculaires au plan du triangle ; ces plans se couperont suivant une droite AM perpendiculaire à la base ; et, si l'on joint un point A quelconque de AM aux trois sommets B, C, D, on obtient un tétraèdre répondant à la question. En effet, l'arête AD, par exemple, est perpendiculaire à BC parce que le plan ADE est perpendiculaire à BC.

2. — *Si parmi les six arêtes, quatre sont perpendiculaires deux à deux, les deux autres le sont aussi.*

Supposons que AB soit perpendiculaire à DC, et AD à BC ; menons les hauteurs du triangle de base, et faisons passer des plans par ces hauteurs et les arêtes latérales ; deux de ces plans, les plans ADE, ABF, sont perpendiculaires au plan BCD ; or le troisième ACK passant par leur intersection est aussi perpendiculaire à la base et par suite à la droite BD ; donc les droites BD et AC sont orthogonales.

3. — *Les hauteurs du tétraèdre se coupent en un même point.*

Soit I le point de rencontre des deux hauteurs AM et CN. Menons une troisième hauteur DQ.

Les droites DQ, CN appartiennent respectivement aux

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

plans ADE, ACK, qui se coupent suivant la hauteur AM; donc les droites DQ, CN se coupent sur la droite AM.

Les hauteurs concourent donc en un même point qu'on appelle centre des hauteurs.

4. — *Les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent en un même point, qui est le centre des hauteurs.*

Considérons les arêtes opposées AB, DC et les pieds F et L des perpendiculaires DL et BF. La droite FL est perpendiculaire à CD comme étant contenue dans le plan ABF perpendiculaire à cette droite; pour une raison analogue, elle est perpendiculaire à AB; donc c'est la plus courte distance des droites AB et DC.

Elle passe par le point I, car c'est une hauteur du triangle DLC qui a pour centre des hauteurs le point I.

On voit que les pieds des plus courtes distances sont les pieds des hauteurs des faces.

5. — *Le produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance est égal à six fois le volume du tétraèdre.*

Nous avons $\quad AM \cdot BF = FL \cdot AB$

$$3V = AM \cdot \text{Surf. } BCD$$

$$2\text{Surf. } BCD = BF \cdot DC.$$

Multiplions membre à membre il vient

$$FL \cdot AB \cdot DC = 6V.$$

6. — *Les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances sont douze points sur une même sphère.*

Soient M, N, P, Q, les milieux de quatre arêtes opposées deux à deux.

La figure MNPQ est un rectangle dont les diagonales sont égales et se coupent par leurs milieux.

Il en résulte que les trois lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées sont égales et concourent en un même point qui est leur milieu commun; donc les points M, N, P, Q, R, S sont sur une même sphère. Cette sphère coupe les faces suivant les cercles passant par les milieux des arêtes, c'est-à-dire suivant leurs cercles des neuf points.

La sphère passe donc par les pieds des plus courtes distances.

La même sphère passe encore par les milieux des lignes qui joignent les sommets aux centres des hauteurs des faces.

Cette sphère se nomme la première sphère des douze points; nous déterminerons plus loin son centre.

7. — *Le centre de gravité du tétraèdre se trouve au milieu de la ligne qui joint le centre des hauteurs au centre de la sphère circonscrite.*

D'abord ces points sont en ligne droite. Soit O le centre de la sphère circonscrite ; soit α le centre du cercle circonscrit au triangle BCD ; soit γ le centre de gravité du même triangle; les points α, γ, H sont en ligne droite.

Le centre de gravité du tétraèdre se trouve sur la ligne $A\gamma$; il se trouve donc dans les plans tels que $O\alpha H$ perpendiculaires aux différentes faces du tétraèdre; or les points O et I sont des points communs à tous ces plans ; la droite OI est donc leur intersection et le centre de gravité doit s'y trouver.

Calculons le rapport $\dfrac{OC}{CI}$;

pour cela abaissons Cq perpendiculaire sur αH :

$$\frac{\gamma q}{\gamma H} = \frac{\gamma C}{\gamma A} = \frac{1}{4}$$

or

$$\alpha\gamma = \frac{1}{2}\gamma H.$$

Donc

$$\frac{\gamma q}{\alpha\gamma} = \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\frac{\gamma q}{\alpha g} = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que g est le milieu de αH et par suite C est le milieu de OI.

8. — *Les centres de gravité des faces sont les sommets d'un tétraèdre homothétique inverse au tétraèdre donné.*

Il suffit de remarquer que la ligne qui joint les centres

de gravité de deux faces, est parallèle à l'arête qui joint leurs sommets non communs et égale au tiers de cette arête; de plus on voit qu'elles sont dirigées en sens inverse.

Le rapport d'homothétie est 1/3. Le centre d'homothétie est le centre de gravité du tétraèdre.

9. — *La sphère qui passe par les centres de gravité des faces passe par leur centre des hauteurs et divise dans le rapport de 1 à 2 les lignes qui joignent les sommets au centre des hauteurs du tétraèdre.*

Les centres de gravité étant les sommets d'un tétraèdre homothétique au tétraèdre donné, la sphère passant par ces points a son centre sur la ligne qui joint le centre de la sphère circonscrite au centre d'homothétie, c'est-à-dire sur la ligne OC. Il divise cette ligne dans le rapport de 1 à 3, soit L ce point. Abaissons Ll perpendiculaire sur la ligne αH.

$$\frac{CL}{DC} = \frac{1}{3}$$

et par suite $\frac{CL}{LI} = \frac{1}{2}, \; \frac{LI}{CI} = \frac{2}{3}.$

Il s'ensuit que $\frac{lH}{gH} = \frac{2}{3}, \; \frac{\gamma q}{gH} = \frac{1}{3}, \; \frac{gl}{gH} = \frac{1}{3},$

donc $$\frac{\gamma l}{gH} = \frac{2}{3}, \quad \gamma l = lH.$$

Le point L est équidistant de γ et de H. Donc la sphère passe par les centres des hauteurs des faces.

Tirons γL et soit K le point où cette droite coupe la hauteur AH. Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle ACI coupé par la transversale γK :

$$\frac{AK}{KI} \cdot \frac{\gamma C}{\gamma A} \cdot \frac{LI}{CL} = 1$$

ou $$\frac{AK}{KI} \cdot \frac{1}{4} \, 2 = 1 \quad AK = 2KI.$$

La sphère passe donc par les points qui divisent les lignes telle que AI dans le rapport de 2 à 1.

Cette sphère porte le nom de seconde sphère des douze points.

Son rayon est le tiers du rayon de la sphère circonscrite.

Cette sphère coupe les faces suivant des cercles ayant pour diamètres les distances de leurs centres de gravité à leurs centres des hauteurs.

Le rapport $\frac{LI}{LO}$ est égal à $\frac{1}{2}$.

10. — *On peut inscrire dans le tétraèdre un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers le centre des hauteurs et son symétrique par rapport au centre de la seconde sphère des douze points.*

Prenons le symétrique F du point I par rapport au point L et son symétrique I′ par rapport au plan BCD, joignons FI′.

La distance FI′ est égale à $2LH = \frac{2R}{3}$.

La droite FI′ coupe la droite αH en un point dont la somme des distances aux points F et I est constante et égale à $\frac{2R}{3}$. Ce point appartient donc à l'ellipsoïde ayant pour foyers les points F et I. De plus c'est un point de tangence, car l'ellipse déterminée par le plan FIαH est tangente au plan BCD.

L'ellipsoïde est de révolution autour de son grand axe. La longueur de ce grand axe est égale au diamètre de la seconde sphère des douze points. Cette sphère est la sphère directrice de l'ellipsoïde.

Le rapport des distances du point de tangence aux points g et l est égal à $\frac{F\gamma}{Ll}$ ou $\frac{KI}{Ll}$.

Le point de tangence s'obtiendra donc en menant par le point I une parallèle à la ligne γL.

La considération de cet ellipsoïde fournit quelques corollaires dont les plus simples sont :

Les lieux des symétriques des points I et I′ par rapport aux plans des faces sont des sphères égales ayant pour centre les points F et I ;

Le produit des distances des points F et I aux faces est constant.

11. — *Lorsqu'un des angles solides du tétraèdre a ses angles plans obtus, il existe une sphère telle que chaque sommet est le pôle de la face opposée.*

Supposons que les angles en A soient obtus. Les centres des hauteurs des faces ayant pour sommet le point A seront en dehors du tétraèdre. Il s'ensuit que les lignes qui les joignent aux sommets B, C, D ne rencontrent chacune le tétraèdre qu'en un point : donc leur point d'intersection, c'est-à-dire le point I, centre des hauteurs, est en dehors du tétraèdre; et un sommet et le pied de la hauteur issue de ce sommet seront du même côté par rapport au centre des hauteurs.

Dans le cas où l'angle solide en A n'a pas ses angles plans obtus le produit IA . IH est constant; lorsque l'angle solide a ses angles plans obtus, le point I est transporté sur la ligne AH au delà du point A.

On voit dès lors que si du point I on décrit une sphère dont le carré du rayon soit égal au produit IA . IH, le tétraèdre sera autopolaire.

Cette sphère se nomme la sphère polaire. Elle a pour centre le centre des hauteurs.

Lorsque la sphère polaire existe, l'ellipsoïde inscrit n'existe plus. En effet, un de ses foyers (le centre des hauteurs) va en dehors du tétraèdre; comme le point C est toujours à l'intérieur du tétraèdre, le point F et le point I sont forcément des côtés différents par rapport aux trois faces ayant leurs sommets en A; par suite l'ellipsoïde est impossible.

Analogue au cercle polaire dans le triangle, la sphère polaire fournit comme lui plusieurs corollaires importants résultant de l'application de la théorie des polaires.

Cherchons les plans polaires des pieds des hauteurs des faces. Ce seront des plans parallèles aux faces opposées. Ces plans forment par leur intersection un tétraèdre homothétique au premier, et tel que les sommets du premier tétraèdre se confondent avec les centres de gravité du nouveau.

Les plans polaires des pieds des plus courtes distances sont des plans passant par les arêtes. En effet, on a vu que le produit des segments interceptés sur ces droites est égal au produit des segments interceptés sur les hauteurs.

12. — *Les arêtes opposées sont conjuguées par rapport à la sphère polaire.*

En effet, une arête est dans le plan mené par le centre des hauteurs perpendiculairement à l'arête opposée; de plus, si l'on joint le centre au point où ce plan coupe la seconde arête, la droite menée est perpendiculaire à la première arête; de plus, comme le produit des segments interceptés sur les plus courtes distances est égal au carré du rayon, il s'ensuit que si par les arêtes opposées à l'angle obtus on mène des plans tangents à la sphère polaire, les arêtes opposées passeront par les points de contact.

13. — *Relations entre les rayons des sphères.*

Nous appellerons ρ le rayon de la sphère polaire, R celui de la sphère circonscrite, ρ' celui de la première sphère des douze points.

Si on prend le point I pour origine d'inversion, la sphère circonscrite a pour inverse la seconde sphère des douze points.

Donc en appelant P et P′ les puissances du point I par rapport à ces deux cercles $\rho^4 = PP'$.

Or
$$P = R^2 - \delta^2$$
$$P' = \frac{R^2 - \delta^2}{9}.$$

Donc $3\rho^2 = R^2 - \delta^2$ $\qquad \rho^2 = \dfrac{R^2 - \delta^2}{3}$ $\qquad \delta^2 = R^2 + 3\rho^2$.

La première sphère des douze points passant par les pieds des plus courtes distances est à elle-même son inverse; donc la puissance du point I par rapport à ce cercle est égale à ρ^2 :
$$\rho^2 = \frac{\delta^2}{4} - \rho'^2,$$
$$4\rho^2 = \delta^2 - 4\rho^2$$
et
$$\delta^2 = R^2 + 3\rho^2;$$
donc
$$\rho' = \frac{1}{2}(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}.$$

ÉCOLE FORESTIÈRE 1881

Mathématiques.

1° Trouver la condition pour que deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient au moins une racine commune.

2° Résoudre l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}.$$

3° Trouver le lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1° Calculer le côté AB d'un quadrilatère plan ABCD, connaissant le côté opposé

$$CD = 41375^m,43$$

et les angles

$$\begin{aligned} ADC &= 110^\circ\ 35'\ 35'',35 \\ BDC &= 49\ \ 49\ \ 49\ ,49 \\ ACD &= 36\ \ 36\ \ 36\ ,36 \\ BCD &= 86\ \ 52\ \ 52\ ,52 \end{aligned}$$

2° Après avoir trouvé 4 degrés pour la hauteur angulaire d'une tour, un observateur s'avance de 1 kilom. vers la tour; il trouve alors 5 degrés pour la hauteur angulaire. Quelle est la longueur du chemin qui lui reste à parcourir pour arriver au pied de la tour?

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1881

Mathématiques élémentaires.

Etant donné un triangle ABC inscrit dans un cercle de rayon R, on mène les bissectrices intérieures des angles A, B, C. Soient A_1, B_1, C_1, les points où ces bissectrices rencontrent la circonférence.

1° En désignant par S et S_1, les surfaces des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, par D le diamètre du cercle inscrit au triangle ABC, démontrer qu'on a la relation

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R}{D}.$$

2° On considère une suite de triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... $A_nB_nC_n$, tels que chacun d'eux se déduit du précédent comme, dans l'énoncé ci-dessus, le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit du triangle ABC. Démontrer que, lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment, le triangle $A_{2n}B_{2n}C_{2n}$ tend vers une position limite $\alpha\beta\gamma$; dans les mêmes conditions, le triangle $A_{2n+1}B_{2n+1}C_{2n+1}$ tend aussi vers une position limite $\alpha'\beta'\gamma'$; les deux triangles limites sont équilatéraux et symétriquement placés par rapport au centre du cercle.

3° Démontrer que, si l'on prend pour unité le rayon R du cercle, le produit des nombres qui mesurent les diamètres des cercles inscrits dans les triangles ABC, $A_1B_1C_1 \ldots A_nB_nC_n$ tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment.

Mathématiques spéciales.

Trouver le lieu des points tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné, à trois axes inégaux, se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs sont parallèles entre eux.

Montrer que si l'on se donne un point P du lieu, la solution de ce problème « *mener du point* P *les normales à l'ellipsoïde* » dépend de la résolution de deux équations du troisième degré.

Discuter ces équations.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ALGER

Résoudre $4 \cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$.

— Dans une sphère de rayon donné, déterminer la hauteur DE d'un segment sphérique à une base, de manière que le cône droit ABC ait un volume égal à m fois le volume du segment BEC. Le problème est-il toujours possible?

— On donne deux droites rectangulaires OX, OY et deux points sur OY. Déterminer sur OX un point M tel que l'angle formé en joignant le point M aux deux points pris sur OY soit égal à 45 degrés.

— Déterminer le rapport des deux bases d'un trapèze isoscèle sachant que le volume engendré par ce trapèze tournant autour de la grande base est les $\frac{4}{5}$ du volume engendré par le trapèze tournant autour de la petite base.

— Dans une circonférence de diamètre AB, déterminer une corde AC telle que si on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par le segment circulaire AMC, soit égal à m fois le volume engendré par le triangle rectangle ACD, D étant la projection de C sur le diamètre.

— Partager un trapèze ABCD en deux trapèzes semblables par une parallèle aux bases. Comparer les aires de ces trapèzes aux aires des triangles ADC et ABC.

LILLE

Quelle erreur commet-on sur le volume d'un tronc de cône lorsqu'on substitue à ce volume celui du cylindre de même hauteur que le tronc, et ayant pour rayon la moyenne arithmétique entre les rayons des bases du tronc? Limite supérieure de cette erreur quand la différence entre ces deux rayons ne dépasse pas le quart du plus grand.

— Calculer les côtés d'un triangle connaissant les angles et la hauteur issue du sommet A. Trouver le périmètre, le rayon du cercle inscrit, et le rayon du cercle circonscrit (formules logarithmiques).

— Connaissant les côtés et les angles d'un triangle, évaluer par des formules logarithmiques le rayon du cercle circonscrit, les distances du centre du cercle aux trois côtés, et l'excès de la somme de ces distances sur le rayon du cercle circonscrit.

LYON

Une corde MN fait avec le diamètre AB un angle α. Trouver la surface du tronc de cône engendré par la droite MN tournant autour de AB. Application $MN = 1$; $AB = 2$; $\alpha = 40° 25' 30''$.

— Trouver le maximum ou le minimum de $y - 2x$ lorsqu'on a la relation $16y^2 + 36x^2 = 9$.

CLERMONT

Dans le plan d'un triangle équilatéral ABC, de côté a, on trace, à une distance d du côté BC, une droite XY parallèle à ce côté. Calculer en fonction de a et de d le volume et la surface totale du solide décrit par le triangle en tournant autour de xy d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.

— Construire un carré quintuple d'un carré donné.

— On donne les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle. On sait que, dans ce quadrilatère, les angles opposés sont supplémentaires; on demande de calculer par la trigonométrie, et sous forme logarithmique, le carré de l'une des diagonales du quadrilatère en fonction des données.

— Résoudre $\cos x = m \operatorname{tg} x$. Discussion; cas où $m = 1$.

GRENOBLE

Dans un triangle rectangle ABC, on donne l'hypoténuse $BC = a$, et l'angle B. Par un point D pris sur le prolongement de BC, on mène à cette ligne une perpendiculaire DX autour de laquelle le triangle est supposé tourner. On demande de déterminer le point D pour que le volume engendré soit double de celui qu'engendrerait le même triangle en tournant autour de CK, menée par C perpendiculairement à BC.

PARIS, JUILLET 1881

On considère trois nombres en progression géométrique dont la somme est constante. Trouver le maximum de leur produit.

— Le rayon de base d'un cône est a; son apothème est b. Exprimer à l'aide de a et de b le volume de la sphère inscrite au cône.

— Démontrer que, dans une ellipse, le produit des deux rayons vecteurs d'un point quelconque par le carré du cosinus de l'angle que fait la normale avec l'un ou l'autre de ces rayons est égal au carré du demi petit axe.

— Un tétraèdre OABC est tel que les trois faces OBC, OAB, OAC sont des triangles rectangles en O; on donne les arêtes $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; on demande de calculer: 1° les arêtes $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$; 2° le volume du tétraèdre; 3° les tangentes des angles dièdres ayant pour arêtes BC, CA, AD.

QUESTION 299

Solution par M. F. Baudouin, au Collège de Beauvais.

Tout triangle dans lequel les rapports des périmètres aux diamètres des trois cercles ex-inscrits sont exprimés par des nombres entiers est rectangle. Dire la forme de ce triangle.

(Geoffroy.)

Donnons à p, a, b, c, r, r', r'' et r''' les significations connues et considérons les égalités
$pr = (p - a) r' = (p - b) r'' = (p - c) r'''$; elles donnent

$$\frac{p}{r'} = \frac{p-a}{r} = \frac{p}{r} - \frac{a}{r} \qquad (1)$$

$$\frac{p}{r''} = \frac{p-b}{r} = \frac{p}{r} - \frac{b}{r} \qquad (2)$$

$$\frac{p}{r'''} = \frac{p-c}{r} = \frac{p}{r} - \frac{c}{r} \qquad (3)$$

Les premiers membres de ces nouvelles égalités étant entiers, les seconds le seront aussi, de même que leur somme $\frac{p}{r}$; par suite, si l'on considère à part les égalités (1), (2), (3), on voit que les quantités $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ sont la différence de deux nombres entiers ; elles sont entières aussi et les côtés des triangles sont des multiples du rayon du cercle inscrit. Prenant r pour unité on a

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 1$$

ou

$$(p-a)(p-b)(p-c) = p. \qquad (4)$$

Considérons les points α, β, γ où le cercle inscrit touche les côtés du triangle ABC et posons

$$A\beta = x,\ B\alpha = y\ C\gamma = z.$$

Nous aurons

$$p = x + y + z$$
$$a = y + z$$
$$b = x + z$$
$$c = x + y.$$

L'égalité (4) devient alors

$$xyz = x + y + z.$$

Si x, y, z sont entiers, a, b, c le sont également et par conséquent multiples de r. Mais l'égalité est satisfaite pour

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$$

Donc $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, ou $a = 5r$, $b = 4r$, $c = 3r$.

Le triangle est dès lors rectangle, puisque $a^2 = b^2 + c^2$.

La forme du triangle est déterminée par les valeurs mêmes de ses côtés.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Gobert, au collège Chaptal; Bonnieux, à Riom; Henry, à Bréchaincourt.

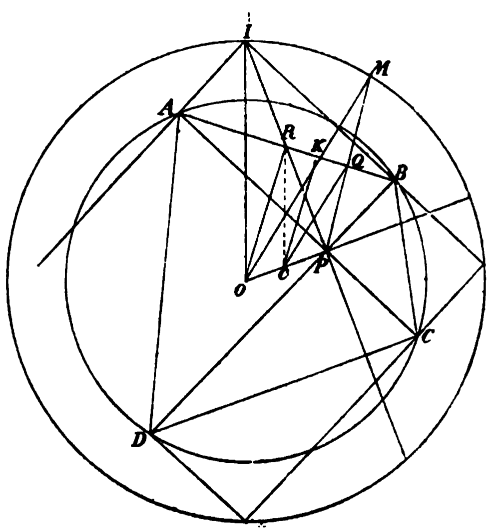
QUESTION 303.

Solution par M. DELPIT, élève à l'École préparatoire Saint-Barbe.

On donne un cercle et un point fixe P *intérieur. On demande :*

1° Quel est le lieu des points symétriques du point P *par rapport aux quadrilatères inscrits* ABCD *dont les diagonales sont rectangulaires et passent par le point* P.

2° Quel est le lieu des sommets des quadrilatères obtenus en menant par les sommets des quadrilatères ABCD *des parallèles aux diagonales.*



1° Soit AB un des côtés du quadrilatère ABCD, et M le symétrique de P par rapport à ce côté. Soit R le

milieu de AB, K le pied de la perpendiculaire abaissée au milieu C de OP sur AB.

Le triangle rectangle ORB donne $OR^2 + RB^2 = R^2$. R étant le rayon du cercle, remplaçons RB par RP, on a $OR^2 + RP^2 = R^2$. Il résulte de là que la médiane RC du triangle ORP est constante. Menons CQ. K étant le milieu de RQ, les obliques CR, CQ sont égales. Donc CQ est constante.

Or OM est le double de CQ; donc le lieu du point M est une circonférence concentrique à la circonférence donnée.

2° Par les points A et B menons des parallèles aux diagonales. Soit I leur point de rencontre.

Le quadrilatère AIRP est un rectangle. Donc la diagonale PI passe par le milieu R de AB et y est divisée en deux parties égales.

Si nous tirons OI, cette droite est le double de CR; or CR est constante et égale à CQ, donc OI est constante et égale à OM.

Donc l'ensemble des deux lieux se réduit à une circonférence ayant pour centre le centre du cercle donné et pour rayon $2\sqrt{R^2 - \frac{OP^2}{2}}$.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Fiévet, de Lille.

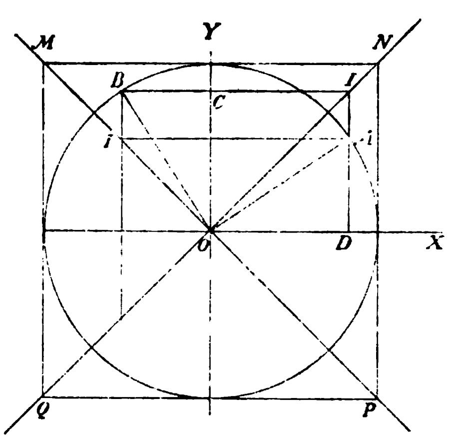
QUESTION 305

Solution par M. Aug. DAGUILLON, élève du Lycée Henri IV (classe de M. Macé de l'Épinay).

On donne un cercle O *et par le centre de ce cercle on mène deux rayons rectangulaires* OA *et* OB ; *par les extrémités de ces rayons on mène deux droites parallèles à deux directions fixes et rectangulaires. Ces deux droites se coupent en un point* I *dont on demande le lieu lorsque le système* AOB *tourne autour du point* O.

On peut toujours supposer que les deux directions rectangulaires données passent par le centre du cercle; soient

ox, *oy*, ces deux directions et AOB une position quelconque du système mobile. Soient C et D les intersections respectives des droites BI, AI avec l'axe auquel chacune d'elles n'est pas parallèle. Les angles BOC, AOD sont égaux comme ayant même complément COA; les triangles BOC, AOD qui ont en outre l'hypoténuse égale sont donc égaux et OC = OD.



Mais OC = DI et OD = CI ; donc ID = IC. Donc le lieu du point I est la bissectrice du premier angle des axes *xoy*.

Comme d'ailleurs rien n'indique celui des points A et B par lequel doit être menée la parallèle à chaque direction, une démonstration analogue ferait voir que le lieu du second point I' correspondant à la position AOB du système mobile, est la bissectrice du second angle des axes.

On voit d'ailleurs facilement en faisant varier cette position, que le lieu se réduit à la partie de ces bissectrices contenue à l'intérieur du carré MNPQ circonscrit au cercle parallèlement aux directions données.

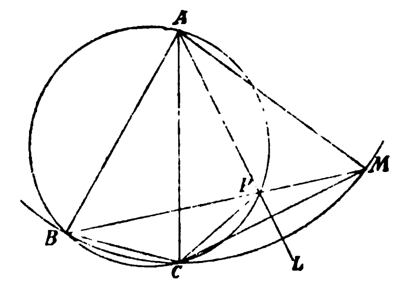
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Delaporte, Fiévet, de Lille ; Rivard, au Mans ; Joly, à Tarbes ; Callon, lycée Louis-le-Grand ; Dupuy, à Grenoble ; Bertin, école normale primaire à Vesoul ; Delpit, à Sainte-Barbe ; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier ; Baudouin, à Beauvais ; La Chesnais, à Versailles.

QUESTION 306

Solution par M. Delpit, École préparatoire de Sainte-Barbe.

Par le sommet A *d'un triangle isoscèle on mène une sécante* AL *on prend le symétrique* M *du point* C *par rapport à la droite* AL *et on mène la droite* BM *qui coupe* AL *en* P. *Lieu du point* P.

Joignons AM, DC. M étant le symétrique de C par rapport à AL, AB = AC = AM.



Le lieu de M est dès lors une circonférence décrite de A comme centre avec AB pour rayon.

Il suit de là que l'angle BMC est constant et a pour mesure $\frac{BC}{2}$; il est donc égal à la moitié de l'angle au centre ABC. Ce même angle est aussi égal à la moitié de $\overline{BPC}$; Donc $\overline{BPC} = \overline{BAC}$.

Par suite le quadrilatère BADC est inscriptible et le lieu du point P est la circonférence circonscrite au triangle BAC.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Baudoin à Beauvais; Callon, au lycée Louis-le-Grand; Delaporte, Fiévet à Lille; Bertin, école normale de Vesoul; Dupuy, à Grenoble; Perrier, Prost, à Lons-le-Saulnier; Lachesnais, à Versailles; Daguillon, Lapareillé, lycée Henri IV; van Aubel, à l Athénée de Liège; Gino Loria, à Mantoue; Joly, à Tarbes.

QUESTION 313.

Solution par M. Louis Rivard, élève au Lycée du Mans.

Si dans un triangle ABC, *les côtés* a *et* b *sont tels que l'on ait* $a = b\sqrt{2}$, *démontrer que : 1° la médiane du triangle qui part du sommet* A *coupe le côté* BC *sous un angle égal à l'angle* A *du triangle; 2° que* $\cos^2 A = \cos 2B$.

1° Par hypothèse on a $a = b\sqrt{2}$; d'où

$$\frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{b}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ce qui montre que les deux triangles CDA et CBD qui ont l'angle commun C compris entre deux côtés proportionnels sont semblables. Par suite CDA = CAB.

2° De l'égalité $a = b\sqrt{2}$ on tire

$$\sin A = \sqrt{2} \sin B$$
$$\sin^2 A = 2 \sin^2 B$$
$$1 - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 B$$
$$\cos^2 A = \cos 2B$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Bompard, collège Stanislas; Baudoin, à Beauvais; Delcambre, collège Chaptal; de Lagenardière, à Besançon; Witte, Lapareillé, lycée Henri IV; Bonniaud, Dulcy, Moreau, à Châteauroux; Boissière, Tinel, Hellot, lycée Corneille, à Rouen; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Joly, Barthe, à Tarbes; Perrier, a Lons-le-Saulnier; Ménigault, Lerouge, à Paris; Hamon, au Mans; Fiévet, à Lille; Fournier, à Moulins; Gino Loria, à Mantoue; Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 314

Solution par M. VITTE, élève du Lycée Henri IV.

On considère un cercle de centre O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD. *Du point* A *comme centre avec* AC = AD *pour rayon, on décrit un cercle, et l'on prend un point* M *sur ce cercle. On mène les lignes* AM, BM *qui rencontrent le cercle* O *aux points* A′ *et* B′; *on mène aussi le rayon* OI *qui passe par le point* M. *Démontrer que l'on a arc* CI = *arc* B′C + *arc* A′I.

Il suffit de démontrer que COI = B′OC + A′OI ou en remplaçant ces angles par des valeurs équivalentes:

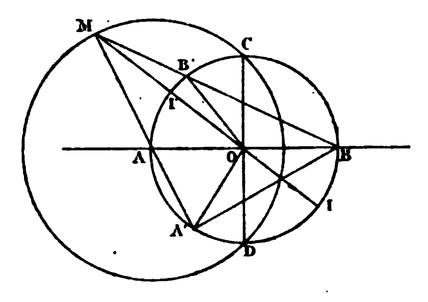
$$\pi - \text{DOI} = \pi + \text{DOI} - \text{B'OA'} = \pi + \text{DOI} - 2\text{B'BA'}$$

ou DOI = B'BA', c'est-à-dire, en écrivant que les compléments de ces angles sont égaux :

BOI = AOI' = AMB',

puisque l'angle MA'B, est droit.

Considérons les triangles MAB, MAO, ils donnent



$\overline{MA}^2 = 2R^2 = R \cdot 2R$

$= AO \cdot AB$

$$\frac{MA}{AO} = \frac{AB}{MA}.$$

Ces deux triangles sont donc semblables comme ayant un angle A égal compris entre côtés proportionnels, donc

AOI' = AMB', C. Q. F. D.

La démonstration aurait été la même si on eût pris le point M à l'intérieur de la circonférence O.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dulcy, à Châteauroux ; Bompard, au collège Stanislas.

QUESTION 316

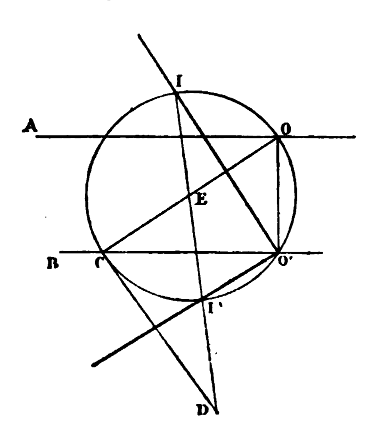
Solution par M. Rivard, élève au Lycée du Mans.

On donne deux parallèles A *et* B: *sur la première est un point fixe* O. *Soit* C *un point quelconque de* B. *Sur* OC *comme diamètre décrivons une circonférence et menons en* C *la tangente* CD, *sur laquelle nous prenons* CD = CO. *Enfin joignons le point* D *au milieu* E *de* CO; *cette droite rencontre le cercle en deux points* I *et* I' *dont on demande le lieu géométrique.*

(De Longchamps.)

Du point O abaissons la perpendiculaire OO' sur B. Le point O' appartient à la circonférence. Par suite les droites O'I, O'I' sont rectangulaires.

La ligne O'I fait avec la droite B un angle constant. En effet $IO'C = \frac{1}{2}CED$. Or dans le triangle CED, on a $C = 1dr$ et $\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que tous les triangles rectangles CED sont semblables et par suite que CED est constant.



Un calçul très simple montre que cet angle vaut 31° 47′ 3″, 13.

Le lieu des points I et I' se compose donc des côtés de l'angle droit IO'I.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix ; Delpit, Docteur, à l'école préparatoire Sainte-Barbe; Bompart, au collège Stanislas; Vitte, au lycée Henri IV ; Joly, à Tarbes.

QUESTION 322

Solution par M. LOUIS RIVARD, élève au Lycée du Mans.

Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme et leur produit.

Soit y la raison de cette progression, x le troisième terme: les cinq nombres cherchés sont :

$$(x - 2y), \quad (x - y), \quad x, \quad (x + y), \quad (x + 2y).$$

La somme de ces nombres est $5x$, x est donc connu, soit $x = a$, le produit des cinq nombres est

$$(a - 2y)(a - y)\, a\, (a + y)(a + 2y) = m^5;$$

d'où

$$4ay^4 - 5a^3y^2 + a^5 - m^5 = 0.$$

La résolution et la discussion de cette équation rentrent dans la résolution de l'équation bicarrée.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saulnier

Boissière, Tinel, Hello, à Rouen; Joly, à Tarbes; Fievet, à Lille; Gino-Loria, à Mantoue; van Aubel, à Liège; Dupuy, à Grenoble; Bord, à Passy; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Menigault, à Paris; Baudoin, à Beauvais; Vitte, Lepareillé, au lycée Henri IV; Bonnieux, à Riom; Blessel, Lerouge, à Paris.

QUESTION 323

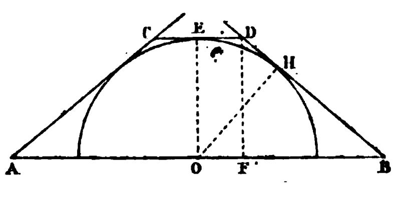
Solution, par M. Alphonse Joly, élève au Lycée de Tarbes.

Trouver le minimum du volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles circonscrit à un hémisphère.

Posons $ED = x$, $OB = y$, $OE = R$,

on a $V . ABCD = \frac{1}{3}\pi R (x^2 + xy + y^2)$.

La question revient à trouver le minimum de $x^2+xy+y^2 (\alpha)$.



Menons OH et soit DF parallèle à EO. Les triangles rectangles DFB et OHB étant égaux, $DB = OB = y$. De plus on a

$$y^2 = R^2 + (x - y)^2 \text{ d'où } y = \frac{R^2 + x^2}{2x}.$$

Portant cette valeur dans l'expression (α), égalons à m, il vient: $7x^4 - 2x^2(2m - 2R^2) + R^4 = 0$,

d'où $x^2 = \frac{2x - 2R^2 \pm \sqrt{4m^2 - 8mR^2 - 3R^4}}{7}$.

Pour la réalité des racines on doit avoir

$$4m^2 - 8mR^2 - 3R^4 > 0, \qquad (1)$$

ou $4(m - m')(m - m'') > 0$,

ce qui exige que $m > m'$ $m < m''$;

on tire du trinôme (1) égalé à 0

$$m = \frac{R^2(2 \pm \sqrt{7})}{2}.$$

Pour $m = m' = \frac{R^2(2 + \sqrt{7})}{2}$ on a un minimum.

La valeur correspondante de x^2 est $\frac{R^2}{\sqrt{7}}$; par suite $x = \frac{R}{\sqrt[4]{7}}$ et $y = \frac{R(1+\sqrt{7})}{2\sqrt[4]{7}}$, valeurs que l'on construit facilement.

Le volume minimum est $\frac{\pi R^3 (2+\sqrt{7})}{6}$.

Il n'y a pas lieu de considérer le maximum, que l'on trouverait d'ailleurs négatif.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Baudoin, à Beauvais; Prost, Perrier, à Lons-le-Saulnier; Rivard, au Mans; Tinel, Hello, Boissière, à Rouen; Menigault, à Paris.

QUESTION 324

Solution par M. ED. VAN AUBEL, élève à l'Athénée de Liège.

Construire géométriquement un triangle ABC *connaissant un côté* a, *le périmètre* 2p *et la surface* S.

Étant donnés le périmètre et la surface, on aura le rayon du cercle inscrit par la relation $S = pr$.

Cela posé, soient I le centre du cercle inscrit et I' le centre du cercle exinscrit opposé à A.

On peut construire le triangle rectangle AMI, dont on connaît les deux côtés de l'angle droit

$$AM = p - a, \quad MI = \frac{Sr}{p}.$$

On décrira ensuite le cercle I et on mènera la tangente AC.

De plus, si l'on remarque que $AQ = AT = p$, il sera facile de construire le cercle I'.

Il ne reste plus alors qu'à mener la tangente commune BC aux deux cercles I et I'.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Bonnieux, à Riom; Dulcy, à Châteauroux; Rivard, Provost, au Mans; Prost, Perrier.

Lons-le-Saulnier; Boissière, Tinal, à Rouen; Baudoin, à Beauvais; Tailhac. Joly, à Tarbes; Lapareillé, au lycée Henri IV; Dupuy, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Debray, à Chauvency-Saint-Hubert; Blessel, à Paris; Lefèvre, à Senlis; Fiévet, à Lille; Henry, à Bréchaincourt.

NOTE D'ALGÈBRE

Par **M. Ch. Pravaz**, professeur au Collège d'Autun.

Comme application de sa théorie sur la recherche des facteurs commensurables d'ordre quelconque d'une équation algébrique et entière, M. de Longchamps a déterminé (t. IV, p. 73) les conditions de divisibilité d'un polynôme entier de degré m,

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_n x^{m-n} + \dots + A_m \qquad (1)$$

par le trinôme du second degré

$$x^2 - px - q \qquad (2)$$

Ces conditions peuvent facilement être obtenues par un moyen direct.

Effectivement, pour que le polynôme (1) soit divisible par le trinôme (2), il faut et il suffit que l'on puisse trouver un polynôme entier de degré $m - 2$,

$$B_0 x^{m-2} + B_1 x^{m-3} + \dots + B_{n-2} x^{m-n} + B_{n-1} x^{m-n-1} + B_n x^{m-n-2} + \dots + B_{n-2} \qquad (3)$$

tel que le produit de ce dernier polynôme par le trinôme (2) soit identique au polynôme (1).

En écrivant que le coefficient du terme de chaque degré dans le produit des expressions (3) et (2) est égal au coefficient du terme de même degré dans le polynôme (1), on a, pour déterminer les $m - 1$ coefficients du polynôme (3), les $m + 1$ équations

$$\left.\begin{aligned} A_0 - B_0 &= 0 \\ A_1 + pB_0 - B_1 &= 0 \\ A_2 + qB_0 + pB_1 - B_2 &= 0 \\ A_3 + qB_1 + pB_2 - B_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ A_{m-2} + qB_{m-4} + pB_{m-3} - B_{m-2} &= 0 \\ A_{m-1} + qB_{m-3} + pB_{m-2} &= 0 \\ A_m + B_{m-2} &= 0 \end{aligned}\right\} (A)$$

Donc pour que la division proposée soit possible, il faut et il suffit que les équations (A) soient compatibles, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{vmatrix} A_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & p & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & q & p & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 9 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m-3} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & p & -1 & 0 \\ A_{m-2} & 0 & 0 & & & 9 & p & -1 \\ A_{m-1} & 0 & 0 & & & 0 & 9 & p \end{vmatrix} = 0, \qquad (D_1)$$

et

$$(D_2) \quad \begin{vmatrix} A_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & p & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & q & p & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & q & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m-3} & 0 & 0 & 0 & \ldots & p & -1 & 0 \\ A_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & p & -1 \\ \frac{A_m}{q} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par Δ_{m-1} le déterminant obtenu en supprimant dans (D_1) la première ligne et la première colonne, et généralement par Δ_K le déterminant que l'on obtient par la suppression dans Δ_{K+1} de la première ligne et de la première colonne; de sorte que Δ_K est un déterminant à K^2 éléments et de la forme

$$\begin{vmatrix} p & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & q & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q & p & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & q & q \end{vmatrix}$$

Au moyen de cette notation, les équations (D_1) et (D_2) prennent la forme

$$A_0 \Delta_{m-1} + A_1 \Delta_{m-2} + \ldots + A_{m-4} \Delta_2 + A_{m-2} \Delta_1 + A_{m-1} = 0$$

$$A_0 \Delta_{m-2} + A_1 \Delta_{m-3} + \ldots + A_{m-2} \Delta_1 + A_{m-2} \Delta_1 + \frac{A_m}{q} = 0$$

en posant, pour conserver la symétrie, $\Delta o = 1$.

Calcul des déterminants Δ. — On a évidemment

$$\Delta_K = p\Delta_{K-1} + q\Delta_{K-2}$$

et si dans cette formule on remplace K successivement par 2, 3, 4, 5, 6 et que l'on remarque que

$$\Delta o = 1, \quad \Delta_1 = p$$

on aura, en désignant par C^m_n le nombre des combinaisons de m objets pris n à n,

$$\Delta_2 = p^2 + q \qquad = p^2 + C^1_1 q$$

$$\Delta_3 = p^3 + 2pq \qquad = p^3 + C^2_1 pq$$

$$\Delta_4 = p^4 + 3p^2q + q^2 \qquad = d^4 + C^3_1 p^2 q + C^2_2 pq^2$$

$$\Delta_5 = p^5 + 4p^3q + 3pq^2 \qquad = p^5 + C^4_1 p^3 q + C^3_2 pq^2$$

$$\Delta_6 = p^6 + 5p^4q + 6p^2q^2 + q^3 = p^6 + 6^5_1 p^4_9 + C^4_2 p^2 q^2 + C^3_3 q^3$$

On a donc, par induction,

$$(\Delta)\ \Delta_k = p^k + C^{k-1}_1 p^{k-2} q + C^{k-2}_2 p^{k-4} q + \ldots + C^{k-n}_n p^{k-2n} q^n + \ldots$$

Pour vérifier cette formule, nous la supposerons vraie lorsque l'indice du premier membre a l'une quelconque des valeurs 2, 3, 4, ... k, et nous démontrerons qu'elle est encore vraie lorsque cet indice a la valeur $k + 1$.

On a, en effet, $\Delta_{k+1} = p\Delta_k + q\Delta_{k-1}$

ou

$$\Delta_{k-1} = p\left[p^k + C^{k-1}_1 p^{k-2} q + C^{k-2}_2 p^{k-4} q^2 + \ldots + C^{k-n}_n p^{k-2n} q^n + \ldots\right]$$

$$+ q\left[p^{k-1} + C^{k-2}_1 p^{k-3} q + C^{k-3}_2 p^{k-5} q^2 + \ldots + C^{k-n}_{n-1} p^{k-2n+1} q^{n-1} + \ldots\right]$$

ou encore

$$\Delta_{k+1} = p^{k+1} + \left(C_{1+1}^{k-1}\right) p^{k-1} q + \left[C_2^{k-2} + C_1^{k-2}\right] p^{k-3} q^2$$
$$+ \dots + \left(C_n^{k-3} + C_{n-1}^{k-n}\right) p^{k+1-2n} \cdot q^n + \dots$$

et, généralement

$$C_n^{k-n} + C_{n-1}^{k-n} = C_n^{k+1-n};$$

on a donc la formule

$$\Delta_{k+1} = p^{k+1} + C_1^k p^{k-1} q + C_2^{k-1} p^{k-3} q^2 + \dots$$
$$+ C_n^{k+1-n} p^{k+1-2n} q^n + \dots.$$

qui se déduit bien de la formule (Δ) par le changement de k en $k+1$.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*; voir page 319.)

Équations en coordonnées tangentielles des coniques qui satisfont à des conditions spéciales. — Comme nous l'avons déjà dit, on représente souvent, en coordonnées tangentielles, une fonction linéaire des coordonnées u et v ou des coordonnées homogènes u, v et w, par une seule lettre M, par exemple, de sorte que $M = o$, dans cette notation symbolique, est l'équation d'un point. Ce mode d'écriture est analogue à l'emploi des coordonnées trilinéaires X, Y, Z; on donne quelquefois aux coordonnées tangentielles, ainsi entendues, le nom de *coordonnées trilatères*.

— *Équation générale des coniques tangentes aux tangentes communes des deux coniques* $f(u, v) = o$ et $\varphi(u, v) = o$. — Nous avons déjà démontré plus haut que les coniques qui touchent les tangentes communes aux deux coniques $f(u, v) = o$ et $\varphi(u, v) = o$ sont comprises dans l'équation générale $(u, v) + \lambda\varphi(u, v) = o$.

— *Équation générale des coniques qui touchent les tangentes menées à la conique* f (u, v) = o *par les points* M = o *et* N = o. — Cette équation peut se déduire de la précédente en supposant que la conique $\varphi(u, v) = o$ se réduit à un système de deux points. Les tangentes communes à la conique $f(u, v) = o$ et à un système de deux points sont évidemment les tangentes menées à la conique $f = o$ par les deux points. L'équation générale est donc $f(u, v) + \lambda MN = o$.

Ce fait résulte d'ailleurs directement d'une démonstration analogue à celle qui a été donnée pour $f + \lambda\varphi = o$.

— *Équation générale des coniques doublement tangentes à une conique donnée* f = o *aux points de contact des tangentes menées à* f = o *d'un point* M = o. — C'est la conséquence de l'équation précédente en y supposant les points M = o et N = o confondus. Les tangentes menées de ces points à la conique $f = o$ se confondent et l'équation générale prend la forme

$$f(u, v) + \lambda M^2 = o.$$

On reconnaît d'ailleurs le fait directement, en observant: 1° que l'équation $f(u, v) + \lambda M^2 = o$ est vérifiée par les valeurs de u et v qui annulent à la fois $f(u, v)$ et M, c'est-à-dire pour les coordonnées des tangentes menées du point M = o à la conique $f(u, v) = o$; 2° que le point de contact d'une tangente quelconque ayant pour équation (en coordonnées homogènes),

$$U(f_u + 2\lambda MM'_u) + V(f'_v + 2\lambda MM'_v) + W(f_w + 2\lambda MM'_w) = o$$

cette équation se réduit, pour une tangente issue de M = o, à

$$Uf_u + Vf'_v + Wf'_w = o,$$

c'est-à-dire au point de contact de cette tangente sur la courbe $f = o$; 3° que l'équation est générale, puisqu'on peut y déterminer λ en imposant une cinquième condition à la conique $f(u, v) + \lambda M^2 = o$.

— *Équation générale des coniques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère.* —Si les équations $f = o$ et $\varphi = o$ représentent chacune un système de deux points, l'équation $f + \lambda\varphi = o$ prend la forme

$$MN + \lambda PQ = o$$

qui représente les coniques tangentes aux tangentes communes des deux courbes MN = o et PQ = o. Or ces tangentes

ne peuvent être que les quatre côtés du quadrilatère dont les sommets *opposés* ont pour équations $M = o$, $N = o$ d'une part, et $P = o$, $Q = o$ d'autre part.

Le théorème se démontre d'ailleurs directement par un raisonnement identique à celui du cas précédent.

— *Équation générale des coniques touchant deux droites données en deux points donnés.* — Si dans l'équation $f(u, v) + \lambda M^2 = o$ on suppose que $f(u, v)$ se réduit à un système de deux points $PQ = o$, ou si dans l'équation $\lambda MN + PQ = o$ on suppose $M = o$ et $N = o$ confondus, l'équation prend la forme $PQ + \lambda M^2 = o$, qui représente les coniques touchant aux points $P = o$, $Q = o$, deux droites issues d'un point $M = o$.

Ce théorème se démontre d'ailleurs, comme les précédents, par un raisonnement direct absolument semblable à ceux dont nous avons déjà donné un exemple.

— *Équation générale des coniques inscrites dans un triangle.* — Si $P = o$, $Q = o$, $R = o$ sont les trois sommets du triangle, l'équation cherchée sera

$$\lambda PQ + \mu QR + \nu RP = o.$$

Car elle est vérifiée par les coordonnées des tangentes qui passent en $P = o$ et $Q = o$, ainsi que par celles des tangentes qui passent en $Q = o$ et $R = o$, et enfin par celles des tangentes qui passent en $R = o$ et $P = o$, c'est-à-dire par les coordonnées des trois côtés du triangle considéré.

L'équation est d'ailleurs générale; car on peut disposer des paramètres $\frac{\lambda}{\nu}$ et $\frac{\mu}{\nu}$ de manière à assujettir la conique dont il s'agit à avoir encore deux autres tangentes données, et comme on ne peut mener qu'une conique tangente à cinq droites, la courbe sera complètement déterminée.

Si l'une des fonctions se réduit à une constante, l'un des sommets du triangle est à l'origine des coordonnées.

— *Équation générale des coniques circonscrites à un triangle.* — Cette équation est $\lambda^2P^2 + \mu^2Q^2 + \nu^2R^2 - 2\lambda\mu PQ - 2\mu\nu QR - 2\nu\lambda RP = o$. Il est facile de voir, en effet, que si l'on

fait dans cette équation $P = 0$, par exemple, on obtient le carré parfait $(\mu Q - \nu R)^2 = 0$; or faire $P = 0$, c'est chercher les coordonnées des tangentes qui passent par ce point $P = 0$; les deux tangentes sont donc confondues, ce qui veut dire que le point est sur la courbe.

L'équation est d'ailleurs générale ; car elle contient encore deux paramètres disponibles.

— *Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère.* — Le calcul se fait exactement de la même manière qu'en coordonnées cartésiennes, pour les coniques inscrites dans un quadrilatère.

Si l'on représente par $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, les équations des points de rencontre des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère supposées de la forme

$$M = au + a'v - 1 = 0$$
$$N = bu + b'v - 1 = 0$$
$$P = cu + c'v - 1 = 0$$

l'équation générale cherchée est de la forme

$$\frac{p^2N^2}{\lambda} + \frac{q^2P^2}{1-\lambda} - M^2 = 0,$$

p et q étant des constantes données, et λ un paramètre arbitraire.

Le théorème peut d'ailleurs être vérifié directement, tout à fait comme en coordonnées cartésiennes.

— *Équation générale des coniques doublement tangentes à deux coniques données.* — Si l'on prend une des racines de l'équation en λ relative aux deux coniques $f = 0$ et $\varphi = 0$, on aura identiquement
$$f - \lambda\varphi = PQ,$$
P et Q étant deux des points ombilicaux des deux coniques f et φ. L'équation générale cherchée est alors

$$\mu^2P^2 + 2\mu(f + \lambda\varphi) + QQ^2 = 0.$$

Car les tangentes communes à cette conique et à $f = 0$ sont données par le système des deux équations $f = 0$ et $\mu^2P^2 + 2\mu\lambda\varphi + Q^2 = 0$, ou $f = 0$ avec $\mu^2P^2 - 2\mu PQ + Q^2 = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ avec $(\mu P - Q)^2 = 0$; ces tangentes coïncident donc deux à deux ; c'est-à-dire que la conique considérée est doublement tangente à $f = 0$.

On peut remarquer en outre que les tangentes communes passant au point $\mu P - Q = o$, ce point est le pôle de la droite de contact.

La conique $\varphi = o$ est de même doublement tangente à la conique proposée, $\mu P + Q = o$ étant le pôle de sa corde de contact.

D'où il résulte que *les pôles des deux droites de contact et les points ombilicaux* $P = o$ *et* $Q = o$ *sont conjugués harmoniques.* — L'équation est d'ailleurs générale, puisqu'elle renferme encore un paramètre arbitraire, μ, disponible.

— *Équation générale des coniques conjuguées par rapport à un triangle.* — Si $M = o$, $N = o$, $P = o$ sont les trois sommets du triangle, l'équation cherchée est

$$\lambda M^2 + \mu N^2 + \nu P^2 = o.$$

En effet, l'équation du pôle d'une droite (u, v) étant

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = o,$$

cette équation sera, dans le cas actuel,

$$U(\lambda MM'_u + \mu NN'_u + \nu PP'_u) + V(\lambda MM'_v + \mu NN'_v + \nu PP'_v) + W(\lambda MM'_w + \mu NN'_w + \nu PP'_w) = o.$$

S'il s'agit du côté qui passe par les sommets ($M = o$, $N = o$), c'est-à-dire du côté opposé au sommet $P = o$. l'équation du pôle se réduit à

$$P(UP'_u + VP'_v + WP'_w) = o$$

et comme l'expression $UP'_u + VP'_v + WP'_w$ n'est pas nulle, cette équation n'est autre que $P = o$.

Le pôle de chaque côté du triangle est donc le sommet opposé ; C. Q. F. D.

— *Équation générale des coniques homofocales.* — L'équation générale des coniques à centre qui sont homofocales est en coordonnées cartésiennes

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = o.$$

Prenons la forme adjointe du premier membre de l'équation $\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - z^2 = o$ pour les variables u, v, w ; nous aurons d'après la formation connue de la forme adjointe,

$$F = -\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2-\lambda} & 0 & 0 & u \\ 0 & \frac{1}{b^2-\lambda} & 0 & v \\ 0 & 0 & -1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire $F = u^2(a^2 - \lambda) + v^2(b^2 - \lambda) - w^2$; d'où en faisant $w^2 = 1$, l'équation générale des coniques homofocales à la conique $a^2u^2 + b^2v^2 = 1$ sera

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = \lambda(u^2 + v^2).$$

On trouve de même pour les paraboles homofocales

$$2u + \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

Si maintenant on observe que l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 - \lambda(u^2 + v^2);$$

est de la forme $f - \lambda\varphi = 0$, et que l'on écrive $u^2 + v^2$ sous la forme $(u + v\sqrt{-1})\ (u - v\sqrt{-1})$, cette équation prend la forme $f(u, v) + MN = 0$, ce qui montre que les coniques considérées touchent les tangentes menées à $f = 0$ par les points circulaires de l'infini.

La propriété réciproque étant évidente, toujours en vertu de la même forme d'équation, l'équation générale des courbes homofocales à une conique $f = 0$ est $f(u, v) + \lambda(u^2 + v^2) = 0$ et si $f = 0$ se réduit à un système de deux points, on aura l'équation $$PQ + \lambda(u^2 + v^2) = 0,$$ qui représentera les coniques ayant pour foyers deux points donnés. *(A suivre.)*

CHOIX DE QUESTIONS

PROPOSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880

Géométrie analytique à deux dimensions.

Étant donnée une parabole, on prend le milieu de la portion comprise sur l'axe entre le pied de la normale et le pied de la tangente; par ce point on mène à l'axe une perpendiculaire qui renconte la tangente en un point M; on demande le lieu de ce point pour toutes les tangentes de la courbe.

— Construire la courbe $\rho = \dfrac{\cos\frac{\omega}{3}}{\sin\omega}$.

— Lieu des sommets des paraboles qui coupent deux axes rectangulaires, l'un en un point donné et en un point variable, l'autre en deux points donnés.

— Construire la courbe $\rho = \frac{1 - 3 \sin \omega}{1 - 2 \sin \omega}$. — Position des asymptotes par rapport à leur branche de courbe.

— Soit la courbe $y^2 = x^3$; on demande l'équation qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées à la courbe aux points où elle est coupée par une droite $y = mx + n$.

— Sécantes communes aux deux courbes

$$\begin{cases} 4xy + 2y^2 - 6x - 12y + 12 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Quelle relation remarquable entre ces deux courbes l'équation en λ met-elle en évidence?

— Construction de la courbe représentée par l'équation

$$\rho^2 \cos^2 \omega + 2\rho \cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 0,$$

L'origine est un point remarquable; étudier en particulier ce point. — Quelles sont les tangentes aux points situés sur les rayons vecteurs $\omega = \frac{\pi}{4}$ et $\omega = \frac{3\pi}{4}$?

— Trouver les tangentes horizontales et les points d'inflexion de la courbe

$$y^2 = x^3 \pm \sqrt{1 - x^4},$$

— On demande de construire la courbe ayant pour équation

$$x^3 + y^3 - 3x - 6y + 7 = 0.$$

(Remarquer pour cela que le point $x = 1$, $y = 1$ est sur la courbe.)

— Construire la courbe dont l'équation est

$$\rho^2 \cos^3 \omega - 2\rho \cos \omega \, 2 \sin \omega = 0.$$

Géométrie à trois dimensions.

Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation d'un cylindre parabolique, et $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation d'un plan; on demande de calculer les coordonnées du sommet de la parabole suivant laquelle le plan coupe la courbe.

— Trouver le lieu des centres des sphères d'un rayon donné qui coupent le paraboloïde elliptique suivant des cercles.

— Rechercher les plans qui coupent l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. suivant des hyperboles équilatères.

— Étant données les deux hyperboles équilatères ($y = 0$, $x^2 - z^2 = a^2$), ($x = 0$, $y^2 - z^2 = b^2$), on considère une droite parallèle au plan des xy et assujettie à s'appuyer constamment sur ces deux hyperboles; on demande l'équation de la surface qu'elle engendre.

— Soient deux droites ($y = 0$, $z = h$), ($x = 0$. $z = h'$), l'une dans le plan des xz et parallèle à Ox, l'autre dans le plan des yz et parallèle à Oy; on considère en outre un cercle dans le plan bissecteur $x = y$ des plans xOz et yOz, assujetti de plus à couper l'axe des z aux mêmes points que les deux droites données. On demande l'équation de la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant à la fois sur le cercle et sur les deux droites.

— On considère dans le plan xOy l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; en un point quelconque M de cette courbe on mène la normale. jusqu'à sa rencontre en P

avec l'axe focal, et on prend la longueur de la portion MP de normale ainsi déterminée. On élève par le pied P de la normale, dans le plan xoz, une perpendiculaire à Ox, sur laquelle on prend une longueur PM' égale à MP; puis on joint M'M. On demande l'équation de la surface engendrée par la ligne MM' quand le point M parcourt l'ellipse donnée. — Intersections de cette surface avec les plans xOz et yOz.

— Soit le paraboloïde de révolution $x^2 + x^2 = 2pz$; on considère le cercle $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$; trouver la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant constamment sur le cercle donné sur l'axe des z et en restant tangente au paraboloïde. — Nature et propriétés de cette surface.

— Étant donnée dans le plan des xy la courbe $f(x, y) = 0$, on demande le lieu engendré par une parabole assujettie à rester tangente à l'axe des z en un point fixe, et à toucher le plan des xy en un point de la courbe $f(x, y) = 0$. On demande aussi de construire une génératrice quelconque de la surface.

— Étant donnée la surface ayant pour équation

$$x(x + y + z) + 2(y + z - 1) = 0,$$

on demande le lieu des centres des sections faites dans cette surface par des plans parallèles au plan $x = my + nz$. — Qu'arrive-t-il pour $m = n$?

— f_4, f_3, f_2, f_1, f_0, étant des fonctions homogènes à trois variables chacune d'un degré marqué par son indice, on considère la surface ayant pour équation $f_4 + f_3 + f_2 + f_1 + f_0 = 0$, et on mène des transversales par l'origine. Ces droites coupent la surface en quatre points A, B, C, D. On demande de mener ces transversales de manière que le milieu de la distance BC coïncide avec le milieu de la distance AD, et de trouver la surface engendrée par ces droites. L'équation étant trouvée, on demande les relations de la surface qu'elle représente avec les deux cônes $f_4 = 0$ et $f_3 = 0$.

— Soit le cylindre elliptique $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; on considère la section par le plan $z = mx + ny$, et en chaque point de cette section on mène la normale à la surface; cette normale rencontre la surface du cylindre en un autre point dont on demande le lieu pour tous les points de la section.

Algèbre.

Soit $f(x)$ un polynôme entier et rationnel en x; on demande de trouver le reste de la division de $f(x)$ par le produit $(x - a)(x - b)(x - c)$ sans effectuer l'opération. Le reste étant de la forme $Ax^2 + Bx + C$, déterminer A, B, C : 1° dans le cas général; 2° dans le cas où $a = b$; 3° dans le cas où $a = b = c$.

— Établir que si $f(u, v)$ est une fonction dans laquelle u et v entrent symétriquement, et que cette fonction s'annule pour $u = v$, $f(u, v)$ est divisible par $(u - v)^2$. — En conclure l'identité

$$\frac{\varphi(a)}{f'(a)} + \frac{\varphi(b)}{f'(b)} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l)} = 0,$$

$f(x)$ étant un polynôme du degré m, et $\varphi(x)$ un polynôme au plus du degré $m - 2$; $a, b, c \ldots l$ étant d'ailleurs les m racines de l'équation $f(x) = 0$.

— Pour quelles valeurs de α et de x la série

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{x^{2\alpha}} + \ldots + \frac{1}{x^{n\alpha}} + \ldots$$

est-elle convergente?

— Étant données les deux équations simultanées

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad xy + z^2 = b^2,$$

calculer les dérivées des deux fonctions x et y par rapport à la variable z considérée comme indépendante.

— Soit l'équation $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + Ax + B = 0$, on demande de déterminer A et B de manière que α, β, γ, δ étant ses racines, on ait entre elles les deux relations $\alpha = 2\beta$ et $\gamma = 3\delta$.

— Rechercher si la série

$$1 + \frac{1}{2(L2)^m} + \frac{1}{3(L3)} + \dots + \frac{1}{p(Lp)^m} + \dots$$

est convergente ou divergente.

— Trouver le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^7 - 3x^6 + 5x^4 - 2x^2 + 27 = 0$$

au moyen des divers théorèmes connus.

— Résoudre l'équation $x^3 - 6x + 7\sqrt{-1} = 0$.

— Séparer les racines de l'équation $x^3 - 10x + 1 = 0$, et calculer leurs valeurs à moins de 0,001 par la méthode de Newton.

— Étudier la série $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$

— Construire la courbe $y = a - Lx$, et rechercher quand l'équation $a^x - Lx = 0$ a des racines réelles.

— Déterminer a et b dans l'équation

$$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 8x - 3 = 0$$

de manière que cette équation admette une racine triple.

Quelle est la limite de $\sqrt[x]{1 + \sin x}$ pour $x = 0$?

— Étant donnée l'équation $f(x) = 0$, on demande de former l'équation qui admet pour racines les produits de la forme $y = a^2b$, a et b étant deux racines quelconques, mais *différentes*, de l'équation $f(x) = 0$. — Quel est *à priori* le degré de l'équation obtenue? — Appliquer à $x^3 + px + q = 0$.

— Séparer les racines de l'équation $3x^5 - 25x^3 + 60x + \lambda = 0$. Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation est susceptible du plus grand nombre de racines réelles?

— Déterminer a et b dans l'équation $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ de manière que x_1 et x_2 étant deux racines de cette équation, on ait entre elles la relation $x_1 + x_2 = x_1x_2 = m$.

— $f(x) = 0$ étant une équation de degré m, on considère ses racines comme les tangentes de certains arcs, et on demande de former les équations admettant pour racines: 1° les tangentes des sommes deux à deux de ces arcs; 2° les tangentes des doubles de ces axes.

— $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ étant les équations de deux courbes de degrés m et n, on demande de former l'équation qui admet pour racines les carrés des distances à l'origine des axes des points d'intersection des deux courbes. — Quel sera le degré de cette équation, et dans quel cas s'abaissera-t-il?

— Séparer les racines de l'équation $2x - 3x = 0$.

— Séparer les racines de l'équation $eLx + \frac{1}{2}x^2 - (1 + e)x = 0$.

— Appliquer les règles connues à la recherche d'une limite supérieure des racines positives de l'équation $x^8 + x^7 + x^6 + 10x^5 - 100x^4 + 1 = 0$. Quelle est la plus avantageuse?

— Trouver un arc dont la longueur soit égale à celle de sa corde augmentée de la flèche du segment correspondant à cet arc.

Géométrie descriptive.

Déterminer, dans la section plane d'une surface de révolution, les points le plus haut et le plus bas, et le point où la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre.

— Etant donné le rabattement d'une courbe située dans un plan défini par ses traces, on fait tourner cette courbe autour d'un axe vertical. Trouver les projections verticales des points de la surface ainsi engendrée, qui correspondent à une projection horizontale donnée.

— On donne les traces d'un plan. Dans ce plan se trouve une courbe donnée par sa projection horizontale. Cette courbe est la directrice d'un cône dont on donne les projections du sommet. Mener au cône un plan tangent perpendiculaire au plan donné.

— Etant données 4 droites OA, OB, OC, OD, partant du même point, on mène la bissectrice OE, de l'angle AOB, et la bissectrice OF, de l'angle COD; OE et OF sont les axes de deux cônes de révolution engendré par les droites OA et OC, tournant autour de OE et de OF; on demande les traces horizontales des plans tangents communs à ces deux cônes.

— Etant donnée une droite parallèle au plan vertical, une ellipse tourne autour de cette droite; on demande le contour apparent sur le plan horizontal de la surface ainsi engendrée.

— On donne un triangle ABC situé dans le plan horizontal et un cercle situé à l'intérieur de ce triangle; ce cercle en tournant autour de AB engendre un tore; on demande l'intersection de ce tore par un plan conduit suivant BC, et incliné à 30° sur le plan du triangle. (Cet angle est supposé fait par le plan sécant avec la partie du plan horizontal à l'intérieur du triangle.)

— Un cône de révolution a pour axe une droite de front; une sphère ayant son centre dans le plan de front qui contient l'axe, coupe ce cône suivant une courbe dont la projection verticale est une parabole; on demande de trouver le sommet de cette parabole.

— Construire l'intersection d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la génératrice principale de l'hyperboloïde, et dont la directrice est une courbe quelconque donnée dans le plan horizontal. — Tangente en un point de cette intersection.

— On donne une sphère dont le centre est dans le plan horizontal, et une droite Ab dont la trace horizontale est en A, et qui est inclinée de 45° sur le plan horizontal. Mener à la sphère les plans tangents par cette droite. *(Question à résoudre sans employer de plan vertical de projection.)*

— On donne une droite par les projections horizontales et les côtés de deux de ses points. On prend un point C dans le plan horizontal. Distance du point C à la droite donnée. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— On donne la projection horizontale d'un triangle et les côtés de ses sommets; mener par le sommet A, dans le plan du triangle, une droite qui fasse avec le plan horizontal un angle donné. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Soit un triangle ABC, et AI la bissectrice de l'angle A. — AC engendre un cône en tournant autour de AI; on demande l'intersection de ce cône avec un plan mené par AB et faisant avec le plan horizontal un angle de 30°. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Etant donnés deux points sur la ligne de terre, un troisième point dans le plan vertical, et un quatrième dans le plan horizontal, construire le centre de la sphère qui passe par ces quatre points.

— Comment se coupent deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux, et dont les sommets sont à la même distance des deux plans de projection?

— Construire la courbe de contact d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée avec un paraboloïde de révolution auquel il est circonscrit.

Point le plus bas de cette courbe.

— Une ellipse tourne autour de son grand axe, lequel est perpendiculaire au plan horizontal. Dans le méridien principal de la surface, on trace une ellipse concentrique à la première, et on la fait tourner autour de son petit axe. Construire l'intersection des deux surfaces ainsi engendrées. Point le plus haut et point le plus bas de la courbe.

— Une courbe donnée par ses projections tourne autour d'un axe vertical. Construire la méridienne principale de la surface ainsi engendrée.

Cas particulier où la courbe donnée est plane, et définie par les traces de son plan et sa projection horizontale.

Cas d'une ellipse située dans un plan perpendiculaire au plan vertical, et dont la projection horizontale est une ellipse dont le grand axe passe par le pied de l'axe sur le plan horizontal.

— Intersection d'un cylindre défini par la directrice dans le plan horizontal et la direction de ses génératrices, avec un paraboloïde de révolution à axe vertical.

A ce sujet, voir comment se projette sur le plan horizontal la section faite dans un paraboloïde de révolution à axe vertical par un plan perpendiculaire au plan vertical.

— Construire le point le plus haut de l'intersection de deux cônes à bases circulaires.

— Construire l'angle d'un plan perpendiculaire au plan vertical avec un plan parallèle à la ligne de terre.

— On donne une ellipse E et deux droites L et L'. On demande de construire un point de l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant l'ellipse E commune, et passant l'une par la droite L, l'autre par la droite L'.

— Etant donnée la base ABC d'un tétraèdre dans le plan horizontal, et la projection horizontale ainsi que la cote de son sommet, construire l'angle dièdre SA. *(Pas de plan vertical de projection.)*

— Etant donnés un plan par ses traces, et une droite dans le plan horizontal. mener par cette droite un plan faisant avec le plan donné un angle de 60 degrés.

— Etant donnés un plan et un point de l'espace invariablement lié à ce plan, on fait tourner ce dernier d'un angle donné autour de sa trace horizontale, et on demande les nouvelles projections du point.

— Construire l'intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical avec un cône ayant avec l'hyperboloïde une génératrice commune.

— On donne un cylindre vertical de révolution, et une droite D. Sur l'axe du cylindre et sur la droite D s'appuie une droite qui se déplace en restant parallèle au plan horizontal. Construire l'intersection du cylindre avec le paraboloïde ainsi engendré. Point le plus haut et point le plus bas de la courbe.

— Construire la plus courte distance de deux droites dont l'une est dans le plan vertical, et l'autre dans le plan horizontal de projection.

— Etant donné un cylindre à base d'hyperbole, on le coupe par un plan quelconque; trouver les asymptotes de la section. — Y a-t-il toujours des asymptotes?

QUESTION D'EXAMEN

Un cône de révolution se développant sur un plan, trouver la transformée d'une section plane du cône.

Nous prendrons pour axe polaire la génératrice qui passe par le sommet le plus haut de la section. Nous appellerons :

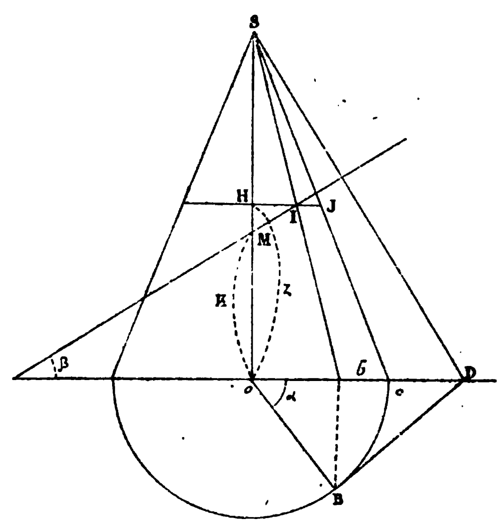
R, le rayon de base du cône;

h, sa hauteur;

l, son apothème;

k, la hauteur du point où le plan coupe l'axe ;

β, l'angle du plan sécant avec le plan horizontal.



La vraie longueur du rayon vecteur qui se projette en SI est SJ.

En appelant z la distance OH, on a

$$\frac{h}{h-z}=\frac{l}{\rho},$$

d'autre part on a

$$\frac{h}{h-z}=\frac{\text{OB}}{\text{HI}}=\frac{\text{R}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{z-k}.$$

On en tire

$$\frac{h+\text{R}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{h-k}=\frac{h}{h-z}=\frac{l}{\rho}.$$

Donc
$$\rho=\frac{l(h-k)}{h+\text{R}\operatorname{tg}\beta\cos\alpha}.$$

Maintenant dans le développement l'arc CB se transforme

en un arc égal, et entre les angles α et ω on a la relation

$$R\alpha = l\omega,$$

d'où

$$\alpha = \frac{l\omega}{R}.$$

Donc l'équation de la courbe est

$$\rho = \frac{l(h-k)}{h + R \operatorname{tg} \beta \cos \frac{l\omega}{R}}.$$

Cherchons pour quelle valeur de ω on a une inflexion.

On sait que la valeur de ω qui donne une inflexion est celle qui satisfait à la relation

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0.$$

Or on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h + R \operatorname{tg} \beta \cos \left(\frac{l\omega}{R}\right)}{l(h-k)}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{-\frac{l^2}{R} \operatorname{tg} \beta \cos \left(\frac{l\omega}{R}\right)}{l(h-k)}.$$

En remplaçant, on trouve pour la condition d'inflexion,

$$Rh + (R^2 - l^2) \operatorname{tg} \beta \cos \frac{l\omega}{R} = 0,$$

ou

$$\cos \frac{l\omega}{R} = \frac{R}{h \operatorname{tg} \beta}.$$

Il faut que l'on ait $R < h \operatorname{tg} \beta$.

Or, si par le sommet S, je mène une perpendiculaire à la trace verticale du plan, elle coupe la ligne de terre en un point D, tel que l'on a $OD = h \operatorname{tg} \beta$; il faut donc d'abord que le point D soit extérieur à la base; en outre, si je mène par le point D la tangente DB au cercle, j'ai

$$\cos \alpha = \frac{R}{OD},$$

et, d'après la relation qui lie les angles α et ω, on voit que le point qui se projette en I est le point qui, dans la transformée, donnera une inflexion.

Le plan déterminé par les droites DB et DS est un plan tangent au cône, et ce plan est perpendiculaire au plan

sécant, puisqu'il passe par la ligne OD, perpendiculaire au plan sécant. On arrive donc à ce résultat :

Pour que la transformée présente une inflexion, il faut que l'on puisse mener au cône un plan tangent perpendiculaire au plan sécant, et le point de la courbe qui donnera un point d'inflexion dans la transformée est précisément le point qui se trouve dans ce plan tangent perpendiculaire au plan sécant.

On retrouve ainsi le résultat donné directement par la géométrie descriptive.

ÉCOLE CENTRALE 1881

PREMIÈRE SESSION

Géométrie analytique.

Soit
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$
l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à ses axes ; soient α et β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation
$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0, \qquad (2)$$
dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$.

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points communs aux courbes (1) et (2) ; dans chacune d'elles, on mène le diamètre conjugué à la direction OP, et on projette le point O sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.

3° Par les points communs aux deux courbes (1) et (2), on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles, quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné m, menée par le point O.

On examinera en particulier le cas où $m = \frac{a^3}{b^3}$ et le cas où $m = -\frac{a^3}{b^3}$.

Trigonométrie.

On donne dans un triangle $a = 4567{,}89$
$b = 3456{,}78$
$C = 54° 21' 43'',7$

Calculer A, B, c et S.

Physique et Chimie.

Un cylindre de verre CC' communique, par sa partie inférieure, avec un tube en fer ff', ouvert à son extrémité supérieure. Les rayons du tube en fer et du cylindre sont dans le rapport de 1 à 5.

On introduit dans le cylindre une certaine quantité de mercure qui s'élève au même niveau dans le tube de fer; les deux surfaces libres du mercure se trouvent alors sur le même plan horizontal AB.

On fait ensuite communiquer la partie supérieure du cylindre avec une masse d'eau contenue dans un vase métallique R; cette communication est établie au moyen d'un tube de plomb assez large pour que l'air qui se trouve au-dessus du mercure puisse se dégager. — On comprime de l'air dans le récipient R, jusqu'à ce que la pression exercée à la surface de l'eau, dont le niveau *n* peut être considéré comme constant, soit de 8 atmosphères.

La hauteur de la colonne d'eau, *h*, comptée à partir de AB, était de 1^m,68; quelle est, après l'expérience, la différence de niveau des surfaces du mercure dans l'appareil?

On prendra, pour densité du mercure, le nombre 13,5.

— Préparation et propriétés chimiques de l'ammoniaque.

Détermination de la densité théorique du gaz ammoniac, connaissant les densités de l'hydrogène et de l'azote:

Densité de l'hydrogène	0,0692
— de l'azote	0,972

Epure.

On propose de construire les projections des lignes d'intersection d'un hémisphère et des faces d'un cube avec un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Le cube (*abde a'b'd'e'*), dont le côté a 0^m,200 de longueur, dont la face inférieure et la face postérieure sont respectivement situées dans les deux plans de projection, contient entièrement l'hémisphère (*hh'*); cet hémisphère a pour base le cercle (*h',h*) inscrit dans la face antérieure du cube.

L'hyperboloïde a son axe (*s,s'*) vertical, à 0^m,135 du plan vertical de projection et à égale distance des faces de profil du cube; la cote du centre (*oo'*) de cette surface est de 0^m,132; les rayons de son collier (*c, c'*) et de sa trace horizontale (θ,θ') ont respectivement 0^m,035 et 0^m,100 de longueur.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le cube existe seul, qu'il est solide, et qu'on a enlevé la partie de ce corps comprise dans l'hémisphère et dans l'hyperboloïde. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions nécessaires pour obtenir un point quelconque de chacune des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

QUESTION 246

Solution par M. Gilly, à Montpellier.

Étant données deux coniques $C = 0$, $C' = 0$, ***trouver le lieu des points* M *tels que leurs polaires par rapport à ces coniques se coupent sur une courbe donnée*** $f(x, y) = 0$. ***Étudier les cas où 1°*** $f(x, y) = 0$ ***est une droite; 2°*** $f(x, y) = 0$ ***est un cercle.***

Prenons des coordonnées trilinéaires et soient

$\varphi(x, y, z) = 0$ l'équation de C

$\psi(x, y, z) = 0$ celle de C'

et α, β, γ un point du lieu. Ce lieu s'obtiendra en éliminant x, y, z entre les équations

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0 \quad (1)$$

$$x\psi'_\alpha + y\psi'_\beta + z\psi'_\gamma = 0 \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

Si f est de degré m, le lieu sera une courbe de degré $2m$: car les deux premières équations donnent pour $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ des fonctions du second degré en α, β, γ.

1° Si $f(x, y, z) = 0$ est une droite on doit éliminer x, y, z entre

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0$$

$$x\psi'_\alpha + y\psi'_\beta + z\psi'_\gamma = 0$$

$$Ax + By + Cz = 0$$

Le lieu demandé est la conique

$$F = \begin{vmatrix} \varphi'_\alpha & \varphi'_\beta & \varphi'_\gamma \\ \psi'_\alpha & \psi'_\beta & \psi'_\gamma \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

2° Si $f(x, y, z) = 0$ est un cercle, on peut toujours prendre son équation sous la forme

$$x^2 + y^2 = R^2z^2. \quad (4)$$

Or (1) et (2) donnent

$$\frac{x}{\varphi'_\gamma\psi'_\beta - \psi'_\gamma\varphi'_\beta} = \frac{y}{\varphi'_\alpha\psi'_\gamma - \psi'_\alpha\varphi'_\gamma} = \frac{z}{\varphi'_\beta\psi'_\alpha - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}.$$

Substituant dans (4) le lieu est alors la courbe du quatrième degré

$$\left(\varphi'_\gamma\psi'_\beta - \psi'_\gamma\varphi'_\beta\right)^2 + \left(\varphi'_\alpha\psi'_\gamma - \psi'_\alpha\varphi'_\gamma\right)^2 = R^2\left(\varphi'_\beta\psi'_\alpha - \psi'_\beta\varphi'_\alpha\right)^2 \quad (5)$$

Remarques. — 1° Lorsque $f(x, y, z) = 0$ est une droite $Ax + By + Cz = 0$, le lieu coïncide avec le jacobien des coniques $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $(Ax + By + Cz)^2 = 0$.

Le jacobien, qui est en général une courbe du troisième

ordre, se dédouble alors en une conique $F = 0$ et la droite $Ax + By + Cz = 0$. Cela est évident géométriquement. La conique $F = 0$ est d'ailleurs déterminée par cinq points connus *à priori*, savoir : les trois sommets du triangle autopolaire des coniques données φ et ψ, et les pôles de la droite donnée par rapport à ces coniques.

2° Lorsque $f(x, y, z) = 0$ est un cercle, la courbe (5) passe par les huit points d'intersection de la conique

$$\varphi'_\gamma \psi'_\beta - \psi'_\beta \varphi'_\gamma = 0$$

avec les deux coniques

$$R\left(\varphi'_\beta \psi'_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) + \varphi''_\alpha \psi_\gamma - \psi_\alpha \varphi'_\gamma = 0$$

$$R\left(\varphi_\beta \psi'_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) - \varphi'_\alpha \psi'_\beta + \psi'_\alpha \varphi'_\gamma = 0$$

et aussi par les huit points d'intersection de $\varphi'_\alpha \psi'_\gamma - \psi'_\alpha \varphi'_\gamma = 0$

$$\text{avec } R\left(\varphi'_\beta \psi'_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) + \varphi'_\gamma \psi'_\beta - \varphi'_\beta \psi'_\gamma = 0$$

$$\text{et } R\left(\varphi'_\beta \psi_\alpha - \psi'_\beta \varphi'_\alpha\right) - \varphi'_\gamma \psi'_\beta + \varphi'_\beta \psi'_\gamma = 0.$$

NOTA : M. Baron, du lycée Henri IV, a résolu la même question.

QUESTION 255

Solution par M. BONVALET, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Versailles.

Trouver la surface engendrée par une droite s'appuyant constamment sur OZ, *sur la droite* $z = 1$, $x = 1$ *et sur le cercle* $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$. *Étudier les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux plans de coordonnées et particulièrement par le plan* $z = h$. *Les sections obtenues dans ce dernier cas sont des conchoïdes de Nicomède; on propose de le démontrer géométriquement.*

Les équations des directrices rectilignes sont $x - 1 = 0$, $z - 1 = 0$ et $x = 0$, $y = 0$.

Les équations d'une droite s'appuyant sur ces droites sont $\lambda\ (z - 1) + x - 1 = 0$, $y = \mu x$, λ et μ étant deux paramètres arbitraires. Les coordonnées de la trace de cette

droite sur le plan xoy sont $z = 0$, $x = \lambda + 1$, $y = \mu(\lambda + 1)^2$ par suite, pour qu'elle rencontre le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, on doit avoir entre λ et μ la relation

$$(\lambda + 1)^2 + \mu^2 (\lambda + 1)^2 = R^2.$$

L'équation de la surface s'obtiendra en éliminant λ et μ entre l'équation précédente et les équations de la génératrice

$$\lambda (z - 1) + x - 1 = 0, \quad y = \mu x.$$

Ces équations déterminent λ et μ. En les portant dans la relation entre λ et μ, nous avons

$$(z - x)^2 (x^2 + y^2) = R^2 x^2 (z - 1)^2 :$$

telle est l'équation de la surface.

Cette surface est du quatrième degré. On voit immédiatement qu'elle passe par oz, par $x = 1$, $z = 1$ et que sa section par le plan $z = o$ est $x^2 + y^2 = R^2$.

Si nous coupons cette surface par des plans $z = h$, l'équation dans son plan de la courbe d'intersection est

$$(h - x)^2 (x^2 + y^2) = R^2 x^2 (h - 1)^2.$$

Si nous transformons cette équation en coordonnées polaires, nous avons

$$(h - \rho \cos \omega)^2 = R^2 (h - 1)^2 \cos^2 \omega$$

ou

$$\rho \cos \omega = h \pm R (h - 1) \cos \omega,$$

équation d'une conchoïde de Nicomède ayant l'origine pour pôle et pour directrice une droite perpendiculaire à ox au point dont l'abscisse est h et la quantité constante que l'on ajoute à chaque rayon vecteur étant $R(h - 1)$. $R(h - 1)$ est une quantité variable avec h. La conchoïde peut présenter les trois formes, puisqu'on peut déterminer h de façon que $R(h - 1) = h$, $R(h - 1) > h$, $R(h - 1) < h$.

Il est facile de voir géométriquement que la section est une conchoïde de Nicomède. En effet, soient OA (*fig. 1*) un rayon de la circonférence, AQ la génératrice correspondante de la surface et X, P, Y, le plan $z = h$, enfin M le point correspondant de la courbe ($OB' = \frac{1}{\cos \omega}$, $\omega = XOA$ $BC = 1$).

Si du point M on mène la parallèle ME à oz, les triangles MEC et CBA, semblables, donnent

$$\frac{ME}{EC} = \frac{CB}{BA}$$

ou $$\frac{h-1}{oB - PM} = \frac{1}{R - \frac{1}{\cos\omega}}$$

ou $$\frac{h-1}{1 - PM\cos\omega} = \frac{1}{R\cos\omega - 1}.$$

Si nous posons $\rho = PM$, cette relation devient

$$(R\cos\omega - 1)(h-1) - 1 = \rho\cos\omega$$

ou $$\rho\cos\omega = h - R(h-1)\cos\omega$$

qui est l'équation trouvée précédemment.

Étudions maintenant les sections par des plans parallèles au plan yoz.

Soit $x = h$ l'un de ces plans; l'équation de la surface dans son plan est

$$(z-h)^2(h^2+y^2) = R^2h^2(z-1)^2,$$

équation d'une courbe symétrique par rapport à Oy. Si nous résolvons cette équation par rapport à y, nous avons

$$y^2 = \frac{h^2[(R+1)z - R - h][(R-1)z - R + h]}{(z-h)^2}.$$

La droite $z = h$ est une asymptote double et les deux droites $y^2 = h^2(R^2-1)$ sont également asymptotes; ces dernières sont réelles si $R^2 > 1$. Soient alors z' et z'' les deux racines du numérateur, $z' < z''$ nous distinguerons plusieurs cas :

$$R^2 > 1,\ h < z' \text{ et } z' < h < z'' \text{ et } z'' < h.$$

La courbe dans le premier cas aura la forme représentée figure 2; dans le second cas la forme représentée par la figure 3. Dans le troisième cas, la courbe ne diffère comme forme de la figure 2 qu'en ce que la direction positive des z est changée Si $R^2 < 1$ les asymptotes $y^2 = h^2(R^2-1)$ sont imaginaires et y^2 n'est positif que pour les valeurs de z comprises entre z' et z''. On a ainsi les formes représentées par les figures 4 et 5.

Nous avons supposé $h \lesseqgtr z'$ et z''; pour qu'il soit égal à l'une de ces quantités, il faut que $h = 1$ et dans ce cas $z = 1$ et $y^2 = R^2 - 1$ sont les deux courbes en lesquelles se décompose la section. Il est évident d'après les données de la question que l'on doit trouver $z = 1$.

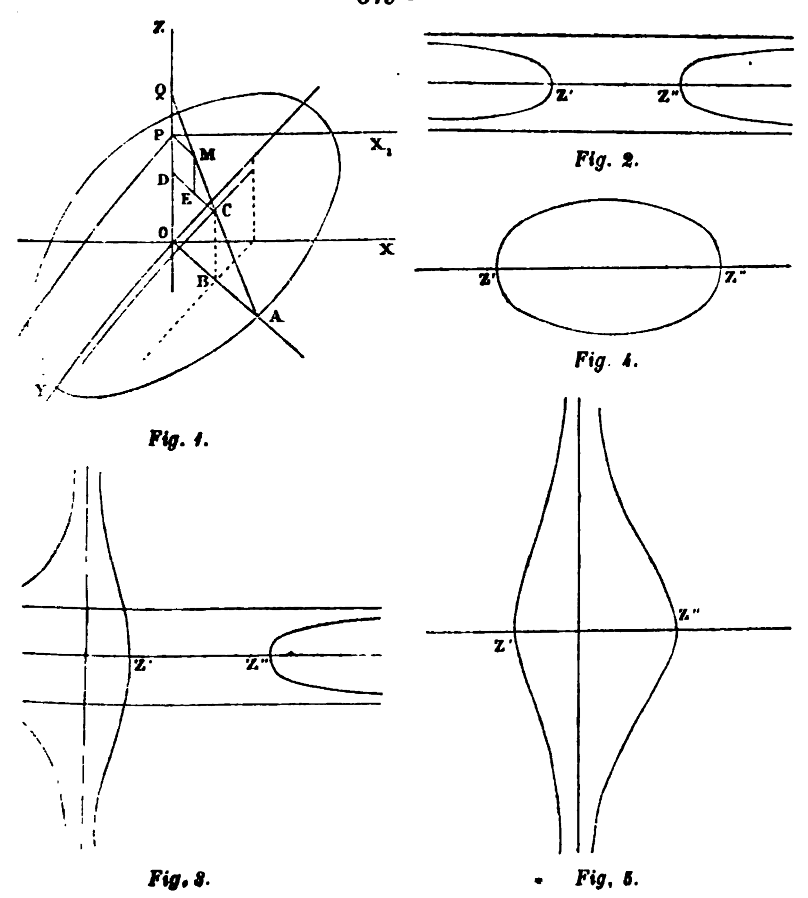


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 5.

Considérons maintenant les sections par des plans $y = h$. Nous aurons pour équation de la courbe

(A) $$(z - x)^2 (x^2 + h^2) = R^2 x^2 (z - 1)^2$$

courbe du quatrième degré présentant à l'origine un point double.

Les tangentes sont

$$h^2 (z - x)^2 = R^2 x^2$$

ou $$h^2 (z^2 - 2 h^2 zx + (h^2 - R^2) x^2 = 0;$$

d'où $$\frac{z}{x} = \frac{h \pm R}{h^2}$$

Ces tangentes sont toujours réelles et par suite l'origine est toujours un point double réel.

Les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à oz sont données par l'équation en λ

$$(1 - R^2)\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

D'où $\lambda' = \frac{1}{1 - R}$ et $\lambda'' = \frac{1}{1 + R}$.

Les ordonnées à l'origine sont

$$\frac{-\lambda' R^2}{(1 - R^2)\lambda' - 1} = -\frac{R}{(1 - R)^2}$$

et

$$\frac{-\lambda'' R^2}{(1 - R^2)\lambda'' - 1} = \frac{R}{(1 + R)^2}.$$

Si l'on ordonne l'équation (A) par rapport à z, on a

$$z^2[(1 - R^2)x^2 + h^2] - 2x(x^2 + h^2 - R^2x)z + x^2(x^2 - h^2 - R^2) = 0;$$

on voit alors que les asymptotes parallèles à oz sont

$$(1 - R^2)x^2 + h^2 = 0;$$

par suite, pour qu'elles soient réelles, il faut que $1 - R^2$ soit négatif.

Posons $z = x\lambda$, l'équation devient

$$[(\lambda - 1)^2 - R^2\lambda^2]x^2 + 2R^2\lambda x + h^2(\lambda - 1)^2 - R^2 = 0.$$

Pour que x soit réel il faut que

$$R^4\lambda^2 - [h^2(\lambda - 1)^2 - R^2][(\lambda - 1)^2 - R^2\lambda^2] > 0$$

$$(\lambda - 1)^2[h^2(R^2 - 1)\lambda^2 + 2h^2\lambda + R^2 - h^2] > 0;$$

on en déduit $\lambda = \frac{-h^2 \pm Rh\sqrt{h^2 - R^2 + 1}}{h^2(R^2 - 1)}$.

Si $R^2 - 1 < 0$ les racines sont réelles et si on les désigne par λ' et λ'', λ' étant plus petit que λ'', le trinôme en λ est positif. Si $\lambda' < \lambda < \lambda''$, la courbe est alors comprise entre les deux droites $z = \lambda' x$ et $z = \lambda'' x$.

Si $R^2 > 1$ et $h^2 - R^2 + 1 > 0$, les asymptotes parallèles à oz deviennent réelles et le trinôme en λ est positif pour les valeurs de λ comprises en dehors des racines. Si $h^2 - R^2 + 1 < 0$, les valeurs de λ sont imaginaires. $R^2 - 1$ est positif et le trinôme est positif pour toute valeur réelle de λ; par suite x est toujours réel.

Nota. — Cette question a été résolue par MM. Leffuber, à Rennes; Baron, au lycée Henri IV; Boulogne, à Lille.

QUESTION 262

Solution par M. Gilly, de Montpellier.

Résoudre et discuter dans les diverses hypothèses

$$x^n + y^n + z^n = a^n$$
$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = b^{2n}$$
$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} = c^{3n}.$$

Prenons pour inconnues auxiliaires $x^n = u$, $y^n = v$, $z^n = t$, et posons $a^n = p$, $b^{2n} = q^2$, $c^{3n} = r^3$.

Les équations deviennent

$$u + v + t = p \qquad (1)$$
$$u^2 + v^2 + t^2 = q^2 \qquad (2)$$
$$u^3 + v^3 + t^3 = r^3 \qquad (3)$$

Nous remarquerons d'abord qu'à chaque système de valeurs réelles de u, v, t correspondent n systèmes de valeurs pour x, y, z, dont un seul se compose de valeurs réelles si n est impair, et dont deux se composent de valeurs réelles si n est pair; car si u, v, t est une solution se composant de valeurs réelles, on a

$$x = u^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$y = v^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$z = t^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

où k doit recevoir les n valeurs $0, 1, 2 \ldots n - 1$.

Tout revient donc à compter les valeurs réelles de u, v, t.

Retranchons l'équation (2) du carré de (1), il vient

$$uv + vt + ut = \frac{p^2 - q^2}{2}. \qquad (4)$$

L'identité

$$3ABC = A^3 + B^3 + C^3 + (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - BC - AB - AC),$$

où l'on fait $A = u$, $B = v$, $C = t$, donne

$$3uvt = r^3 + \left(q^2 - \frac{p^2 - q^2}{2}\right)$$

ou
$$uvt = \frac{2r^3 + p(3q^2 - p^2)}{6}. \qquad (5)$$

Donc u, v, t sont racines de l'équation

$$X^3 - pX^2 + \frac{p^2 - q^2}{2} X - \frac{2v^3 + p(3q^2 - p^2)}{6} = 0.$$

Si l'on pose $X = Y + \frac{p}{3}$, cette équation devient

$$Y^3 + \frac{1}{6} Y(p^2 - 3q^2) + \frac{1}{27}(7p^3 - 18pq^2 - qr^3) = 0$$

et u, v, t, ne différant que de $\frac{p}{3}$ des racines de cette équation, seront réelles en même temps que ces dernières et réciproquement.

La condition de réalité des racines de la transformée en Y est

$$(p^2 - 3q^2)^3 + 2(7p^3 - 18pq^2 - qr^3)^2 < 0, \qquad (6)$$

condition qui s'obtient sans difficulté en fonction des données a, b, c.

Alors si la condition (6) n'est pas satisfaite, le système proposé n'admet pas de solutions réelles.

Si cette condition est vérifiée il y a une solution réelle pour x, y, z, lorsque n est impair, et deux solutions réelles lorsque n est pair.

Si enfin $(p^2 - 3q^2)^3 + 2(7p^3 - 18p^2 - qr^3)^2 = 0$, il y a une solution réelle pour x, y, z dans laquelle deux de ces inconnues sont égales.

Remarque. — Dans le cours de la discussion, nous avons supposé p, q, r réels, c'est-à-dire a, b, c réels et de plus a et c positifs, si n est pair, et positifs ou négatifs, si n est impair.

Nota : Ont résolu la même question : MM. Boulogne, à Lille ; Haure, lycée Louis-le-Grand, à Paris.

QUESTION 295

Solution par M. Quiquet, élève au Lycée de Lille.

Le pôle étant placé au centre de similitude du cercle $\rho^2 - 2a\rho \cos(\theta - \alpha) + a^2 = r^2$ *et du cercle de rayon* mr, *trouver l'équation de l'axe radical et celle du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés et dont le centre a pour angle polaire* β.

L'équation du premier cercle étant

$$\rho^2 - 2a\rho \cos(\theta - \alpha) + a^2 - r^2 = 0, \qquad (1)$$

celle du second est

$$\rho^2 - 2ma\rho \cos(\theta - \alpha) + m^2(a^2 - r^2) = 0, \qquad (2)$$

L'équation de l'axe radical de ces deux cercles s'obtiendra en retranchant (1) et (2), ce qui donne

$$\rho \cos(\theta - \alpha) = \frac{(a^2 - r^2(m + 1}{2a}. \qquad (3)$$

Le centre du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés est sur l'axe radical; ses coordonnées b et β doivent satisfaire à (3), ce qui donne

$$b = \frac{(r^2 - a^2)(m + 1)}{2a \cos(\beta - \alpha)}.$$

Le carré de la distance des deux points $(a\ \alpha)$, $(b\ \beta)$ a pour expression $\quad a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha)$.

Le rayon R du cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés est égal à la distance du point $(b\beta)$ au point de contact de la tangente, menée par $(b\beta)$ au cercle de rayon r; on a donc

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta - \alpha) - r^2$$

et par suite l'équation du cercle cherché qui est

$$\rho^2 - 2\rho b \cos(\theta - \beta) + b^2 - R^2 = 0$$

devient

$$\rho^2 - \rho \frac{(r^2 - a^2)(m + 1)}{a \cos(\beta - \alpha)} \cos(\theta - \beta) + (r^2 - a^2)(m + 2) = 0.$$

Nota. — M. Daguillon, du lycée Henri IV, a résolu la même question.

QUESTION 308

Solution par M. TRANIÉ, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée de Toulouse.

a *et* b *étant des quantités réelles, on considère la fonction*

$$y = (x - a)^m (x - b)^m.$$

On demande combien l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée m^{me} *de* y *a de racines réelles.*

La fonction y est de degré $2m$. Elle admet m fois la racine a et m fois la racine b. Elle a donc toutes les racines réelles. Il suit de là que la dérivée première de y et toutes les dérivées successives auront toutes leurs racines réelles.

La dérivée première y' est du degré $2m - 1$. Elle admet $m - 1$ fois la racine a et $m - 1$ fois la racine b. De plus, d'après le théorème de Rolle, elle admet une autre racine réelle comprise entre a et b. Soit α cette racine.

La dérivée seconde, de degré $m - 2$, admet $m - 2$ fois la racine a, $m - 2$ fois la racine b, et deux autres racines réelles comprises l'une entre a et α, l'autre entre α et b.

En raisonnant ainsi de proche en proche, on voit que la dérivée m^{me} du degré $2m - m = m$ n'admet pas pour racines les quantités a et b; mais elle a toutes les racines réelles et comprises entre a et b.

NOTA. — A résolu la même question, M. Dupuy, à Grenoble.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMP. CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 15720-1.

FORMULE

QUI DONNE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS (*)

Par M. **Ch. Pravaz**, professeur au collège d'Autun

Si l'on représente par S_m^p la somme des puissances p^{mes} des m premiers nombres entiers; par $m!$ le produit des m premiers nombres entiers (o! étant supposé égal à 1); par A_p^{p+2} le produit $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)(n-p+1)$; on a

$$S_n^p = A_n^{p+2}\sum_{m=1}^{m=p+1}\frac{S_m^p \times (-1)^{p+1-m}}{m!(p+1-m)!(n-m)}.$$

La somme S_n^p est une fonction de n, entière, de degré $p+1$ et ne renfermant pas de constante (**); posons donc

$$S_n^p = A_0 n^{p+1} + A_1 n^p + A_2 n^{p-1} + \ldots + A_p n. \quad (1)$$

Si dans cette égalité on donne successivement à n les valeurs $1, 2, 3, \ldots p, (p+1)$, on aura pour déterminer les $p+1$ coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_p$ les $p+1$ équations linéaires

$$\left.\begin{array}{l}
S_1^p = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_p \\
S_2^p = A_0 2^{p+1} + A_1 2^p + A_2 \,.\, 2^{p-1} + \ldots + A_p \,.\, 2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{p+1}^p = A_0(p+1)^{p+1} + A_1(p+1)^p \\
\qquad + A_2(p+1)^{p-1} + \ldots \times A_p\,(p+1)
\end{array}\right\}(2)$$

L'élimination des coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_p$ entre (1) et (2) donne

---

(*) Voir un mémoire de M. Puiseux sur le même sujet (Journal de Liouville, 1846.

(**) *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, tome IV, p. 94.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1} S_1^p & 1^p & 1^{p-1} & \dots 1^2 & 1^0 & 1 \\ \frac{1}{2} S_2^p & 2^p & 2^{p-1} & \dots 2^2 & 2^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{p+1} S_{p+1}^p & (p+1)^p & (p+1)^{p-1} & \dots (p+1)^2 & (p+1) & 1 \\ \frac{1}{n} S_n^p & n^p & n^{p-1} & n^2 & n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe ce déterminant en l'ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne et que l'on se rappelle que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ 1 & c & c^2 & \dots & c^{n-1} \\ \dots & & & & \dots \\ 1 & k & k^2 & \dots & k^{n-1} \\ 1 & l & l^2 & \dots & l^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a-b) \dots \\ (a-k)(a-l) \\ (b-c) \dots \\ (b-k)(b-l) \\ \dots\dots \\ (k-l), \end{matrix}$$

le coefficient de l'élément $\frac{1}{m} S_m^p$ (m étant l'un des nombres $1, 2, \dots p, p+1$) sera

$$\begin{matrix} (1-2)(1-3)\dots(1-m+1)(1-m-1)(1-m-2) \\ \dots(1-p)(1-p-1)(1-n) \\ (2-3)\dots(2-m+1)(2-m-1)(2-m-2)\dots \\ (2-p)(2-p-1)(2-n) \\ \dots\dots\dots \\ (m-2-m+1)(m-2-m-1)(m-2-m-2)\dots \\ (m-2-p)(m-2-p-1)(m-2-n) \\ (m-1-m-1)(m-1-m-2)\dots \\ (m-1-p)(m-1-p-1)(m-1-n) \\ (m+1-m-2)\dots \\ (m+1-p)(m+1-p-1)(m+1-n) \\ \dots\dots\dots \\ (p-1-p)(p-1-p-1)(p-1-n) \\ (p-p-1)(p-n) \\ (p+1-n) \end{matrix}$$

c'est-à-dire, abstraction faite du signe

$$\frac{p!}{m-1}\,\frac{(p-1)!}{m-2}\cdots\frac{(p-m+3)!}{2}\,\frac{(p-m+2)!}{1}$$

$$(p-m)!\,(p-m-1)!\ldots 2!\,1!$$

$$\times(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m-1)\ldots(n-p-1),$$

ou $$\frac{1!\,2!\,3!\ldots p!}{(m-1)!\,(p-m+1)!}\cdot\frac{A_n^{p+2}}{n(n-m)}.$$

Le coefficient de S_m^p est donc, abstraction faite du signe,

$$\frac{1!\,2!\,3!\ldots p!}{m!\,(p-m+1)!}\times\frac{A_n^{p+2}}{n(n-m)}.$$

On verrait de même que le coefficient de $\frac{1}{n}S_n^p$ est

$$1!\,2!\,3!\ldots p!$$

On a donc

$$S_n^p = A_n^{p+2}\left[\frac{S_{p+1}^p}{(p+1)!0!(n-p-1)} - \frac{S_p^p}{p!1!(n-p)} + \cdots \pm \frac{S_2^p}{2!(p-1)!(n-2)} \mp \frac{S_1^p}{1!\,p!\,(-1)}\right],$$

ou, sous une forme plus concise,

$$S_n^p = A_n^{p+2}\sum_{m=1}^{m=p+1}\frac{S_m^p\times(-1)^{p+1-m}}{m!\,(p+1-m)!\,(n-m)}.$$

Remarque. — La formule que nous venons d'établir se vérifie aisément *a posteriori*.

Il est évident, en effet, que le second membre est une fonction de n entière, de degré $p+1$ et ne renfermant pas de constante. Or, il est aisé de voir que les deux membres de la formule sont identiques pour $p+2$ valeurs de n, savoir $0, 1, 2, \ldots p+1$. D'abord, pour $n=0$, les deux nombres sont nuls. Puis, pour $n=m$, m étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, p+1$, tous les termes du second membre s'annulent, sauf le terme en S_m^p dont le coefficient est

$$(-1)^{p-m+1}\times\frac{m(m-1)\ldots2.1.(-1).(-2)\ldots[-(p-m+1)]}{m!\,(p-m+1)!}=1.$$

Les deux polynômes de degré $p + 1$ qui constituent les deux membres de la formule étant égaux pour $p + 2$ valeurs de la variable n, sont identiques.

NOTE D'ALGÈBRE

M. Burat-Dubois, professeur au lycée de Pau, nous a communiqué deux notes qu'il vient de publier, sur la fraction du second degré, et que nous devons signaler à nos lecteurs, à cause de l'importance des résultats que présentent ces notes.

Dans la première, M. Burat-Dubois fait remarquer, avec beaucoup de raison, que, après avoir donné une définition du maximum, on emploie une méthode qui laisse complètement de côté la définition; c'est la méthode désignée souvent sous le nom de *méthode indirecte.* Mais l'auteur, après avoir signalé cette première faute de raisonnement, montre que, en outre, la règle trouvée par cette méthode indirecte n'est pas identique à celle que donne l'étude directe de la variation des fonctions. Les exemples que donne M. Burat-Dubois mettent le fait en évidence; ils nous montrent en effet que la règle donnée par la méthode indirecte peut fournir des résultats en désaccord absolu avec l'étude mathématique de la variation de la fonction.

Le but de la première note était d'appeler l'attention sur cette question, et de provoquer, pour ainsi dire, une étude nouvelle de la fraction du second degré, l'une des questions les plus délicates du programme de mathématiques élémentaires. Cette étude, qu'il fallait entreprendre au point de vue du programme du baccalauréat et de l'École Saint-Cyr, fait précisément l'objet de la seconde note de M. Burat-Dubois.

Partant de la définition précise du maximum et du minimum, M. Burat-Dubois commence par insister sur ce fait, qu'un maximum ou un minimum ne peut correspondre qu'à une valeur finie de la variable, mais peut parfaitement

répondre à une valeur infinie de la fonction pour une valeur finie de la variable.

Ensuite, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

1. *Les fonctions* $ax + b$ *et* $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ *n'ont ni maximum ni minimum.*

2. *La fonction* $ax^2 + bx + c$ *a toujours un maximum* ou *un minimum si* a *est différent de zéro.*

3. *La fonction* $x + \frac{m}{x}$ *a toujours un minimum* et *un maximum si* m *est positif; elle n'a ni maximum ni minimum si* m *est nul ou négatif.*

Ces principes établis, M. Burat-Dubois, reprenant la fraction
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$
effectue la division, et obtient une expression de la forme
$$y = \frac{a}{a'}, - m \frac{x + n}{a'x^2 + b'x + c'};$$
par un changement de variable, il ramène cette fraction à la forme
$$\frac{z}{z^2 + pz + q},$$
ou encore en divisant par z, à la forme
$$\frac{1}{z + p + \frac{q}{z}};$$
c'est l'étude du dénominateur de cette fraction qui indique précisément s'il y a maximum ou minimum.

Les conclusions auxquelles arrive M. Burat-Dubois sont les suivantes:

Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que l'on ait $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0$;

Si cette quantité était nulle ou négative, il n'y aurait ni maximum ni minimum.

Après avoir reconnu l'existence d'un maximum et d'un minimum, il faut chercher quelle est la valeur de x qui correspond au maximum, quelle est celle qui correspond au

minimum. Appelons K la valeur de la quantité que nous venons de considérer ; si $ab' - ba'$ est positif, le maximum correspond à

$$x_1 = \frac{-(ac' - ca') - \sqrt{K}}{ab' - ba')},$$

et le minimum à

$$x_2 = \frac{-(ac' - ca') + \sqrt{K}}{(ab' - ba')};$$

c'est l'inverse qui aura lieu si $ab' - ba'$ est négatif.

Ce fait général établi, M. Burat-Dubois examine ce qui arrive lorsque certains coefficients sont nuls, et il reconnaît que ses conséquences peuvent se déduire du premier cas, en portant, dans la valeur de K les hypothèses qu'il fait sur les coefficients, en supposant toutefois que $ab' - ba'$ ne soit pas nul; si $ab' - ba'$ était nul, avec $ac' - ca'$ différent de zéro, il y aurait un maximum ou un minimum, mais jamais l'un et l'autre.

Enfin, l'auteur termine sa note en comparant l'étude qu'il vient de faire avec la méthode dite indirecte, et il montre que la seconde ne tient pas compte de toutes les hypothèses qu'il a considérées, et que certaines hypothèses peuvent exister dans la première méthode en même temps que d'autres hypothèses de la seconde, qui donnent des résultats différents des premiers.

Nous devons dire que déjà, dans une *Algèbre* parue depuis plusieurs années, M. Lauvernay a cherché à présenter la question d'une autre manière ; il a suivi une marche fort différente de celle que nous signalons aujourd'hui, et il est arrivé aux mêmes résultats; mais ensuite il a repris la méthode indirecte, et ce qui constitue, à notre avis, la supériorité de la note de M. Burat-Dubois, c'est que ce dernier s'est préoccupé de montrer que les deux méthodes ne sont pas équivalentes.

On peut maintenant se demander s'il y a une faute de raisonnement quelque part dans la méthode indirecte, ou bien à quoi tient ce désaccord entre les résultats donnés par les deux méthodes. Nous allons montrer que la méthode indi-

recte nous donne seulement une condition nécessaire pour qu'il y ait ou maximum ou minimum, ou bien maximum et minimum, mais que cette condition n'est pas suffisante.

Pour cela, reprenons la condition de maximum ou de minimum (Lauvernay, p. 281). Il faut que x soit l'une des racines de l'équation

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0.$$

Mais, comme l'indique l'auteur dont nous parlons, cette condition n'est pas suffisante.

D'autre part, si nous posons dans la méthode indirecte

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = y,$$

nous trouvons que les valeurs de x correspondant au maximum ou au minimum sont celles que l'on tire de l'équation précédente quand on y remplace y par l'une des racines de l'équation

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 - 2(bb' - 2ac' - 2ca')y + b^2 - 4ac = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons y par la fraction donnée, nous aurons une fonction de x qui devra s'annuler précisément pour les valeurs que nous venons d'indiquer. Or, en faisant cette transformation, nous arrivons à l'équation

$$\left.\begin{array}{l}(b'^2 - 4a'c')(ax^2 + bx + c)^2 \\ - 2(bb' - 2ac' - 2ca')(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') \\ + (b^2 - 4ac)(a'x^2 + b'x + c')^2\end{array}\right\} = 0$$

qui, tous calculs faits, revient à la suivante :

$$\left.\begin{array}{l}(ab' - ba')^2x^4 + 4(ab' - ba')(ac' - ca')x^3 \\ + [4(ac' - ca')^2 + 2(ab' - ba')(bc' - cb')]x^2 \\ + 4(ac' - ca')(bc' - cb')x + (bc' - cb')^2\end{array}\right\} = 0.$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$[(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb')]^2 = 0.$$

On retrouve ainsi la condition nécessaire, mais non suffisante, à laquelle doit satisfaire x, pour qu'il y ait maximum ou minimum ; on reconnaît donc bien que la méthode indirecte est défectueuse, ainsi que l'avait signalé M. Burat-Dubois dans sa première note.

Nous pourrons faire remarquer, pour ceux de nos lecteurs qui sont en mathématiques spéciales, que la fonction de x

que nous annulons n'est autre que le numérateur de la dérivée de la fraction du second degré; et ils verront ainsi que, en annulant cette fraction, nous avons bien une condition nécessaire, mais non suffisante pour que la fraction passe par un maximum ou un minimum.

A. M.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR (1881)

Résoudre l'équation

$$(\sin x - \cos x)\sin x = a;$$

trouver entre quelles limites doit varier a pour que le problème soit possible.

— Trois cercles dont les rayons sont R, R', R", sont tangents deux à deux extérieurement. Trouver les angles du triangle qui a pour sommets les centres de ces trois circonférences.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

en supposant $$A + B + C = 180°.$$

— Sur une droite AB comme diamètre, on décrit une circonférence, et on prolonge AB d'une longueur BC égale au rayon. Du point C, on mène une tangente CT, et on fait tourner la figure autour du diamètre AB. On demande la surface engendrée par CT. Dire *a priori* quelle est la valeur de l'angle C.

— Intersection, par la méthode des projections cotées, de deux plans dont les lignes de pente sont parallèles.

— On partage un diamètre AB en trois parties égales et on mène des perpendiculaires à AB; puis on fait tourner la figure autour du diamètre; trouver les aires des trois zones et les volumes des trois segments sphériques ainsi déterminés.

— Construire l'expression $x = \dfrac{2a}{1 + \sqrt{5}}$.

— Étant donnés deux points A et B sur le plan horizontal, et la projection horizontale d'un point de l'espace d'où l'on voit la droite AB sous un angle donné, trouver sa projection verticale.

— En un point O, situé à l'intérieur d'un triangle ABC on applique trois forces dont les grandeurs et les directions sont OA, OB, OC; on demande de trouver leur résultante et son expression en fonction de la distance du point O au point de rencontre G des médianes. Démontrer que la résultante passe par le point G.

— Un mobile de poids P est soumis à trois forces, l'une $\dfrac{P}{3}$ verticale dirigée de bas en haut; l'autre $\dfrac{P}{3}$ parallèle au plan incliné, et la troisième $\dfrac{P}{3}$ horizontale; le corps étant immobile, on demande l'inclinaison du plan.

— Un mobile du poids de 25 grammes est soumis à une force de 3 grammes pendant $\dfrac{1}{10}$ de seconde; on supprime la force qui agit, et on demande l'espace parcouru pendant 7 secondes de descente libre.

— On suppose qu'on ait trois points, et trois forces appliquées en ces points, et situées dans un même plan. Démontrer qu'il est possible de remplacer ces forces par deux autres, l'une passant par un point donné, l'autre ayant une direction donnée.

— $2p$ étant le périmètre d'un triangle et r le rayon du cercle inscrit, si l'on a $r = p - a$, le triangle est rectangle en A.

— On donne deux points A et B de l'espace, et un plan P. Lieu des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = K^2$.

— Décomposition du trinôme $x^4 + px^2 + q$ en facteurs réels du second degré.

— Résoudre les deux équations

$$xy + a(x + y) = p; \quad x^2 + y^2 + b(x + y) = q.$$

— Un point pesant est lancé avec une vitesse donnée dans une direction oblique; quelle est la ligne parcourue? On prend un point sur la courbe, et on demande la vitesse en ce point.

— On a une balance dont les deux bras sont inégaux; on pèse un poids P successivement dans l'un et l'autre des plateaux, et pour lui faire équilibre, il faut des poids dont la somme est A. On demande le rapport des bras de la balance. Connaissant le rapport des deux bras, pourra-t-on avec cette balance avoir exactement le poids d'un corps?

— Si, au milieu des côtés d'un triangle, on applique des forces perpendiculaires et proportionnelles aux côtés, elles se font équilibre. Si au lieu d'un triangle on a un polygone, l'équilibre subsiste-t-il?

— Résoudre le système

$$\begin{aligned} x + 2(y + z) &= c \\ y + 2(z + x) &= b \\ z + 2(x + y) &= a \end{aligned}$$

— Peut-on éliminer les côtés et trouver une relation entre les angles en partant des équations de la forme

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

— Faire la somme des fractions suivantes:

$$\frac{a}{b} + \frac{a + r}{bq} + \frac{a + 2r}{bq^2} + \ldots\ldots + \frac{a + nr}{bq^n}.$$

— Démontrer que $N^3 - N$ est toujours divisible par 6, si N est un nombre entier.

— Résoudre les équations

$$x - y = a; \quad \sin^2 x - \sin^2 y = b.$$

— Sachant que $A + B + C = 180°$, rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

— On donne la base et la hauteur d'un triangle, ainsi que la différence des angles à la base; calculer les autres éléments.

— Soit a le chiffre des unités, b le chiffre des dizaines, c le chiffre des centaines, d le chiffre des mille d'un nombre, etc. Démontrer que le nombre sera divisible par 4 si $a + 2b$ est divisible par 4; le nombre sera divisible par 8 si $a + 2b + 4c$ est divisible par 8; il sera divisible par 16 si $a + 2b + 4c + 8d$ est divisible par 16, etc. Généraliser la règle à trouver.

QUESTIONS D'EXAMEN

Démontrer que, pour diviser un polynôme A *par le produit* BCD *de divers polynômes, il suffit de diviser* A *par* B, *le quotient par* C, *et le nouveau quotient par* D, *même lorsque les divisions successives donnent des restes.*

Pour démontrer ce théorème, je rappellerai que, si entre quatre polynômes entiers M, N, P, R, j'ai l'identité

$$M = NP + R$$

et si, en outre, le degré de R est inférieur à celui de N, cela m'apprend que, en divisant M par N, j'obtiendrai pour quotient P et pour reste R.

Cela posé, j'effectue les divisions comme l'indique l'énoncé; j'ai en appelant Q, Q′, Q″ les quotients successifs

$$A = BQ + R,$$
$$Q = CQ' + R',$$
$$Q' = DQ'' + R'';$$

je dis que, si je divisais directement A par le produit BCD, j'aurais Q″ pour quotient; en effet, en remplaçant dans la première identité successivement Q et Q′ par leur valeur, j'ai

$$A = BCD.Q'' + (BCR'' + BR' + R).$$

Il suffit donc de démontrer que le degré de la quantité entre parenthèses est moindre que le degré de BCD. Soient p, p', p'', les degrés respectifs des facteurs B, C, D; alors, BCD est du degré $p + p' + p''$. (Je suppose implicitement que les polynômes considérés sont entiers, et par suite que leurs degrés sont positifs.) Le degré de R″ est au plus égal à $p'' - 1$; celui de R′ est au plus égal à $p' - 1$, et celui de R est au plus $p - 1$; donc les trois termes qui composent la somme entre parenthèses ont respectivement des degrés inférieurs à $p + p' + p''$. La quantité entre parenthèses est donc d'un degré inférieur à celui de BCD. Donc, si je divise le polynôme A par BCD, j'aurai bien comme quotient Q″, c'est-à-dire le même quotient que m'avait donné la suite des divisions partielles par les divers facteurs B, C, D.

— *Démontrer que, pour extraire la racine* mnp *d'un nombre* A *à une unité près, il suffit d'extraire la racine* m *de* A *à une unité près, la racine* n *du résultat, et ainsi de suite.*

Je vais démontrer ce théorème d'abord pour le cas où l'indice est un produit de deux ou de trois facteurs, et démontrer ensuite que si la proposition est supposée vraie pour le cas de h facteurs, elle est vraie aussi pour $h + 1$ facteurs.

D'abord, je me propose d'extraire la racine np de A; je prends la racine n de A à une unité près; soit a cette racine; puis je prends la racine p de a à une unité près; soit a_1 cette racine; je dis que a_1 est la racine np de A à une unité près; en effet, j'ai, par définition,

$$a^n \leq A < (a + 1)^n$$
$$a_1^p \leq a < (a_1 + 1)^p$$

En considérant d'abord les premiers et les seconds membres

j'aurai $$a_1^{np} \leq a^n$$

et par suite $$a_1^{np} \leq A.$$

D'autre part a et $(a_1 + 1)^p$ étant des nombres entiers, j'ai

$$a + 1 \leq (a_1 + 1)^p.$$

Donc $$(a + 1)^n \leq (a_1 + 1)^{np}.$$

Donc j'ai bien

$$a_1^{np} \leq A \leq (a_1 + 1)^{np}.$$

En second lieu, si j'appelle a_2 la racine q à une unité près de a_1, j'ai

$$a_2^q \leq a_1 \leq (a_2 + 1)^q.$$

D'après cela, je vois immédiatement que j'ai

$$a_2^{npq} \leq A,$$

et comme $$a_1 + 1 \leq (a_2 + 1)^q,$$

il résulte de ce qui précède que

$$(a_1 + 1)^{np} \leq (a_2 + 1)^{npq}.$$

Donc j'ai bien

$$a_2^{npq} \leq A < (a_2 + 1)^{npq}.$$

En suivant le même raisonnement, je verrai que si j'ai, en appliquant la méthode précédente,

$$a_h^{np\cdots q} \leq A < (a_h + 1)^{np\cdots q}$$

en appelant α la racine r de ce nombre à une unité près
comme j'aurai $\alpha \leq a_h < (\alpha + 1)^r$
et que, d'autre part, j'ai

$$a_h + 1 \leq (\alpha + 1)^r,$$

j'aurai $\alpha^{np\ldots qr} \leq A < (\alpha + 1)^{np\ldots qr}$.

Donc, j'aurai bien extrait, à une unité près, la racine d'ordre $(np\ldots qr)$ du nombre A.

Le théorème est donc démontré.

— *Soient* a, b, a′, b′ *quatre nombres entiers ; soit* p *un nombre premier avec chacun d'eux ; si* p *divise* ab′ — ba′ *et* a — a′ *il divise* b — b′.

En effet, p, divisant $a - a'$, divisera $b(a - a')$. Donc il divisera $ab' - ba' - b(a - a') = a(b' - b)$.

Mais, par hypothèse, p est premier avec a ; donc il divisera $(b' - b)$ et par suite $(b - b')$.

— *Étant données deux fractions* $\frac{a}{a'}$ *et* $\frac{b}{b'}$, *si l'on a*

$$ab' - ba' = -1,$$

la fraction la plus simple comprise entre $\frac{a}{a'}$ *et* $\frac{b}{b'}$ *sera*

$$\frac{a + b}{a' + b'}.$$

En effet, soit $\frac{p}{p'}$ une fraction telle que l'on ait

$$\frac{a}{a'} < \frac{p}{p'} < \frac{b}{b'}.$$

La fraction $\frac{p}{p'}$ peut être inférieure ou supérieure à la fraction $\frac{a + b}{a' + b'}$. Je dis que, dans tous les cas, on a

$$p > a + b; \quad p' > a' + b'.$$

Premier cas. — On a $\frac{p}{p'} < \frac{a + b}{a' + b'}$.

On en tire $\frac{a}{a'} < \frac{p}{p'} < \frac{a + b}{a' + b'}$,

d'où $$\frac{p}{p'} - \frac{a}{a'} < \frac{a+b}{a'+b'} - \frac{a}{a'}.$$

On en tire, en réduisant au même dénominateur, et tenant compte de la relation donnée dans l'hypothèse

$$\frac{a'p - ap'}{p'} < \frac{1}{a'+b'}.$$

Or $pa' - ap'$ est un nombre entier, au moins égal à l'unité;

donc on aura, *à fortiori*, $\frac{1}{p'} < \frac{1}{a'+b'}$

ou $$p' > a' + b'.$$

On en déduit, en remplaçant p' par une quantité plus petite,

$$\frac{a}{a'} < \frac{p}{a'+b'},$$

ou $$aa' + b'a < pa'.$$

Mais $$b'a = b'a - 1;$$

donc $$a'(a+b) < pa' + 1$$

et enfin $$a + b < p + \frac{1}{a'}.$$

Mais $a + b$ et p sont entiers; donc on aura bien

$$p > a + b.$$

Deuxième cas. — Si l'on a

$$\frac{a+b}{a'+b'} < \frac{p}{p'} < \frac{b}{b'},$$

on aura

$$\frac{b}{b'} - \frac{a+b}{a'+b'} > \frac{b}{b'} - \frac{p}{p'};$$

et, comme précédemment,

$$\frac{1}{a'+b'} > \frac{bp' - pb'}{p'} > \frac{1}{p'}.$$

Donc $$a' + b' < p';$$

puis on aura

$$\frac{a+b}{a'+b'} < \frac{p}{p'} < \frac{p}{a'+b'}.$$

D'où l'on tire $$a + b < p.$$

— *Trouver le produit de tous les diviseurs d'un nombre donné* N.

Nous savons que si l'on a

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma},$$

le nombre de ses diviseurs est égal à

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

De plus, à tout diviseur moindre que $\sqrt{N}$, correspond un diviseur plus grand, et leur produit est égal à N. Donc le produit cherché est égal à

$$\sqrt{N^{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}}.$$

Ce nombre est entier, puisque si N n'est pas un carré parfait, l'un au moins des facteurs $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, $(\gamma+1)$ est pair.

Si $N = A^2$, on sait que le nombre des diviseurs est impair mais alors on peut écrire, pour le produit,

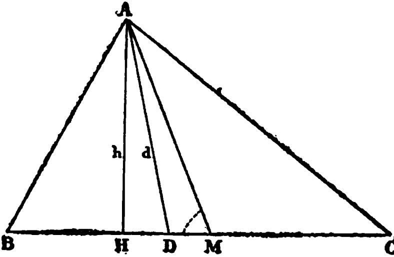
$$A^{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$$

qui est encore un nombre entier, et qui rentre dans la formule précédente.

QUESTION 301

Solution par M. Debray, à Chauvency-Saint-Hubert.

Construire un triangle connaissant un angle A, *la bissectrice* d *et la médiane* m *partant du sommet de cet angle.*



Soient ABC le triangle cherché, AH la hauteur, AD la bissectrice, AM la médiane partant du sommet de l'angle A.

On a

$$\sin M = \frac{h}{m} (1); \quad \cos\frac{\beta}{2} = \frac{h}{d} (2); \ \beta = B - C;$$

$$\cos A = \frac{\cos (M + \beta)}{\cos M} = \cos \beta - \sin \beta \operatorname{tg} M;$$

d'où $\operatorname{tg} M = \dfrac{\cos\beta - \cos A}{\sin\beta}$; (3)

divisant membre à membre les égalités (1) et (2)

$$\frac{m \sin M}{d} = \cos\frac{\beta}{2}. \quad (4)$$

Les égalités (3) et (4) résolvent le problème. Ce sont deux équations à deux inconnues qu'il suffit de résoudre.

L'angle M étant déterminé, la hauteur est connue et le problème s'achève facilement.

Il suffit de mener la bissectrice de l'angle BAC, puis du point A avec h pour rayon de décrire une circonférence à laquelle on mènera du point D une tangente qui sera le troisième côté du triangle.

Le problème a deux solutions quand on peut mener deux tangentes à la circonférence ; c'est le cas ordinaire.

Si $h = m$, c'est-à-dire quand le triangle demandé est isoscèle, le problème n'a qu'une solution.

Si $h > o$, le point D est à l'intérieur de la circonférence et le problème n'a plus de solution.

Nota. — Ont résolu la même question :
MM. Delpit, école préparatoire Sainte-Barbe ; Henry, à Bréchincourt ; Blessel, à Paris ; H. Bourget, à Aix.

QUESTION 325

Solution par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Résoudre l'équation $\sqrt[n]{\dfrac{a+x}{a}} + \sqrt[n]{\dfrac{a+x}{x}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{b}}.$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{\sqrt[n]{bx(a+x)}}{\sqrt[n]{abx}} + \frac{\sqrt[n]{ax(a+x)}}{\sqrt{abx}} = \frac{\sqrt[n]{ax^2}}{\sqrt[n]{abx}};$$

d'où $$\sqrt[n]{bx(a+x)} + \sqrt[n]{ax(a+x)} = \sqrt[n]{ax^2}$$

et $$\sqrt[n]{x(a+x)}[\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{a}] = \sqrt[n]{ax^2}.$$

Élevant à la puissance n, supprimant la solution $x = o$,

on a $$(a+x)(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a})^n = ax,$$

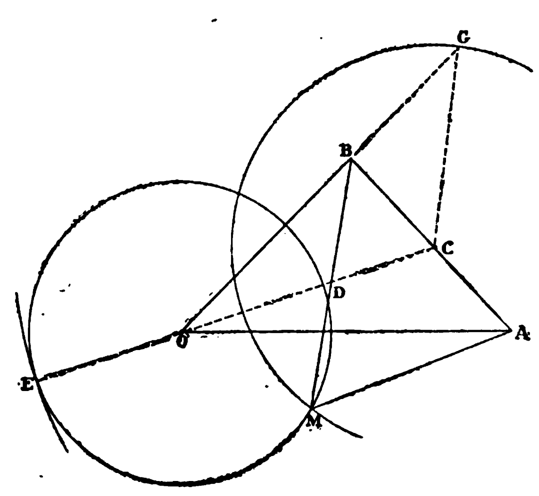
d'où $$x = \frac{a(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a})^n}{a-(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{a})^n}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Bonieux, de Riom.

QUESTION 326

Solution par M. RIVARD, élève au Lycée du Mans.

Étant donné un cercle O *et deux points extérieurs* A *et* B *donnés par les quantités* OA = a, OB = b, AB = d, *trouver sur la circonférence un point* M *tel que la somme des carrés des distances* MA *et* MB *soit égale à une quantité donnée. Discuter le problème. Construire géométriquement le point* M *lorsqu'il existe.*



On sait que le lieu des points M tels que l'on ait $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = K^2$ est une circonférence ayant pour rayon

$$\sqrt{\frac{2K^2 - d^2}{4}}$$

Les points communs à cette circonférence et à la circonférence donnée répondent à la question.

Soit $\sqrt{\frac{2K^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = m$ et C le milieu de AB. Menons CO. Cette ligne coupe la circonférence en deux points D et E.

Si l'on a $m >$ CE, pas de solution.

Pour $m =$ CE, une seule solution, le point M vient en E.

Si CE $> m >$ CD, deux solutions.

Pour $m =$ CD une solution.

Pour $m <$ CD pas de solution.

Construction. — m est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit $\frac{BC}{2}$ et $K\sqrt{2}$. Cette construction est indiquée sur la figure.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Dupuy, de Grenoble; Fiéret, de Lille; Joly, de Tarbes; Provost, du Mans.

QUESTION 327

Solution par M. TINEL, élève au lycée Corneille (Rouen).

On donne un cercle C, *une corde* AB *de ce cercle et sur* AB *un point* P. *Mener par le point* P *une corde* XPY *telle que si on abaisse* XX′ *et* YY′ *perpendiculaires sur* AB, *on ait* XX′ — YY = D. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Soient I le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur XY; CP $= d$, PX′ $= x$, PY′ $= y$, XPX′ $= \alpha$, CPX′ $= \omega$.

On connaît d, D et ω; calculons α. Les triangles XPX′, YPY′ donnent d'abord

$$\operatorname{tg}\alpha(x - y) = D; \qquad (1)$$

on a ensuite, d'après une propriété des sécantes,

$$\frac{xy}{\cos^2\alpha} = R^2 - d^2; \qquad (2)$$

enfin le triangle rectangle XCI donne

$$R^2 - \frac{(x+y)^2}{4\cos^2\alpha} = d^2\sin^2(\omega - \alpha). \qquad (3)$$

Remplaçons dans (1) élevée au carré, et (3), $\frac{xy}{\cos^2 \alpha}$ par sa valeur (2), nous obtiendrons les deux équations

$$\text{Sin}^2 \alpha \left(\frac{x^2 + y}{\cos^2\alpha} - 2R^2 + 2d^2\right) = D^2$$

$$2R^2 = 2d^2 - \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \alpha} = 4d^2 \sin(\omega - \alpha).$$

La seconde de ces équations donne la valeur de $\frac{x^2 + y^2}{\cos^2\alpha}$; portant cette valeur dans la première équation et simplifiant, on a

$$d \sin(2\alpha - \omega) = D - d \sin \omega,$$

équation qui fait connaître $2\alpha - \omega$ et par suite α.

Pour que le problème soit possible il faut que

$$\frac{D - d \sin \omega}{d} \geqq 1$$

ou

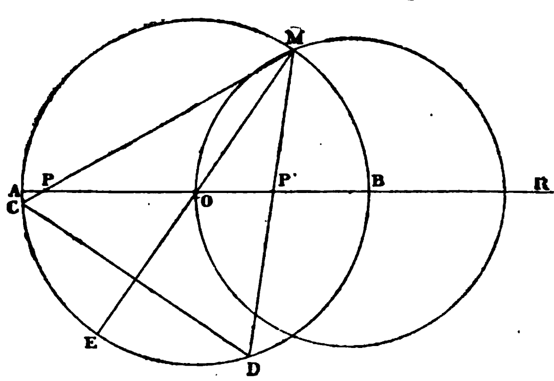
$$D \geqq 2d \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Joly, de Tarbes; Vitte, au lycée Henri IV; Henri, à Bréchincourt, et par M. Van Aubel, de Liège, qui nous en a envoyé une solution géométrique très simple.

QUESTION 328

Solution par M. E. VAN AUBEL, élève à l'Athénée de Liège.

On donne un cercle, un diamètre et deux points P *et* P′ *sur ce*



diamètre, de part et d'autre du centre et à des distances inégales

de ce centre. Mener par P *et* P′ *deux cordes égales qui se coupent sur la circonférence.* (Lieber)

Soient MC, MD les deux droites qui répondent à la question. Le triangle MCD étant isoscèle, on a : arc MAC = arc MBD ou arc CE = arc ED ; ME est donc bissectrice de l'angle CMD. Par suite le triangle MPP′ donne

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{OP}{OP'}.$$

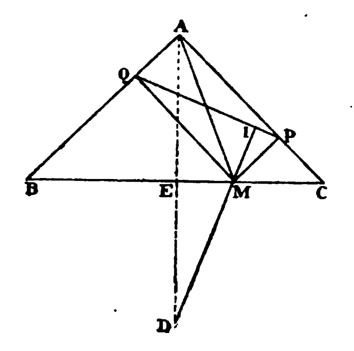
Donc le point M se trouve à l'intersection de la circonférence O et de celle qui a pour diamètre la droite OR, R étant le conjugué harmonique de O par rapport à PP′.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, de Grenoble; Tinel, de Rouen; Baudoin, de Beauvais; Vitte, du lycée Henri IV; Leclair, à Passy.

QUESTION 336

Solution par M. JOLY, élève du Lycée de Tarbes.

Étant donné un triangle rectangle isoscèle ABC, *d'un point* M *pris sur l'hypoténuse* BC, *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ *sur les côtés* AC, AB. *On joint* PQ *et du point* M *on abaisse une perpendiculaire sur* PQ. *Démontrer que cette perpendiculaire passe par un point fixe.*



Joignons AM. La perpendiculaire IM sur PQ rencontre la hauteur AE du triangle ABC en un point D. Les triangles AEM, MED sont égaux : car AME = EMD = IMC. On a IMP = QPA = QMA. Il en résulte AE = ED. Le point D est donc fixe.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Rivard, au Mans; Vitte, Lapareillé, Lefèvre d'Hellencourt, au lycée Henri IV; Montérou, au lycée Louis-le-Grand; H. Bourget, à Aix; Forceville, à Saint-Omer; Tinel, à Rouen; Fiévet, à Lille; Simonet, à Neufchâteau (Vosges); Baudoin, à Beauvais; Leclair, à Passy; Barthe, à Tarbes; Prost à Lons-le-Saunier; Moreau, à Châteauroux.

QUESTION 337

Solution par M. A. JOLY, élève du Lycée de Tarbes (Classe de M. Escary).

Dans un triangle on appelle p *le demi-périmètre,* r *le rayon du cercle inscrit ;* r', r'', r''' *les rayons des cercles ex-inscrits. Démontrer que l'on a*

1° $$p^2 \geqq 27r^2 ;$$

2° $$2p = 3\sqrt{\frac{r'r''r'''}{r}} - \sqrt{\frac{rr''r'''}{r'}} - \sqrt{\frac{rr'r'''}{r''}} - \sqrt{\frac{rr'r''}{r'''}}.$$

PREMIÈRE SOLUTION

On a $$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

La question revient alors à vérifier l'inégalité
$$p^3 > 27(p-a)(p-b)(p-c)$$
que l'on peut écrire
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > (a+b-c)(b+c+a)(a+c-b).$$

Or la moyenne géométrique de plusieurs nombres est inférieure à leur moyenne arithmétique, on a
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > abc$$
et l'on sait que si a, b, c sont positifs et inégaux,
$$abc > (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

L'inégalité proposée est donc satisfaite.

Si $a = b = c$, cette inégalité devient une égalité.

DEUXIÈME SOLUTION

On sait que dans tout triangle équilatéral
$$p^2 = 27r^2.$$

Or le triangle équilatéral est de tous les triangles de même périmètre celui qui a le plus grand cercle inscrit. quand ce triangle deviendra scalène on aura donc
$$p^2 > 27r^2.$$

On a

$$S = \underset{(1)}{\sqrt{rr'r''r'''}} = \underset{(2)}{pr} = \underset{(3)}{(p-a)r'} = \underset{(4)}{(p-b)r''} = \underset{(5)}{(p-c)r'''}.$$

En combinant (1) avec les expressions qui suivent on tire :

$$3\sqrt{\frac{r'r''r'''}{r}} = 3p; \quad \sqrt{\frac{rr''r'''}{r'}} = p-a.$$

$$\sqrt{\frac{rr'r'''}{r''}} = (p-b); \quad \sqrt{\frac{rr'r''}{r'''}} = p-c;$$

d'où, retranchant les trois dernières égalités obtenues de la première, et simplifiant :

$$3\sqrt{\frac{r'r''r'''}{r}} - \sqrt{\frac{rr''r'''}{r'}} - \sqrt{\frac{rr'r'''}{r''}} - \sqrt{\frac{rr'r''}{r'''}} = 2p.$$

NOTA.— Ont résolu la même question : MM. Rivard, au Mans; Lapareillé, Noir lycée Henri IV; Baudoin, à Beauvais; H. Bourget, à Aix; Prost, à Lons-le-Saunier; Leglos, à Avignon; Moreau à Châteauroux; Fiévet, à Lille.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BESANÇON

On donne une pyramide SABCD, à base carrée, dont la hauteur et la demi-diagonale sont h et a. Du sommet A, on abaisse une perpendiculaire AK sur l'arête opposée SC ; et par cette perpendiculaire on mène un plan perpendiculaire à SC; ce point détermine dans la pyramide une section AFKG. On demande le volume ABCDFGK. Application : $h = 4$; $a = 1$.

— On donne un quadrilatère ABCD dont l'angle B est droit; les côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement égaux à 28, 32, 17 et 7; trouver l'angle d s diagonales.

— On donne un plan, et un point non situé dans le plan; on demande de fai tourner le point autour d'un axe vertical de façon à l'amener dans le plan.

— Résoudre un triangle connaissant un côté, un angle adjacent et le rayon du cercle inscrit.

— Étant donné un cercle de rayon OA = R, on fait un angle OAP = α, un autre angle OAM = β. Trouver la surface mixtiligne APM.

CAEN

Les distances d'un point M à la hauteur AH et à la base BC d'un triangle ABC sont x et y; on connait AH = h; HB = b; HC = c;

On demande de calculer en fonction de x et de y la somme des carrés des dis-

tances du point H aux trois sommets du triangle, et de trouver quelles valeurs on doit donner à x et à y pour que cette somme soit minima.

— On a emprunté une somme de 100000 francs, que l'on rembourse par annuités de 6000 francs; le taux étant 5 o/o on demande au bout de combien d'années la dette sera amortie.

DIVERS

Deux triangles MAB, NAB, ont pour base commune AB; on a en outre

$$MA = MB = NA = AB,$$
$$2NB = AB,$$

et l'angle dièdre MABN que forment leurs plans est de 45 degrés. Construire l'angle MAN, et la distance MN. *(Dijon.)*

— Étant donnée une droite AB de longueur a, la partager par un point C en deux parties telles que si sur chacune d'elles on construit un triangle équilatéral, la somme des aires de ces triangles soit minima. *(Toulouse.)*

— Inscrire un rectangle dans un triangle de base et de hauteur données, de telle manière que le volume engendré par le rectangle tournant autour de la base du triangle soit maximum. *(Toulouse.)*

— On donne une circonférence de rayon 1; calculer le côté du polygone de vingt-quatre côtés inscrit dans cette circonférence. *(Toulouse.)*

— Résoudre $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$. *(Toulouse.)*

— Maximum et minimum de $\frac{R}{x} + \frac{r}{d - x}$. *(Rennes.)*

— Calculer la hauteur, le rayon du cercle de la base et l'angle au sommet d'un cône, sachant: 1° que le volume est de 1 litre; 2° que la surface convexe est à la surface de base comme le côté du triangle équilatéral est au rayon du cercle circonscrit à ce triangle. *(Montpellier.)*

— Maximum et minimum de $\frac{x^2}{1 + x^2}$, et de $\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$

(Montpellier.)

— On fait tendre x vers l'unité et l'on demande la valeur limite de l'expression

$$\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}.$$

(Nancy.)

— Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la différence m des deux autres côtés. Condition de possibilité des triangles. Dans le cas particulier où $m = \frac{7}{13} a$, calculer les angles du triangle et le rayon du cercle inscrit. *(Montpellier.)*

— Étant donnés les quatre côtés d'un trapèze, calculer les diagonales et la surface. *(Nancy.)*

— Déterminer entre quelles limites peut varier la fonction $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$.

(Poitiers.)

— Si par un point extérieur à une sphère on mène trois sécantes, démontrer que le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la sphère est constant. La réciproque est-elle vraie? *(Poitiers.)*

— Condition d'équilibre de la vis, déduite du principe de l'égalité du travail moteur et du travail résistant. *(Marseille.)*

— Envelopper un cercle O dans une couronne de n cercles extérieurs égaux entre eux, tangents entre eux et au cercle donné. Calculer les rayons des cercles extérieurs au moyen du rayon R du cercle donné et du côté a du polygone de n côtés inscrit dans ce cercle. Considérer le cas où il y aura six cercles extérieurs. *(Marseille.)*

— Démontrer que si une circonférence roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double, un point quelconque de la circonférence mobile décrit un diamètre de la circonférence fixe. *(Marseille.)*

— Pour mesurer la distance d'un point A à un point inaccessible F, on prend sur une perpendiculaire AB à AF une longueur $AB = c$; puis on fait en A, avec AB, un angle $BAC = \alpha$; on mesure la longueur $AC = b$ dont l'extrémité C est à la rencontre de BF et de AC; calculer AF. *(Grenoble.)*

— Dans la fraction $\dfrac{5x^2 + 16x - 4}{x^2 + 4}$, on suppose que x prenne toutes les valeurs réelles positives ou négatives et on demande de déterminer : 1° le maximum et le minimum de cette fraction, et les valeurs correspondantes de x; 2° les valeurs de x pour lesquelles la fraction est négative. *(Grenoble.)*

— Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer la ligne, parallèle aux bases, qui partage la surface du trapèze en deux parties dans un rapport donné. *(Grenoble.)*

— On donne deux rectangles de même périmètre; les côtés de l'un sont 8 et 4; la surface du second est la moitié de la surface du premier; calculer ses côtés. *(Clermont.)*

— Trouver trois nombres en progression géométrique, tels que leur somme soit égale à a, et la somme de leurs carrés à b. Appliquer à $a = 19$; $b = 133$. *(Clermont.)*

— Sachant que $\cos a = \dfrac{1}{5}$, calculer $\sin \dfrac{a}{2}$, $\cos \dfrac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2}$. *(Clermont.)*

— Maximum de $\sin x + \sin y$, sachant que $x + y = a$. *(Clermont.)*

— Sur le prolongement du diamètre d'une circonférence de rayon R, on prend de part et d'autre de la circonférence deux points A et B, tels que $AB = d$, et on mène les tangentes AA', BB'; que doivent être les distances AO et BO pour que l'arc A'B', en tournant autour de AB, engendre une zone de surface donnée? *(Rennes.)*

— Dans un triangle rectangle ABC on donne l'hypoténuse $BC = a$, et l'angle B. Par un point D, pris sur le prolongement de BC, on mène à cette ligne une perpendiculaire DX autour de laquelle on fait tourner le triangle; on demande de déterminer le point D par la condition que le volume engendré soit double de celui qu'engendrerait le même triangle en tournant autour de CK perpendiculaire à BC menée par le point C. *(Grenoble.)*

RECHERCHES SUR UNE FAMILLE DE CONIQUES

Par M. L. Ibach, étudiant à la Faculté des sciences de Marseille.

I. — *Le lieu géométrique des points tels que leurs polaires par rapport à deux coniques* U, V *se coupent sous un angle donné* α *est une conique.*

En effet, xyz étant les coordonnées d'un point du lieu, les polaires ont pour équation

$$xU'_x + yU'_y + zU'_z = o, \quad xV'_x + yV'_y + zV'_z = o.$$

Exprimant que ces droites se coupent sous l'angle α, on trouve

$$U'_x V'_y - V'_x U'_y + \text{tang } \alpha . [U'_x V'_x + U'_y V'_y] = o,$$

qui est une conique que je désigne par P_α de U et V. On peut l'écrire :

$$P_\alpha = P_0 + \text{tang } \alpha . P_{\frac{\pi}{2}} = o.... \quad (1)$$

Il serait bon de remarquer ici que le lieu se compose en réalité de deux coniques, tang α pouvant être précédée du double signe. Cependant lorsque α varie, l'équation (1) représente une famille de coniques dont nous allons étudier quelques propriétés.

II. — *Les coniques* P_α *de deux coniques* U, V, *sont circonscrites à un même quadrilatère.*

Cela résulte immédiatement de l'équation (1) qui montre de plus que ce quadrilatère est formé par les points communs à P_α et $P_{\frac{\pi}{2}}$. On pourrait donc établir de nouveaux théorèmes en appliquant aux courbes P_α toutes les propriétés des coniques passant par quatre points.

III.— *Le lieu des centres des coniques passant par l'intersection de deux coniques* U, V *est la courbe* P_0 *de ces deux coniques.*

L'équation générale étant $U + \lambda V = o$, on doit éliminer λ entre les deux égalités

$$U'_x + \lambda V'_x = o, \quad U'_y + \lambda V'_y = o,$$

ce qui donne

$$P_0 = U'_x V'_y - V'_x U'_y = o, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut énoncer ce théorème d'une autre manière :

Les polaires des points de la (conique des neuf points) de deux coniques U, V, sont deux à deux parallèles.

Il en résulte évidemment que :

Le lieu du centre des coniques P de U et V est la conique P'_0 des coniques P_0 et $P_{\frac{\pi}{2}}$.

IV. — En employant la méthode des polaires réciproques on verrait aussi que

L'enveloppe des droites telles que la ligne joignant leurs pôles par rapport à deux coniques U, V, soit vue d'un point donné sous un angle α, est une conique dont l'équation tangentielle est de la forme

$$Q_0 + \lambda Q_{\frac{\pi}{2}} = Q_\alpha = o \ldots . \qquad (2)$$

Q_0, $Q_{\frac{\pi}{2}}$ étant les équations tangentielles des coniques correspondant à $\alpha = o$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En faisant varier α, (2) représentera une famille de coniques inscrites dans un même quadrilatère formé par les tangentes communes à $Q_0 = o$ et $Q_{\frac{\pi}{2}} = o$.

En leur appliquant les propriétés des coniques tangentes à quatre droites, on aurait de nouveaux théorèmes; ainsi :

Le lieu des centres des coniques Q *de deux coniques est une ligne droite*.......

V. — Les formes de P_0 et $P_{\frac{\pi}{2}}$ montrent que les courbes P de deux coniques passent par leurs centres, il en résulte que :

Les courbes P de deux coniques concentriques se

réduisent à des systèmes de droites, car elles doivent avoir un point double au centre commun.

En considérant les coniques P_0, $P_{\frac{\pi}{2}}$ d'une conique rapportée à ses axes et d'un cercle, on voit que la conique $P_{\frac{\pi}{2}}$ est homothétique à cette conique et qu'elle la coupe suivant la polaire du centre du cercle; que P_0 est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique. Ces résultats étant d'ailleurs indépendants du rayon du cercle, les courbes P d'une conique fixe et d'un cercle à centre fixe et rayon variable sont constantes.

On verrait de même que la courbe P_0 de deux cercles est la ligne des centres et que $P_{\frac{\pi}{2}}$ est le cercle décrit sur cette ligne prise comme diamètre, les courbes P étant évidemment les mêmes, quels que soient les rayons.

Les coniques P d'une parabole et d'une conique quelconque sont forcément des hyperboles, car elles doivent passer par le centre de la parabole qui est à l'infini.

VI. **Théorème.** — *Lorsque les coniques* U, V *se coupent sous l'angle* α, *la courbe* P_α *passe par leurs points communs.*

En effet, les polaires de ces points étant les tangentes aux coniques se coupent sous l'angle α d'après l'hypothèse. Il résulte de là un moyen d'exprimer que deux coniques se coupent sous l'angle α. Il suffit d'éliminer, en effet, x et y entre

$$U = 0, \quad V = 0, \quad P_\alpha = 0.$$

De même :

La condition pour que deux coniques soient tangentes, s'obtient en exprimant qu'il y a des solutions communes en x et y entre

$$U = 0, \; V = 0, \; P_0 = 0.$$

Enfin, celle qui indique que deux coniques sont orthogonales s'obtient en éliminant x et y entre

$$U = 0, \; V = 0, \; P_{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Lorsque deux coniques sont homofocales, la conique $P_{\frac{\pi}{2}}$

passe par leurs points communs : car, dans ce cas, elles se coupent orthogonalement.

VII. — Considérons maintenant un système de trois coniques U, V, W.

Théorème. — *Les coniques* P_α *de* U,V, P_β *de* V, W, $P_{\pi-\alpha-\beta}$ *de* W, U, *se coupent aux mêmes points.*

En effet, soit un point dont les polaires par rapport à U, V, W, sont (1), (2), (3). S'il est commun à $P_\alpha P_\beta$ (1), (2) se coupent sous l'angle α et (2), (3) sous l'angle β, mais comme (1), (2), (3) forment un triangle, (1), (3) se coupent sous l'angle $\pi - \alpha - \beta$, le théorème est donc démontré. Il en résulte : les coniques $P_{\frac{\pi}{2}}$ de U, V; V, W, ont leurs quatre points communs sur P_0 de U et W.

Les coniques P_0 de U, V, W considérées deux à deux se coupent aux mêmes points, qui sont aussi sur le Jacobien, car

$$J = \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \\ W'_x & W'_y & W'_z \end{vmatrix} = \lambda_1 \underset{uv}{P_0} + \lambda_2 \underset{vw}{P_0} + \lambda_3 \underset{wu}{P_0}$$

VIII.— Les conditions pour que trois coniques U, V, W soient tangentes au même point s'obtiendront en éliminant xy entre

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, $P_{uv} = 0$, $P_{vw} = 0$, $P_{wu} = 0$,

car, les coniques ayant même tangente au point commun, celui-ci doit appartenir aux courbes P_0. (Comme il ne sera plus question que des coniques P_0, P_{uv} indiquera la conique P_0 de U et V.) Ces conditions seront donc au nombre de quatre. En général les conditions pour que n coniques $U_1, U_2, \ldots U_n$ soient tangentes au même point, s'obtiendront en éliminant xy entre

$U_1 = 0$, $U_2 = 0 \ldots\ldots U_n = 0$, $P_{u_1u_2} = 0$, $P_{u_2u_3} = 0 \ldots$

Le nombre des coniques P_0 étant $\dfrac{n(n-1)}{1-2}$, celui des coniques étant n, le nombre des conditions sera en général

de $$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + n - 2 \text{ ou } \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} - 2.$$

IX. — *Lieu des points d'un plan tels que leurs polaires par rapport à trois coniques* U,V,W *forment un triangle de surface donnée.*

Les polaires d'un point xyz étant

$$xU'_x + yU'_y + zU'_z = 0, xV'_x + yV'_y + zV'_z = 0,$$
$$xW'_x + yW'_y + zW'_z = 0,$$

la surface du triangle formé par ces droites est (voir au *Journal*, p. 164) :

$$\Sigma = \frac{\begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V' & V'_z \\ W'_x & W'_y & W'_z \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ V_x & V'_y \\ W'_x & W'_y \end{vmatrix}}$$

Le dénominateur indiquant le produit des mineurs de la dernière colonne :

c'est-à-dire :

$$\Sigma = \frac{S^2}{P_{uv}P_{w}P_{wv}} \text{ ou encore} = \frac{S^2}{(UV)(VW)(WU)}.$$

L'équation du lieu sera donc

$$S^2 = \Sigma . P_{uv} . P_{vw} P_{wu}$$

c'est-à-dire une courbe du sixième degré passant par les quatre points communs à $P_{uv}.P_{wu}P$. On obtiendrait de même la surface du quadrilatère formé par les quatre polaires d'un point par rapport à $U_1U_2U_3U_4$ en décomposant en triangles, on aurait des expressions de la forme

$$\Sigma = \frac{S_{134}}{P_{13}P_{34}P_{41}} - \frac{S_{123}^2}{P_{12}P_{23}P_{31}}$$

ou encore $$\Sigma_4 = \frac{(134)^2}{(13)(34)(41)} - \frac{(123)^2}{(12)(23)(31)}$$

P_{12} ... désignant la conique P de U_1 et U_2 ...

On aurait autant de formes différentes de Σ_n que de combinaisons deux à deux avec les combinaisons trois à trois des quatre nombres 1.2.3.4. c'est-à-dire six manières différentes. On voit bien que ce raisonnement s'applique au polygone de n côtés formé par les polaires d'un point par

rapport à n coniques : $U_1 U_2$ ..... U_n. On formera, en effet, la surface cherchée en faisant les combinaisons trois à trois des n nombres $1.2.3$ ... n ; on prendra les Jacobiens correspondants qu'on élèvera au carré et qu'on divisera ensuite par le produit des coniques P_0 correspondant à la combinaison. On fera ensuite celles $(n-2)$ à $(n-2)$ des termes ainsi formés et on les joindra en leur donnant le signe $+$ ou $-$ sauf au premier. On aura ainsi des expressions de la surface, de forme

$$\sum_y = \frac{(1, 3, n-p)^2}{(1, 3)(3, n-p)(p-p, 1)} - \frac{(1.2.3)^2}{(1.2)(2.3)(3.1)}\cdots\cdots$$

Le nombre de ces diverses expressions sera, comme nous venons de le dire, celui des combinaisons $n-2$ à $n-2$ des combinaisons trois à trois de n nombres. Or, ces dernières sont au nombre de

$$m = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3 .}.$$

Le nombre total N des expressions sera, par suite,

$$N = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+3)}{1 . 2 . 3 .. (n-2)}$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} - 1\right)\cdots\cdots}{1. \quad 2. \quad 3.. (n-2)}$$

Si, dans la formule précédente, on considère Σn comme une constante, elle représentera le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à n coniques forment un polygone de surface constante. Or, les dénominateurs étant chassés, le second membre a pour degré celui du produit $P_{12} P_{23} \ldots$ c'est-à-dire $n(n-1)$ et le premier

$$6 + \left[\frac{n(n-1)}{1 . 2} - 3\right]2 = n(n-1). \text{ Donc :}$$

Théorème. — *Le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à* n *coniques* U_1 U_2 ... U_n *forment un polygone de surface donnée est en général de degré* $n(n-1)$.

Dans le cas de $n = 3$, on a bien six, ce que nous avons trouvé directement.

... Nous étudierons en dernier lieu la question suivante :

PROBLÈME. — *Étant données* n *coniques* $U_1 U_2 \ldots U_n$ *dans un plan, déterminer le nombre de conditions qu'elles doivent remplir pour qu'il puisse exister un point dont les* n *polaires forment un polygone régulier.*

La somme des angles du polygone sera évidemment $(n-2)\pi$, et comme il y a n angles égaux, chacun d'eux sera égal à

$$\pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Le point cherché devra donc se trouver sur les courbes $P_{\pi - \frac{2\pi}{n}}$ de toutes les coniques considérées deux à deux.

On aura donc un système d'équations de la forme

$$P_{(13)\ \pi - \frac{2\pi}{n}} = 0$$

$$P_{(22)\ \pi - \frac{2\pi}{n}} = 0$$

. . . .

. . . .

qui seront au nombre de $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, avec deux inconnues seulement : x, y. En les éliminant on aura pour le nombre de conditions cherché :

$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 2 - 1$, car dans les équations précédentes il y en a une qui rentre forcément dans les autres.

En particulier si $n = 3$, on trouve zéro, ce qui prouve que ce problème est toujours possible dans ce dernier cas.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite et fin* ; voir page 360).

L'étude détaillée des théorèmes qui résultent du principe de dualité dépasserait de beaucoup les limites que nous

sommes forcé de nous imposer dans ce journal ; un pareil travail ne pourrait même pas être complet sans prendre des proportions volumineuses ; mais, pour faire ressortir la fertilité du principe de dualité, nous choisirons quelques exemples parmi les plus intéressants, et nous montrerons comment des propositions qu'il serait difficile d'établir directement résultent presque immédiatement de l'interprétation des équations en coordonnées tangentielles.

On sait que *les polaires d'un point du plan, par rapport aux différentes coniques circonscrites à un quadrilatère donné, passent toutes par un même point.* — Ce théorème résulte de ce que l'équation de la polaire d'un point $(x_0 y_0)$ par rapport aux coniques comprises dans l'équation $MN + \lambda PQ = o$ ne contient qu'un paramètre arbitraire au premier degré.

Or l'équation $MN + \lambda PQ = o$, en coordonnées tangentielles, représente, comme nous l'avons vu, les coniques inscrites dans le quadrilatère dont les sommets opposés ont pour équations $M = o$, $N = o$, d'une part, et $P = o$, $Q = o$, d'autre part. L'équation du pôle d'une droite donnée $(u_0 v_0)$ par rapport à ces courbes est exactement de la même forme que l'équation de la polaire du point $(x_0 y_0)$ dans le théorème précédent ; elle ne contient donc qu'un paramètre arbitraire au premier degré ; donc tous les points qu'elle représente sont sur une même ligne droite. On peut donc énoncer le théorème suivant, corrélatif du premier : *Les pôles d'une même droite, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné, sont en ligne droite.*

Il en résulte immédiatement que *le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère donné est une ligne droite ;* car la polaire s'éloignant à l'infini, son pôle devient le centre de la conique.

Parmi les coniques inscrites dans le quadrilatère donné, si l'on considère en particulier les trois coniques infiniment aplaties qui sont les trois diagonales de ce quadrilatère, leur centre est au milieu de chacune d'elles ; le lieu des centres est donc la droite qui joint les milieux des diagonales ; d'où il résulte incidemment que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

THÉORÈME CORRÉLATIF DU THÉORÈME DE DESARGUES. — *Les tangentes menées par un point fixe à toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère sont en involution.* — Le théorème général de Desargues dit que *les coniques circonscrites à un quadrilatère déterminent sur une droite fixe des segments en involution*. La démonstration résulte de ce que les points situés à l'intersection de la droite fixe avec les coniques $MN + \lambda PQ = 0$ satisfont à une relation de la forme $aK^2 + bK + c + \lambda(a'K^2 + b'K + c') = 0$.

En coordonnées tangentielles l'équation $MN + \lambda PQ = 0$ représente toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère; les tangentes issues d'un point fixe satisfont donc, en vertu du même calcul, à une relation de la forme $aK^2 + bK + c + \lambda(a'K^2 + b'K + c') = 0$; ces tangentes sont donc en involution; c. q. f. d.

Parmi les coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD, si l'on considère en particulier celles qui sont formées chacune de deux sommets opposés, le théorème précédent engendre, comme corollaire immédiat, le suivant :

Les droites qui joignent un point du plan aux sommets opposés d'un quadrilatère et les tangentes menées de ce point à une conique inscrite dans le quadrilatère forment involution. — Ces théorèmes ont de nombreuses conséquences, qui sont pour la plupart très connues, et dans le détail desquelles nous n'avons pas d'ailleurs le loisir d'entrer.

— *Si l'on considère deux angles circonscrits à une conique, leurs sommets et les contacts de leurs côtés appartiennent à une même conique.* — Soit $\alpha\beta + K\gamma^2 = 0$ l'équation d'une conique tangente aux deux droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, aux points où la droite $\gamma = 0$ rencontre ces deux droites; l'équation de la polaire du sommet $(x_1 y_1 z_1)$ du second angle par rapport à cette courbe est $x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0$. L'équation générale des coniques passant par les rencontres des deux cordes de contact avec la conique considérée est

$$\alpha\beta + K\gamma^2 + \lambda\gamma\,(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z) = 0.$$

Si l'on exprime que cette conique passe par le sommet du premier angle ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), on aura :

$$K\gamma^2 + \lambda\gamma (x_1 . 2K\gamma\gamma'_x + y_1 . 2K\gamma\gamma'_y + z_1 . 2K\gamma\gamma'_z) = 0$$

ou

$$1 + 2\lambda (x_1 \gamma'_x + y_1 \gamma'_y + z_1 \gamma'_z) = 0.$$

L'équation de la conique dont il s'agit est donc

$$2(\alpha\beta + K\gamma^2)(x_1\gamma'_x + y_1\gamma'_y + z_1\gamma'_z) - \gamma (x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z) = 0$$

si l'on y remplace x, y, z par $x_1 y_1 z_1$ et que l'on remarque que $x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 2f(x_1 y_1 z_1) = 2(\alpha_1\beta_1 + K\gamma_1^2)$ et que $x_1\gamma'_{x_1} + y_1\gamma'_{y_1} + z_1\gamma'_{x_1} = \gamma_1$

on a identiquement

$$2(\alpha_1\beta_1 + K\gamma_1^2)\gamma_1 - \gamma_1 . 2(\alpha_1\beta_1 + K\gamma_1^2) = 0.$$

La conique passe donc aussi par le sommet du second angle.

Le même calcul, en coordonnées tangentielles, signifie que la conique tangente aux côtés des deux angles et à la corde des contacts du premier, est aussi tangente à la corde des contacts du second. Ce calcul démontre donc le théorème suivant, corrélatif de celui que nous avons énoncé :

Si l'on considère deux angles circonscrits à une conique, les quatre côtés des deux angles, et leurs cordes de contact sont six tangentes à une même conique.

— On démontre que *si deux triangles sont conjugués par rapport a une conique, leurs six sommets appartiennent à une même conique.* — Transportons la démonstration, sans y rien changer, dans le système des coordonnées tangentielles; on aura ainsi un nouvel exemple de ce fait que les démonstrations faites pour les théorèmes directs n'ont pas besoin d'être répétées pour leurs corrélatifs.

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ étant les équations des trois sommets de l'un des triangles donnés, l'équation d'une conique conjuguée par rapport à ce triangle est $aU^2 + bV^2 + cW^2 = 0$ (1).

Pour que le second triangle, dont nous appellerons M_1, M_2, M_3 les trois sommets, soit conjugué par rapport à la conique (1), il faut que le pôle de chaque côté soit le sommet opposé.

Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) les coordonnées des trois côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 du second triangle; représentons

par U_1, V_1, W_1 les valeurs que prennent les fonctions linéaires U, V, W quand on y remplace u et v par u_1, v_1 ; soient de même U_2, V_2, W_2 et U_3, V_3, W_3, les résultats analogues pour u_2, v_2 et u_3, v_3.

Le pôle du côté M_2M_3 par rapport à la conique (1) a pour équation

$$aU_1U + bV_1V + cW_1W = 0.$$

Il faut que ce pôle soit le sommet M_1, c'est-à-dire que son équation soit vérifiée pour les coordonnées des droites M_3M_1 et M_1M_2 ; ce qui donne les conditions

$$aU_1U_2 + bV_1V_2 + cW_1W_2 = 0$$

et

$$aU_1U_3 + bV_1V_3 + cW_1W_3 = 0.$$

Deux groupes de conditions analogues exprimeront de même que les pôles des côtés M_3M_1 et M_1M_2 sont respectivement les sommets M_2 et M_3 ; ces conditions s'obtiennent par la permutation circulaire des indices 1, 2, 3 ; donc pour que le second triangle soit conjugué par rapport à la conique (1), il faut et il suffit qu'on ait les trois conditions :

$$\left\{\begin{array}{l} aU_1U_2 + bV_1V_2 + cW_1W_2 = 0 \\ aU_2U_3 + bV_2V_3 + cW_2W_3 = 0 \\ aU_3U_1 + bV_3V_1 + cW_3W_1 = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Cela posé, l'équation d'une conique tangente aux trois côtés du premier triangle est

$$\lambda UV + \mu VW + \nu WU = 0. \qquad (3)$$

Pour que cette conique soit tangente à deux côtés M_1M_2 et M_2M_1, de l'autre triangle, il faut qu'on ait

$$\lambda U_1V_1 + \mu V_1W_1 + \nu W_1U_1 = 0$$

$$\lambda U_2V_2 + \mu V_2W_2 + \nu W_2U_2 = 0.$$

L'équation de la conique tangente aux trois côtés du premier triangle et à deux des côtés du deuxième triangle est donc

$$\begin{vmatrix} UV & VW & WU \\ U_1V_1 & V_1W_1 & W_1U_1 \\ U_2V_2 & V_2W_2 & W_2U_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Or cette conique est tangente au troisième côté (U_3, V_3, W_3) du deuxième triangle ; car on a identiquement, en vertu des conditions (2) qui sont satisfaites pour des valeurs de a, b, c, autres que zéro :

$$\begin{vmatrix} U_1U_2 & V_1V_2 & W_1W_2 \\ U_2U_3 & V_2V_3 & W_2W_3 \\ U_3U_1 & V_3V_1 & W_3W_1 \end{vmatrix} = 0$$

et il est facile de voir que ce déterminant est identique au suivant

$$\begin{vmatrix} U_1V_1 & V_1W_1 & W_1U_1 \\ U_2V_2 & V_2W_2 & W_2U_2 \\ U_3V_3 & V_3W_3 & W_3U_3 \end{vmatrix}$$

qui, égalé à zéro, exprime précisément la condition pour que la conique (4) soit tangente au troisième côté du deuxième triangle.

Par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant, qui est le corrélatif de celui que nous avons énoncé en commençant, et qui résulte ainsi de la même démonstration faite en coordonnées tangentielles :

Quand deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, leurs six côtés sont tangents à une même conique.

Les divers exemples que nous venons de donner suffisent amplement à montrer qu'on peut déduire tous les théorèmes relatifs aux tangentes des théorèmes relatifs aux points ; on voit aussi qu'il est inutile de refaire les démonstrations; car elles se transportent intégralement dans le système des coordonnées tangentielles. Le principe de dualité se trouve donc mis en évidence par une voie purement analytique, et la géométrie de calcul, grâce à cet instrument dont la puissance est remarquable, devient capable de donner les résultats fournis par la géométrie pure. Comme nous l'avons déjà dit, il nous serait impossible, sans reculer outre mesure les limites de ce travail, de passer en revue même les principaux de ces résultats; mais en prenant le *Traité des sections coniques*, de Chasles, le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet, la plupart des travaux de Steiner, le lecteur reconnaîtra facilement que les beaux théorèmes dus à ces grands géomètres peuvent être obtenus immédiatement par corrélation réciproque à l'aide des coordonnées tangentielles. Nous citerons en particulier les propriétés des pôles et polaires dans les coniques bitangentes, les divers modes de génération des coniques, etc., etc.

Un fait qui dans le cours de cette étude, fixe tout d'abord l'attention, c'est la grande analogie que l'on constate à chaque pas entre la méthode des polaires réciproques et l'emploi des coordonnées tangentielles : un grand nombre de théorèmes s'obtiennent, en effet, par chacune des deux méthodes. Or il est facile de voir que cette analogie est complète.

En effet, quand un point décrit une courbe, sa polaire par rapport à une conique directrice quelconque reste tangente à la polaire réciproque de la courbe par rapport à cette conique. La polaire réciproque est donc l'enveloppe des polaires des points de la courbe proposée.

Soit donc, en coordonnées tangentielles, $\varphi(u, v) = 0$ l'équation d'une courbe, c'est-à-dire l'équation de l'enveloppe d'une droite mobile $ux + vy - 1 = 0$. Cette enveloppe est la polaire réciproque de la courbe que décrit le pôle de la droite mobile pris par rapport à une conique directrice quelconque. Si nous prenons pour directrice le cercle $x^2 + y^2 = 1$, la polaire d'un point $(\alpha\beta)$ par rapport à ce cercle a pour équation $\alpha x + \beta y = 1$; le point $(\alpha\beta)$ coïncidera avec le pôle d'une droite particulière (u, v) si l'on identifie les deux équations $\alpha x + \beta y = 1$ et $ux + vy - 1 = 0$; il vient ainsi $\alpha = u$ et $\beta = v$. La droite mobile se déplaçant de manière que u et v satisfassent toujours à la relation $\varphi(u, v) = 0$, son pôle $(\alpha\beta)$ par rapport au cercle directeur se déplacera de manière que les coordonnées cartésiennes α et β satisfassent toujours à l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; cette équation sera donc, en coordonnées cartésiennes, celle de la polaire réciproque de la courbe $\varphi(u, v) = 0$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 1$. Cela posé, il sera facile de déduire de cette équation celle de la polaire réciproque de la courbe $\varphi(\alpha\beta) = 0$ en coordonnées cartésiennes par la méthode connue, que l'on développe dans la théorie des polaires réciproques. La recherche de l'enveloppe de la droite $ux + vy = 1$, où les paramètres u et v sont liés par la relation $\varphi(u, v) = 0$, qui est l'équation tangentielle de l'enveloppe, peut donc

(*) Cette démonstration est la reproduction de celle que j'ai donnée dans mes *Leçons de géométrie analytique* au § 3 du chapitre Ier du livre XI (n° 639).

se ramener à la recherche de la polaire réciproque de la courbe $\varphi(x, y) = 0$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 1$ (*).

— *De l'influence de certains points remarquables sur la classe d'une courbe.* — Pour terminer cette étude, d'ailleurs très sommaire, sur les coordonnées tangentielles et leurs applications, nous entrerons encore dans quelques détails sur les cas où la classe d'une courbe d'ordre m, laquelle est généralement $m(m-1)$, vient à s'abaisser.

On sait que les points de contact des tangentes menées d'un point $(\alpha\beta\gamma)$ à une courbe $f(x, y, z) = 0$ sont à la rencontre de cette courbe avec une autre courbe, du degré $m-1$, ayant pour équation $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$ (première polaire du point $(\alpha\beta\gamma)$).

Le nombre de ces points de contact, et par suite le nombre des tangentes que l'on peut mener à la courbe d'un point extérieur, est donc généralement $m(m-1)$, de sorte que la classe d'une courbe d'ordre m est généralement $m(m-1)$.

Cette classe s'abaisse lorsque la courbe proposée a des points multiples. Il est facile de voir, en effet, que tout point multiple d'ordre p d'une courbe est un point multiple d'ordre $p-1$ dans sa première polaire.

Quand un point est multiple d'ordre p, si l'on prend ce point pour origine, les termes du moindre degré dans l'équation de la courbe sont du degré p, et en décomposant l'équation en groupes homogènes, elle est de la forme :

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_p(x, y) = 0$$

ou en y introduisant la variable apparente z :

$$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + z^{m-p}\varphi_p(x, y) = 0.$$

Si l'on forme l'équation $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$, il vient

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\left[\varphi'_{m_x} + z\varphi'_{{m-1}_y} + \ldots + z^{m-p}\varphi'_{p_x}\right] \\ &+\beta\left[\varphi'_{m_x} + z\varphi'_{y\,m-1} + \ldots + z^{m-p}\varphi'_{p_y}\right] \\ &+\gamma\left[\varphi_{m-1} + \ldots + (m-p)z^{m-p-1}\varphi_p\right. \end{aligned}\right\} = 0.$$

Or dans cette dernière équation, l'ensemble des termes du moindre degré est $z^{m-p}(\alpha\varphi'_{p_x} + \beta\varphi'_{py})$

qui sont du degré $p-1$; la première polaire a donc à l'ori-

gine (c'est-à-dire au point multiple d'ordre p de la courbe donnée) un point multiple d'ordre $p - 1$.

Dans le cas où l'on prend la première polaire du point multiple lui-même, comme on sait que la polaire de l'origine a pour équation $f'_z = 0$, cette première polaire devient la courbe

$$\varphi_{m-1} + 2z\varphi_{m-2} + \ldots + (m - p)z^{m-p-1}\varphi_p = 0,$$

dans laquelle les termes du moindre degré sont de l'ordre p. Le point multiple d'ordre p est donc multiple du même ordre pour la première polaire.

Dès lors, si une courbe présente un point double, la première polaire passe en ce point ; il y a donc deux des intersections de la courbe proposée avec la courbe des contacts des tangentes issues d'un point extérieur quelconque qui sont confondues en ce point, et il n'y en a plus que $m(m-1) - 2$ autres. La droite qui joint le point extérieur au point double n'est pas la limite des positions d'une sécante dont deux rencontres avec la courbes sont venues se confondre; il est d'ailleurs facile de voir que son équation n'est pas celle d'une des tangentes au point double ; elle n'est donc pas tangente, et dès lors il n'y a plus que $m(m - 1) - 2$ tangentes issues d'un point extérieur.

L'existence d'un point double dans une courbe diminue donc la classe de la courbe de deux unités.

Un point multiple d'ordre p diminuera pour la même raison la classe de la courbe de $p(p - 1)$ unités.

Une démonstration tout à fait pareille à la précédente montre que si, en un point multiple d'ordre p, q tangentes se confondent, le point multiple d'ordre p dans la courbe proposée est encore d'ordre $p - 1$ dans la première polaire, et il y a en ce point $q - 1$ tangentes à la première polaire qui sont confondues.

Donc, s'il y a dans la courbe proposée un rebroussement, la première polaire passe par ce point, et est en ce point tangente à la tangente de rebroussement.

Par conséquent en un point de rebroussement la première polaire d'un point extérieur quelconque et la courbe proposée ont trois points communs confondus; il n'y a donc plus que $m(m - 1) - 3$ autres intersections.

La droite qui joint le point extérieur au point de rebroussement n'étant pas tangente, on ne peut plus mener d'un point extérieur que $m(m-1)-3$ tangentes à la courbe proposée, et sa classe est ainsi diminuée de trois unités.

Il peut même arriver qu'elle soit diminuée de plus de trois unités, si l'ordre du contact de la tangente de rebroussement avec la courbe et sa première polaire est supérieur au premier.

En résumé, si une courbe possède λ points doubles et μ points de rebroussement, sa classe est au plus égale à $m(m-1)-2\lambda-3\mu$.

Nous terminerons ici notre travail sur les coordonnées tangentielles; il reste nécessairement fort incomplet, et pour n'en donner qu'une preuve, nous ferons remarquer que nous avons laissé de côté toute la question des points et tangentes à l'infini. Mais nous croyons que, si restreinte que soit cette étude, elle peut encore être utile à nos lecteurs; car elle met en évidence, par la voie purement analytique, le principe de dualité et ses conséquences si fécondes; elle peut donc offrir des moyens de résoudre un grand nombre de questions par corrélation réciproque; elle montre l'analogie frappante qui existe entre la méthode des polaires réciproques et l'usage des coordonnées tangentielles; en un mot, elle aborde, bien sommairement il est vrai, à peu près toutes les questions que l'on peut avoir besoin de connaître pour faire des applications nombreuses de la méthode.

Dans ce travail, il est un certain nombre de démonstrations qui nous sont personnelles; quant aux autres, nous les avons empruntées à divers ouvrages, parmi lesquels il faut citer le remarquable ouvrage d'un géomètre enlevé trop tôt à la science, M. Painvin, et les *Leçons sur la géométrie* de Clebsch. Ceux de nos lecteurs qui désireraient compléter les notions succinctes que nous avons cherché à leur offrir ici, pourront consulter avec fruit les deux ouvrages que nous venons de citer; quant à nous, nous regarderons notre tâche comme accomplie si nous avons réussi à leur inspirer le goût de cette étude si intéressante.

QUESTION 233

Solution par M. P. Boulogne, élève de mathématiques spéciales au Lycée de Lille.

Du centre d'un cercle on abaisse des perpendiculaires OT *sur les tangentes à un autre cercle et sur chacune d'elles on prend, à partir du point* T *et de part et d'autre de la tangente des longueurs égales* TP = TP' *telles que l'on ait* OP . OP = K². *Trouver le lieu des points* P *et* P'.

Cherchons d'abord le lieu du point T. Pour cela prenons pour axe polaire la ligne des centres et le point O pour pôle. Par le centre B du second cercle menons une parallèle BD à la tangente. Nous avons $OT = OD + DT = b \cos \omega + a$, b étant la distance des centres et a le rayon du cercle B. Le lieu de T est donc la courbe $\rho = a + b \cos \omega$. C'est un limaçon de Pascal.

Soient les points P et P' : on a $OP + OP' = 2OT = 2(a + b \cos \omega)$; d'ailleurs $OP . OP' = K^2$. Le lieu de P et de P' a donc pour équation

$$\rho^2 - 2(a + b \cos \omega)\, \rho + K^2 = 0.$$

Nous remarquerons d'abord que ce lieu, symétrique par rapport à l'axe polaire est limité dans tous les sens. On peut le construire par points. En effet tirons la valeur de ρ, on a

$$\rho = a + b \cos \omega \pm \sqrt{(a + b \cos \omega)^2 - K^2}\,;$$

il faut donc porter à partir de T sur le rayon vecteur et son prolongement des longueurs égales au radical. De là la construction suivante.

Sur OT comme diamètre décrire un demi-cercle. Du point O mener une corde $OL = K$ et rabattre TL sur le rayon, de part et d'autre de T en P et P'.

Les points de rebrousement du lieu sont donnés par

$$a + b \cos \omega = K \text{ ou } \cos \omega = \frac{K - a}{b}\,;$$

alors

$$\rho = a + b\, \frac{K - a}{b} = K.$$

Les points de rebroussement sont donc situés sur un cercle décrit de O comme centre avec K pour rayon.

Cherchons d'ailleurs les points d'intersection du lieu et du limaçon auxiliaire ; remplaçant $a + b \cos \omega$ par ρ, nous trouvons $\rho^2 = K^2$ ou $\rho = K$; donc les points de rebroussement du lieu sont à l'intersection du limaçon auxiliaire et du cercle décrit de O comme centre avec K pour rayon.

Examinons le cas où le point O est extérieur au cercle B. Si $K > a + b$, il n'y a pas de lieu. Si $K = a + b$ le lieu se réduit au point double E. Pour $a + b > K > b - a$ on a une seule courbe avec deux points de rebroussement.

Quand $K = b - a$, outre la courbe, le point F est point double isolé du lieu.

Enfin quand $K < b - a$, on obtient deux courbes et quatre points de rebroussement. Ces courbes s'aplatissent à mesure que K décroît. Elles correspondent chacune à une boucle du limaçon.

On pourrait faire une discussion analogue lorsque O est sur le cercle B et quand il est intérieur ; on obtient dans ces deux cas une seule courbe et deux points de rebroussement au plus.

QUESTION 253

Solution par M. Dupuy, élève au Lycée de Grenoble.

Étant donnés sur un plan un parallélogramme et une droite, construire avec la règle et le compas les points où la droite rencontre l'ellipse inscrite au parallélogramme et touchant ses quatre côtés en leur milieu.

Considérons l'ellipse inscrite au parallélogramme comme la projection oblique d'un cercle inscrit dans un carré. Prenons le plan du parallélogramme pour plan horizontal, le côté CD pour ligne de terre et dans le plan vertical construisons sur CD un carré CDEF. Inscrivons-y un cercle. Pour avoir la position de la droite dans le plan vertical, prolon-

geons-la en M jusqu'à CD, d'un côté, et en N jusqu'à AB de l'autre. Menons Nn parallèle à BC et nN' parallèle à cF; MN' est la droite cherchée qui coupe le cercle en deux points H', I'. Menons I'i, H'h perpendiculaires à la ligne de terre, iI, hH parallèles à BC; les points I, H d'intersection avec MN sont les points cherchés.

QUESTION 272

Solution par M. Gino Loria, à Mantoue.

Vérifier l'identité

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^{p-1}}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$$

et exprimer k *en fonction de* p.

1° k sera égal à la somme des exposants de x dans les p binômes; donc

$$K = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1} = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1.$$

Comme il est facile de vérifier l'égalité pour $p = 2$, je supposerai qu'elle soit vraie pour une certaine valeur de p et je démontrerai qu'elle est vraie aussi pour la valeur $p + 1$.

On a par hypothèse

$$(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^{p-1}}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^p - 1}$$

multipliant cette égalité par $1 + x^{2^p}$ nous obtiendrons

$$(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^p}) = 1 + x + x^2 + \ldots x^{2^p - 1} + x^{2^p} + x^{2^p + 1} + \ldots x^{2 \cdot 2^p - 1}$$

c'est-à-dire

$$(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^p}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^{p+1} - 1}$$

donc l'identité est aussi vraie pour la valeur $p + 1$, elle est par suite générale.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, à Grenoble; Boulogne, à Lille; Daguillon, au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

QUESTION 312

Solution par M. DU MOTEL, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (cours de M. Lucas).

On considère une ellipse et le cercle lieu des sommets des angles droits qu'on peut lui circonscrire. Par un point P *extérieur à l'ellipse, on mène les deux tangentes* PA *et* PB *à l'ellipse. On prolonge la corde des contacts* AB *jusqu'à sa rencontre en* C *et* D *avec le cercle. Faire voir analytiquement et géométriquement que les angles* CPA, BPD *sont égaux.*

Il suffit de démontrer que les bissectrices des angles APB, CPD coïncident.

SOLUTION ANALYTIQUE

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'équation de l'ellipse. $x_0\, y_0$ étant les coordonnées du point P, l'équation quadratique des droites PA et PB est

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$$

Celle des parallèles à ces droites menées par l'origine est

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$$

et l'équation des bissectrices est

$$\frac{x^2 - y^2}{x_0^2 - y_0^2 - (a^2 - b^2)} = \frac{xy}{x_0 y_0}.$$

Cherchons l'équation aux coefficients angulaires des droites PC, PD. Il suffit de mener par le point P une droite $y - y_0 = m(x - x_0)$ (1) et d'exprimer qu'elle coupe la droite AB, $b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2 = 0$ (2), sur le cercle $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$ (3).

Des équations (1) et (2) on tire

$$x = a^2\,\frac{b^2 + mx_0y_0 - y_0^2}{a^2my_0 + b^2x_0},\quad y = b^2\,\frac{a^2m + x_0y_0 - mx_0^2}{a^2my_0 + b^2x_0}$$

transportant dans (3) on tire

$$a^4(b^2 + mx_0y_0 - y_0^2)^2 + b^4(a^2m + x_0y_0 - mx_0^2)^2$$
$$- (a^2 + b^2)(a^2my_0 - b^2x_0)^2 = 0.$$

Pour avoir l'équation des parallèles aux droites PC, PD menées par l'origine, il n'y a qu'à remplacer dans cette équation m par $\frac{y}{x}$, ce qui donne

$$a^4[x_0y_0y + x(b^2 - y_0^2)]^2 + b^4[(a^2 - x_0^2) + xx_0y_0]^2$$
$$- (a^2 + b^2)(a^2yy_0 + b^2xx_0)^2 = 0.$$

L'équation des bissectrices est

$$\frac{x^2 - y^2}{[x_0^2 - y_0^2 - (a^2 - b^2)][a^4{}_0y^2 + b^4x_0^2]} = \frac{xy}{x_0y_0(a^4y_0^2 + b^4x_0^2)}$$

C'est la même équation que pour les bissectrices des parallèles aux droites PA, PB.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soient PE, PF les bissectrices de l'angle APB. Le triangle rectangle EPF étant conjugué par rapport à la conique, le cercle circonscrit est orthogonal au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits; EF, étant un diamètre de ce cercle, est divisé harmoniquement par l'autre. Donc le faisceau P(CEDF) est harmonique et comme les rayons PE, PF sont rectangulaires, ils sont les bissectrices de l'angle des deux autres.

c. q. f. d.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

361. — Considérons quatre droites dans un plan; ces quatre droites prises trois à trois forment quatre triangles, et l'une d'elles, AB par exemple, appartient à trois de ces triangles. Dans chacun des trois triangles correspondant à AB, joignons le centre du cercle circonscrit au sommet opposé à AB. 1° Pour un même côté AB, les trois droites ainsi menées concourent en un point I. 2° Les quatre points analogues à I et les quatre centres des cercles circonscrits

aux triangles formés par les quatre droites sont sur une même circonférence.

362. — Deux cercles donnés se coupent en un point A; mener par le point A une sécante rencontrant les deux cercles en B et C, de telle manière que l'on ait

$$AB \cdot AC = l^2.$$

363. — On donne une corde AB; trouver sur son prolongement un point P, tel que si l'on mène PH tangente au cercle, et que des points A et B on abaisse des perpendiculaires AC et BD sur la tangente PH on ait

$$AC \cdot BD = l^2.$$

364. — On donne le demi-cercle AB et les tangentes en A et B; par un point fixe P, pris sur le diamètre AB, on mène une droite PQ, qui rencontre la circonférence en Q, et par ce point Q, on mène à PQ la perpendiculaire MQN, rencontrant en M la tangente AM, et en N la tangente BN. Démontrer que le produit AM . BN reste constant lorsque PQ tourne autour du point P.

365. — On donne deux circonférences et un point P; mener aux circonférences des tangentes parallèles, telles que le rapport des distances du point P aux deux tangentes soit égal à un rapport donné.

366. — Étant donnés deux cercles et une droite, trouver sur cette droite un point P, tel que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient également inclinées sur la droite.

367. — Par le centre d'un cercle et par un point, faire passer un cercle tel que la corde commune ait une longueur donnée.

368. — Circonscrire à une circonférence de rayon r un triangle isoscèle dont le côté soit égal à m fois la base.

Mathématiques spéciales.

369. — On considère une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soit M un point de l'ellipse; par le point M, le point M

diamétralement opposé, et les extrémités A, A′ du grand axe on fait passer une hyperbole équilatère H ; puis on prend un cercle C passant par les points M, A et A′. Cela posé, l'hyperbole H et le cercle C ont un quatrième point commun P ; on mène MP, et l'on demande, le point M parcourant l'ellipse, de déterminer la trajectoire orthogonale des droites MP, c'est-à-dire la courbe qui les coupe à angle droit. C'est une ellipse ; on fera voir que cette ellipse n'est jamais un cercle, et qu'elle n'est pas non plus homothétique à l'ellipse donnée. On suppose, bien entendu $a > b$.

(De Longchamps.)

370. — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$ et l'on considère les coniques osculatrices à cette parabole en son sommet (une courbe f est osculatrice à une courbe φ en un point M de celle-ci quand elle a, en ce point M, le plus grand nombre de points communs confondus avec M ; en particulier, une conique est osculatrice à une conique φ en M, quand elle a en ce point quatre points communs avec φ). Montrer que : 1° le lieu des sommets de ces coniques est une parabole ; 2° le lieu de leurs foyers est un cercle.

(De Longchamps.)

371. — Une conique variable est osculatrice à une hyperbole équilatère donnée, et son foyer fixe au centre de cette hyperbole. Démontrer que les tangentes communes aux deux courbes se coupent sur la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$, le centre de l'hyperbole étant pris pour pôle et l'axe transverse pour axe polaire. *(The Educat. Times.)*

372. — On donne : 1° dans le plan des zx une droite parallèle à l'axe ox ; 2° dans le plan des zy une droite parallèle à l'axe des y, et ne rencontrant pas l'axe des z au même point que la précédente. D'un point pris dans le plan xoy, on abaisse des perpendiculaires sur ces deux droites, et l'on joint leurs pieds par une ligne droite. On demande l'équation de la surface engendrée par cette droite quand le point du plan xy se meut sur une courbe $f(x, y) = 0$.

Appliquer la solution au cas où $f(x,y) = 0$ est une ligne droite, et dans ce cas étudier la nature et les propriétés de la surface obtenue.

373. — On donne dans les plans des zx et des yz deux coniques tangentes à l'axe oz à l'origine des coordonnées; on demande l'équation générale des surfaces du second ordre contenant ces deux coniques et le lieu des centres de ces surfaces. Discuter le lieu obtenu et étudier comment il varie avec la nature des coniques données.

374. — On donne deux cercles égaux situés dans des plans parallèles, et dont les centres sont sur une perpendiculaire à ces plans. Deux points se meuvent simultanément sur ces deux circonférences avec des vitesses différentes. On demande d'étudier la surface engendrée par la droite qui les joint. On suppose que les positions initiales des deux points sont sur une perpendiculaire aux plans des cercles. On examinera en particulier le cas où le rapport des vitesses est égal à 2. *(Genty.)*

BIBLIOGRAPHIE

Traité de géométrie descriptive *répondant au programme de Saint-Cyr, par* **M. Javary,** *chef des travaux graphiques à l'École polytechnique, etc. — Paris, librairie Delagrave.*

Nous avons rendu compte, il y a quelques mois, de la première partie du cours complet de géométrie descriptive, destiné aux candidats à l'École polytechnique et publié par M. Javary; le nouvel ouvrage du même auteur, que nous signalons aujourd'hui, a été écrit pour les élèves qui se préparent à Saint-Cyr, et contient, en dehors de la ligne droite et du plan, des notions très complètes sur les plans cotés, les plans tangents au cylindre et au cône, et les sections planes de ces deux corps. L'élève qui aura eu soin, en étudiant ce cours, de faire, comme l'indique M. Javary, les épures à la règle et au compas, et qui aura étudié les divers problèmes indiqués dans le cours sous le nom d'exercices, saura et comprendra la géométrie descriptive de façon à ne pas se laisser embarrasser par une question d'examen.

Un chapitre fort intéressant termine l'ouvrage; il donne rapidement, et sans aucune figure, la solution des questions proposées aux examens écrits de Saint Cyr depuis 1863; pour bien comprendre ces solutions, il faut de toute nécessité faire les épures; et en étudiant attentivement les explications données dans ces dix-huit épures, un élève y trouvera la meilleure des préparations à l'épreuve de géométrie descriptive qu'il devra faire pour entrer à Saint-Cyr.

Leçons de Cosmographie *par* **H. Garcet.** *Nouvelle édition mise en harmonie avec les nouveaux programmes et avec les nouvelles découvertes par* **Ch. Simon,** *professeur au lycée Louis-le-Grand. — Paris, librairie Delagrave.*

Voici un ouvrage qui répond bien aux programmes de l'enseignement scien-

tifique des lycées, programme qui porte que l'étude de la cosmographie sera purement descriptive ; en effet, ici les faits intéressants de la cosmographie sont exposés avec une grande précision ; mais en revoyant l'ancienne édition de l'ouvrage de Garcet, ouvrage principalement destiné aux candidats à la licence ès sciences, M. Simon, ancien directeur de l'Observatoire de Toulouse, et par suite très compétent dans les questions relatives au système du monde, n'a laissé subsister dans la nouvelle édition que les connaissances que l'on peut considérer actuellement comme indispensables à toute personne instruite. Il a donc laissé de côté les formules, que les élèves oubliaient le plus souvent, ne sachant comment ils pourraient les établir.

Le nouvel ouvrage que nous indiquons à nos lecteurs contient tout ce qui est nécessaire pour les examens, mais rien de plus ; on est sûr de ne pas se perdre dans des détails inutiles en le prenant pour guide d'une bonne préparation.

ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE, *par* **M. Pichot,** *censeur au Lycée Fontanes. — Paris, librairie Hachette.*

Ce traité élémentaire de trigonométrie, qui fait partie de la collection du baccalauréat ès sciences publiée par la librairie Hachette, peut être fort utile aux candidats à Saint-Cyr, par le grand nombre d'exercices résolus qu'il présente, exercices choisis de façon à donner beaucoup de formules intéressantes à retenir. Les problèmes proposés, qui terminent le volume, sont aussi très bons pour les élèves, parce que ce sont des questions d'examens, ce qui pousse toujours les candidats à travailler ce genre d'exercices. Nous regrettons seulement que l'auteur n'ait pas jugé à propos d'en mettre un plus grand nombre ; avec les tendances actuelles des examens, où l'on pousse les élèves à des exercices de calcul, il est bon de mettre beaucoup de problèmes dans un ouvrage de ce genre ; c'est ce que comprennent à merveille les Anglais, dont les ouvrages classiques contiennent un nombre très considérable de problèmes, énoncés, ce qui est très important, à la fin de chaque chapitre. C'est du reste la seule critique que nous ayons à faire au livre de M. Pichot, et nous nous permettons cette observation, précisément parce que nous trouvons son ouvrage bon, et que nous le désirons encore plus profitable aux élèves.

A. M.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMP. CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 16388-4.

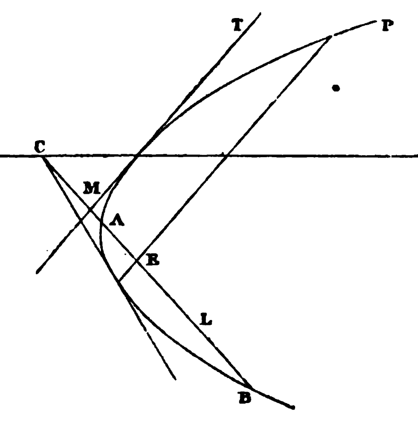
RÉSOLUTION GEOMÉTRIQUE

DE DEUX PROBLÈMES DU QUATRIÈME DEGRÉ RELATIFS A LA PARABOLE

Par M. G. de Longchamps.

Les deux problèmes dont nous allons nous occuper sont ceux qui se proposent : 1° *de construire une parabole passant par deux points et tangente à deux droites; 2° de construire une parabole passant par trois points et tangente à une droite.*

1. Nous ferons d'abord cette remarque : Si l'on considère une parabole P; une tangente T à cette courbe; le diamètre Δ, du point de contact, et une droite L qui rencontre P en A et B, T en M, Δ en C, on a :



$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB$$

En effet, menons par C la tangente CD à P, et par D une parallèle à T. Cette dernière droite sera la polaire du point C; elle rencontre donc AB en un point E, conjugué harmonique de C. D'autre part, et d'après la propriété connue de la sous-tangente, on voit que le point M est le milieu de CE. On a donc bien

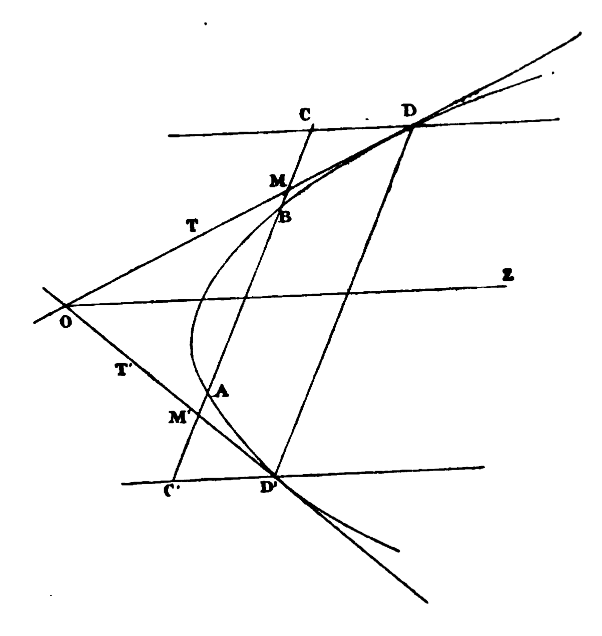
$$\overline{CM}^2 = MA \cdot MB.$$

2. Ceci posé, soient T, T′ les deux tangentes; D, D′ les points de contact. On a, par la remarque précédente,

$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB; \text{ et } \overline{M'C'}^2 = M'A \cdot M'B;$$

DC et D′C′ étant, bien entendu, les diamètres des points D

et D'. Joignons le point O au milieu de DD', cette droite OZ sera parallèle aux diamètres; et, pour des raisons évidentes, c'est une parallèle équidistante de CD et de C'D'. Elle passe donc par le milieu de CC', donc OZ est une droite qui est déterminée. Alors en menant par les points C et C' des parallèles à OZ, on aura les points D, D'.



En appliquant le théorème de la sous-tangente au point A et au point B, on déterminera les tangentes en A et B et l'on est ramené au problème connu : *construire une parabole, connaissant quatre tangentes*.

3. Le problème que nous venons de résoudre est, comme on le sait, un problème du *quatrième degré*; parce qu'il existe *quatre coniques passant par deux points et tangentes à trois droites*: en particulier, il existe *quatre paraboles passant par deux points et tangentes à deux droites*. Lorsque les points C et C' ont été construits, à ces points ne correspond, évidemment, qu'*une parabole*.

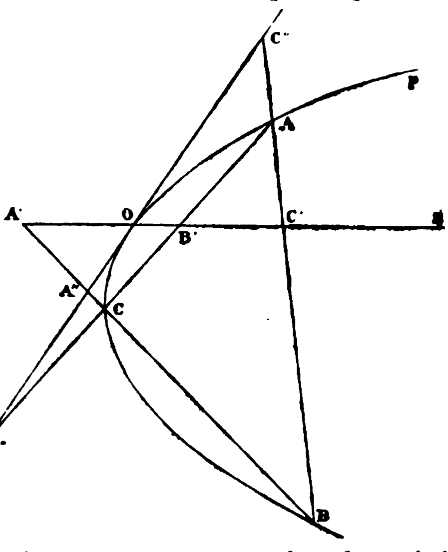
Mais, pour retrouver les quatre solutions du problème, il faut observer que la relation

$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB$$

détermine *deux points* C; il y a de même *deux points* C', et les points associés deux à deux de toutes les façons possibles donnent les quatre solutions cherchées.

4. — Si l'on donne, maintenant, trois points A, B, C d'une parabole P, et une tangente T, la construction de la courbe dépend encore d'un problème du quatrième degré. En appliquant les idées précédentes, ce problème, comme celui que nous venons de traiter, se ramène, lui aussi, à quatre problèmes du premier degré.

Soit O le point de contact de T et de P, point que nous nous proposons de déterminer. Le diamètre OZ coupe les côtés du triangle ABC en A', B', C', la droite T coupe les mêmes côtés en des points A'', B'', C'', et l'on a, par exemple,



$$\overline{C'C''}^2 = C''A \cdot C''B,$$

ce qui détermine deux points C' à égale distance du point C'' sur AB. On aura, de même, deux points B' et deux points A'; ces points A', B', C' sont en nombre 6; mais i est facile de reconnaître que ces points sont *trois à trois en ligne droite et forment un quadrilatère complet dont les côtés sont les diamètres cherchés*. Ayant pris l'un de ces côtés, on aura donc une tangente, le diamètre correspondant, et trois points. Le théorème de la sous-tangente permettra de déterminer les tangentes en ces points, et l'on sera ramené

de nouveau au problème de la construction de la parabole, connaissant quatre tangentes de cette courbe.

Pour établir que les points A', B', C' sont, trois à trois, en ligne droite, on démontrera le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés un triangle* ABC, *une transversale* Δ, *qui rencontre les côtés en* A', B', C', *on prend entre* A *et* B *un point* C'' *tel que*

$$C''C'^2 = C'A \cdot C'B;$$

démontrer que les trois droites AA'', BB'', CC'' *concourent au même point* (*).

REMARQUES SUR LES PROBLÈMES PRÉCÉDENTS

Chasles a donné la solution du problème général qui consiste à décrire une conique passant par deux points et tangente à trois droites *(Traité des Coniques*, p. 59*)*.

Elle est fondée sur le théorème suivant :

Si l'on a un angle circonscrit à une conique AMB *et un point* S, *les tangentes* ST, ST' *et les droites* SA, SB *menées aux points de contact des côtés de l'angle déterminent une involution dont* SM *est un rayon double.*

D'après cela, si l'on donne les deux points A, B et le triangle circonscrit CDE, on cherchera les rayons doubles de l'involution (CD, CE), (CA, CB), et on aura deux droites sur lesquelles doivent se trouver les points tels que M, intersection des tangentes en A et B aux coniques cherchées. Prenant ensuite l'involution (DC, DE), (DA, DB), on aura deux nouvelles droites, et par suite quatre points M.

Le problème est ramené à construire une conique tangente à cinq droites, et admet quatre solutions.

Pour traiter par cette méthode le premier des problèmes résolus par M. de Longchamps, il suffit de rejeter à l'infini une des droites données. Considérons l'involution déterminée par OT *(fig. 2)*, la droite de l'infini et les parallèles à

(*) Nous insérerons une solution de ce théorème, si quelqu'un de nos lecteurs nous adresse cette solution.

OT menées par A et B. Il faut chercher sur AB les points doubles de l'involution dont on connaît le couple (A, B) et le couple (M, ∞). Le point M n'est autre chose que le point central, les points doubles s'obtiennent en prenant MC = MC', de telle sorte que $\overline{MC}^2 = \overline{MC'}^2 = MA.MB$. On retrouve ainsi les points C et C'. Les parallèles à OT menées par M et M' sont deux premières droites sur lesquelles doivent se trouver les points de concours des tangentes en A et B. Le point de rencontre M_1 de AB avec OT' fournit deux autres points C_1, C'_1 et deux droites parallèles à OT'. Les quatre sommets du parallélogramme ainsi obtenu sont les pôles de AB relatifs aux quatre paraboles qui répondent à la question.

Le deuxième problème traité par M. de Longchamps peut se résoudre d'une manière analogue.

D'abord, en transformant par dualité le théorème cité au commencement de ces remarques, on obtient l'énoncé suivant :

Étant donnés deux points A *et* B *sur une conique et une droite* D *qui rencontre la courbe en* C, C', *les tangentes en* A *et* B *coupent la droite en deux points* A', B', *qui déterminent avec* C, C' *une involution dont un des points doubles est le point de concours des droites* D *et* AB.

De ce théorème on conclut aisément la construction d'une conique passant par trois points et tangente à deux droites, puis celle de la parabole passant par trois points et tangente à une droite.

J. K.

NOTE

SUR LES VARIATIONS DE LA FONCTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Par M. J. Bourget.

La brochure de M. Burat-Dubois (*) et les réflexions de M. Morel dans le numéro de septembre tendent à démontrer que la méthode *indirecte* généralement employée pour déterminer le maximum et le minimum de la fraction rationnelle du second degré, ne conduit pas toujours à des résultats conformes à ceux que donne la méthode *directe*, fondée sur la définition classique des maxima et des minima.

Je me propose, dans cette note, de montrer que les contradictions signalées par M. Burat ne sont qu'apparentes et que les deux méthodes conduisent au même résultat.

A la première page de sa brochure, M. Burat fait remarquer que, d'après la définition connue des maxima et minima *relatifs* :

1° $y = +\infty$, $y = -\infty$ peuvent être respectivement des maxima et des minima, si ces valeurs correspondent à des valeurs finies de x. Si par exemple $y = +\infty$ pour $x = a$, et que pour $x = a + h$ et $x = a - h$, y soit très grand et positif, on peut dire que, conformément à la définition, $y = +\infty$ est un maximum relatif. Cette observation n'est pas nouvelle; mais on laisse de côté ces solutions de la question, qu'on détermine directement par la résolution de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$. On voit d'ailleurs qu'il

---

(*) Règle pour déterminer le maximum et le minimum de la fraction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

par M. Burat-Dubois. (Pau, imprimerie Vignancourt, juillet 1881.)

ne peut y avoir de maxima et de minima de cette espèce, que si $b'^2 = 4a'c'$.

2° *Un maximum et un minimum de* y *ne peuvent correspondre qu'à une valeur finie de la variable.*

Cette assertion de M. Burat me semble inexacte, et c'est en admettant cette proposition qu'il arrive à prouver qu'il y a divergence entre la méthode directe et la méthode indirecte.

Voici comment nous raisonnons pour démontrer l'inexactitude de la proposition de M. Burat-Dubois.

La fonction donnée y est continue et uniforme de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Changeons x en $\frac{1}{u}$, elle deviendra

$$y = \frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2},$$

et imaginons deux axes ou et oy servant à représenter, par une construction graphique, les variations de la fonction.

A chaque valeur m de u correspondra une valeur p de la fonction y. Si u tend vers m par valeurs croissantes ou décroissantes, y tendra vers la même valeur p. Supposons $m = 0$; nous pourrons dire que y tend vers p, soit que u croisse de $-\varepsilon$ à o, soit que u décroisse de $+\varepsilon$ à o. Revenons à la fonction primitive en x:

Faire croître u de $-\varepsilon$ à o, c'est faire décroître x de $-\frac{1}{\varepsilon}$ à $-\infty$; faire décroître u de ε à o, c'est faire croître x de $\frac{1}{\varepsilon}$ a $+\infty$ et puisque $u = 0$ nous donne un point unique sur l'axe des U, vers lequel on tend soit en partant de $-\varepsilon$, soit en partant de $+\varepsilon$, nous devons regarder $x = +\infty$ et $x = -\infty$ comme donnant aussi le même point de l'axe des x, où il faut élever une ordonnée égale à p pour représenter la fonction.

Adoptons donc cette manière de voir que : x $= -\infty$ *et* x $= +\infty$ *représentent un même point de l'axe des* x *et que* x $= -$ k *et* x $= +$ k *(*k *étant très grand) représentent deux*

points situés de part et d'autre de ce point, et dans son voisinage.

Cette convention faite, il est facile de démontrer le théorème suivant.

Théorème. — *Tout maximum absolu de y est aussi un maximum relatif. Tout minimum absolu est aussi un minimum relatif.*

Il y a deux cas à considérer.

1° Admettons que pour une région de l'axe des x, y reste toujours inférieur à p, et qu'il atteigne cette valeur pour $x = m$, valeur finie; p est un maximum absolu; mais il est évidemment aussi un maximum relatif, puisque y étant continu et uniforme, p sera plus grand par hypothèse que la valeur que prend y soit pour $x = m - \varepsilon$, soit pour $x = m + \varepsilon$.

2° Supposons que dans les régions extrêmes de x, à gauche et à droite, y soit toujours inférieur à p, et qu'il tende vers p, soit quand x tend vers $-\infty$, soit quand x tend vers $+\infty$; p est un maximum absolu dans ces deux régions; mais, d'après notre convention ci-dessus, p est aussi un maximum relatif, car y est inférieur à p, soit pour $x = -k$, soit pour $x = k$ (k étant très grand).

Un raisonnement semblable montrerait que, dans tous les cas, p minimum absolu est en même temps un minimun relatif.

Donc on peut dire que les deux méthodes ne diffèrent pas au fond et conduisent aux mêmes résultats.

Les exemples que donne M. Burat pour prouver que les deux méthodes ne s'accordent pas toujours, traitées en suivant notre manière de voir, ne présentent plus rien d'anormal et confirment la vérité du théorème général suivant, que nous avons démontré dans notre *Traite d'algèbre* :

1° La fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, *quand* x *varie de* $-\infty$ *à* $-\infty$ *n'a ni maximum, ni minimum, si les racines du numérateur et du dénominateur sont réelles et si les segments* AA′, BB′ *qu'elles déterminent sur l'axe des* x *empiètent l'un sur l'autre.*

2° Dans le cas où le dénominateur de la fonction a ses racines égales, la fonction a un maximum, ou un minimum.

3° Dans tous les autres cas, la fonction a un maximum et un minimum.

Ces exemples sont les suivants :

$$(a)\qquad y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}$$

$$(b)\qquad y=\frac{x^2-5x-6}{x^2-5x+4}=\frac{(x+1)(x-6)}{(x-1)(x-4)}$$

$$(c)\qquad y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+1}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)^2}$$

$$(d)\qquad y=\frac{x^2+5x-6}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+6)}{(x+1)^2}$$

$$(e)\qquad y=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{(x+1)^2}$$

$$(f)\qquad y=\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2}$$

Conformément au théorème précédent :

L'exemple (a) nous donne un maximum absolu $\frac{1}{9}$ pour $x=2\frac{1}{2}$ et un minimum absolu 1 pour $x=\pm\infty$. $\frac{1}{9}$ est aussi un maximum relatif et 1 un minimum relatif, d'après notre convention.

L'exemple (b) nous donne un minimum absolu $5\frac{4}{9}$ pour $x=\frac{5}{2}$ et un maximum absolu 1 pour $x=\pm\infty$. $5\frac{4}{9}$ est aussi un minimum relatif et 1 est un maximum relatif suivant nos idées.

L'exemple (c) nous donne un minimum absolu pour $x=\frac{69}{49}$. Ce minimum $-\frac{1}{48}$ est aussi un minimum relatif. — Nous ne nous occupons pas du maximum $y=+\infty$ pour $x=-1$.

L'exemple (*d*) nous donne pour $x = 5\frac{2}{3}$ un maximum absolu $1\frac{9}{40}$, qui est aussi un maximum relatif. — Nous ne nous occupons pas de $y = -\infty$ qui est un minimum pour $x = -1$.

L'exemple (*e*) nous donne pour $x = \pm\infty$ un maximum absolu $y = -1$, qui est aussi un maximum relatif, suivant nos idées. — Nous mettons de côté $y = -\infty$, qui est un minimum pour $x = \mp 1$.

Enfin l'exemple (*f*) nous donne pour $x = \pm\infty$ le minimum absolu 1, qui est aussi un minimum relatif. Nous laissons de côté $y = +\infty$ qui est un maximum pour $x = -1$.

Remarquons, en finissant, que notre manière de voir est conforme à l'esprit de généralisation qui a fait de l'algèbre un instrument apte à éliminer les exceptions que présente la théorie des grandeurs considérées d'abord uniquement au point de vue absolu.

Comment, d'ailleurs, en suivant M. Burat-Dubois, expliquerait-on que la fonction

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}$$

ne présenterait qu'un maximum pour $x = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, et qu'après avoir posé $x = \frac{1}{u}$, la même fonction

$$y = \frac{1 - 5u + 6u^2}{1 - 5u + 4u^2}$$

présenterait un maximum pour $x = \frac{5}{2}$ ou $u = \frac{2}{5}$ et un minimum 1 pour $u = 0$ ou $x = \pm\infty$?

QUESTIONS D'EXAMEN

Dans le cas douteux des triangles, en appelant C *et* C′ *les valeurs du troisième angle* A *étant donné, on a*

$$tg\, A = cotg \frac{1}{2} (C + C').$$

En effet, la construction géométrique nous apprend que la perpendiculaire CD abaissée du point C sur le côté AB est la bissectrice de l'angle BCB′; de plus, si le problème a deux solutions, la ligne CA est à l'extérieur de l'angle BCB′; donc on a, par un théorème connu,

$$2ACD = ACB + ACB'.$$

D'autre part, l'angle ACD est le complément de l'angle A donné; donc on trouve bien d'après cela la relation indiquée.

Dans une division, on ajoute au dividende et au diviseur le même nombre d'unités; que doit être ce nombre pour que la partie entière du quotient ne change pas?

(Nous supposons que dans les deux cas nous faisons la division par défaut.)

Soient A le dividende, B le diviseur, Q le quotient; dans la première opération, nous trouvons un reste R, et nous avons identiquement

$$A = BQ + R.$$

Prenons pour dividende $A + m$, et pour diviseur $B + m$; par hypothèse, nous avons le même quotient Q; soit R′ le nouveau reste, nous aurons

$$A + m = (B + m)Q + R'.$$

En comparant ces deux égalités nous trouvons facilement

$$m(Q - 1) + R' = R.$$

Supposons d'abord que Q ne soit pas égal à 1; alors nous voyons que R′ est inférieur à R, et nous aurons pour

déterminer m, l'égalité

$$m = \frac{R - R'}{Q - 1};$$

puisque R' n'est pas connu, nous voyons que m ne peut pas dépasser le plus grand entier contenu dans l'expression

$$\frac{R}{Q - 1}$$

c'est-à-dire que nous aurons une limite supérieure de m en diminuant le quotient d'une unité et divisant le reste par le nombre ainsi obtenu.

Nous avons supposé que Q n'était pas égal à 1 ; cherchons ce qui arriverait dans ce cas ; si nous avions

$$A = B + R,$$

R étant inférieur à B, nous aurions évidemment, quel que fût m :

$$A + m = (B + m) + R,$$

et R serait plus petit que $B + m$; donc dans ce cas nous pourrions prendre pour m un entier quelconque, et le quotient ne changerait pas ; le problème est alors indéterminé.

Une équation du second degré a ses coefficients imaginaires : trouver la condition pour que cette équation admette une racine réelle.

Soit l'équation

$$(a + a'i)x^2 + (b + b'i)x + (c + c'i) = 0.$$

Si cette équation admet une racine réelle, cette racine réelle devra annuler séparément la partie réelle et le coefficient de i dans l'équation mise sous la forme

$$ax^2 + bx + c + i(a'x^2 + b'x + c') = 0.$$

Donc, pour que l'équation proposée admette une racine réelle, il faut que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient au moins une racine commune, ce qui nous donne une condition connue.

Il est bon de remarquer que cette racine convient aussi à une équation que nous pourrions appeler l'équation con-

juguée de la précédente et qui en diffère en ce que les coefficients sont conjugués de ceux de l'équation donnée.

Trouver la somme des n *premiers termes de la série*

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + (n-1)n^2$$

Si à cette somme j'ajoute

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2,$$

j'aurai la somme des cubes des nombres de 2 à n, c'est-à-dire

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1.$$

Donc, puisque la somme que j'ai ajoutée est égale à

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1,$$

il vient pour la somme cherchée

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 - n - 2).$$

Il est facile de voir que cette expression est toujours divisible par 12; car le facteur $3n^2 - n - 2$ étant toujours pair, ainsi que l'un des facteurs n ou $n + 1$, le produit est toujours divisible par 4; et si n est un multiple de 3 augmenté de 1, le facteur $3n^2 - n - 2$ est divisible par 3. Donc le produit est bien divisible par 12.

On donne un demi-cercle AB *et une perpendiculaire* PN *au diamètre telle que* AP $= b$. *On demande de mener par le point* A *une corde rencontrant* PN *en* H, *et la circonférence en* C *de telle sorte que* HC $=$ R.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Abaissons du point C la perpendiculaire CD, et posons AH $= x$.

Les triangles rectangles AHP, ACD sont semblables et donnent

$$\frac{x}{R+x} = \frac{b}{AD}.$$

D'autre part, on a, puisque AC est une corde et AD sa projection, $AD = \frac{(R + x)^2}{2R}$

Donc l'équation est, en supprimant le facteur $R + x$, qui ne peut être nul, $x = \frac{2bR}{R + x}$

Il est facile de résoudre cette équation. Nous avons supposé ici que le segment HC faisait suite au segment AH; on pourrait étudier la question en supposant que le point C est entre A et H ; le problème n'est pas plus difficile à traiter.

De chaque côté du centre O *d'un cercle, on prend* OC = OD = a, *sur le diamètre* AB ; *déterminer un point* M *sur la circonférence tel que* $OM^2 = MC \cdot MD$.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

La ligne OM étant médiane, on a

$$MC^2 + MD^2 = 2a^2 + 2OM^2;$$

et, par suite de la relation donnée, on trouve

$$(MD - MC)^2 = 2a^2.$$

On aura aussi, en ajoutant $2OM^2$ de part et d'autre,

$$(MD + MC)^2 = 2a^2 + 4OM^2.$$

Il sera dès lors très facile de construire la somme et la différence des côtés MD et MC, et par suite de trouver le point M.

On pourrait trouver aussi facilement la projection du point M sur le diamètre; en effet, on sait que l'on a

$$MD^2 - MC^2 = 4a \times OB.$$

Si l'on multiplie membre à membre les deux égalités précédentes, on trouve

$$16a^2 \times OB^2 = 4a^2(a^2 + 2OM^2).$$

Par suite, on construira très facilement la ligne OB.

Trouver, pour x = 1, *la valeur de*

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[p]{x} - 1}.$$

Posons $x = y^{mp}$; alors il vient

$$\sqrt[m]{x} = y^p; \quad \sqrt[p]{x} = y^m,$$

et l'expression devient, en supprimant haut et bas le facteur $y - 1$,

$$\frac{y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots + 1}{y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots + 1}$$

et pour $y = 1$, ce qui donne aussi $x = 1$, on trouve

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[p]{x} - 1} = \frac{p}{m}.$$

Application:
$$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

pour $x = 1$, a pour valeur $\frac{5}{3}$.

Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un trièdre rectangle coupe ce trièdre suivant un triangle rectangle.

Le théorème est évident lorsque le plan est perpendiculaire à l'arête du dièdre droit.

Soit un angle trièdre SABC, dont le dièdre suivant SC est droit; je mène un plan ABC perpendiculaire à l'arête SB; il est par suite perpendiculaire au plan BSC; or le plan ASC est aussi perpendiculaire à BSC; donc l'intersection AC de ces deux plans est perpendiculaire à la face BSC, et par suite à la droite BC.

Ce théorème nous permet de résoudre facilement le problème suivant.

Étant données deux droites SA *et* SB *qui se coupent, par* SA *on mène un plan et par* SB *un plan perpendiculaire au précédent: trouver le lieu des droites d'intersection.*

Si je mène un plan perpendiculaire à la droite SA, ce plan coupera le trièdre formé par ASB et les deux plans mobiles suivant un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit sera sur l'arête SC; donc le point C d'intersection de cette arête mobile avec le plan que je viens de mener sera sur un cercle ayant pour diamètre l'intersection de ce plan et du plan ASB. Il en résulte que la surface engendrée par l'intersection des plans mobiles est un cône oblique à base circulaire; les deux directions de sections circulaires sont les deux plans perpendiculaires aux arêtes SA et SB.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE SAINT-CYR

Problèmes de mécanique.

Un parallélépipède rectangle pesant s'appuie par une de ses faces sur un plan horizontal; il est en outre sollicité par une force horizontale située dans le plan vertical passant par son centre de gravité et perpendiculaire à l'une des faces latérales. Examiner si le corps glissera sur le plan horizontal, ou tournera autour de l'arête.

— Trois forces qui se font équilibre sont représentées, en grandeur et en direction, par les perpendiculaires abaissées d'un point sur les côtés d'un triangle. Trouver la position de ce point.

— Un poids P placé sur un plan incliné parfaitement poli, est relié à un poids Q par un fil passant sur une poulie située au sommet du plan incliné; étudier les lois du mouvement de ce système.

— Trouver le centre de gravité de la figure formée par un triangle équilatéral et un carré, la base du triangle coïncidant avec le côté du carré.

— Un projectile est lancé avec une vitesse v, faisant un angle α avec l'horizon. Trouver au bout de combien de temps il repassera dans le même plan horizontal.

— Déterminer avec quelle vitesse il faut lancer un projectile le long d'un plan incliné pour que le temps qu'il emploierait à parcourir la longueur du plan soit égal au temps qu'un mobile tombant librement du repos mettrait à parcourir la hauteur du même plan.

— Calculer l'inclinaison d'un plan, sachant que si l'on abandonne, du point le plus élevé, deux corps pesants, l'un sur le plan, l'autre verticalement, le temps employé par le premier pour parcourir le plan est n fois le temps employé par le second pour parcourir la hauteur du plan.

— Sous l'action d'une certaine force, un corps pesant 100 kilogrammes s'élève d'un mouvement uniforme suivant la ligne de plus grande pente d'un

plan incliné de 45° sur l'horizon. Trouver la grandeur de la force qui agit sur ce corps en la supposant : 1° parallèle à la longueur du plan ; 2° parallèle à la base du plan ; le coefficient de frottement est 0,30.

— Une tige homogène AB, de longueur l et de poids π, est mobile autour d'un point A ; au point C, tel que $AC = d$, on applique un poids P. On demande à quelle distance AD du point A il faut appliquer une force Q perpendiculaire à la tige pour qu'il y ait équilibre.

— Étant donnée une circonférence, on lui circonscrit un polygone quelconque ; si l'on considère le centre de gravité g du périmètre de ce polygone, le centre de gravité G de la surface et le centre O de la circonférence, les trois points O, G, g, sont en ligne droite. Trouver le rapport de OG à Og.

— En quel point de la surface totale d'un prisme triangulaire oblique faut-il suspendre ce corps par un fil de façon que, sous l'influence de la pesanteur, les arêtes latérales prennent une direction parallèle ou perpendiculaire à celle du fil ?

— Une tige AB, de poids P, de centre de gravité C, est mobile autour d'un de ses points O ; un fil AHK, attaché à l'extrémité A, passe sur une poulie très petite H, dont le rayon sera considéré comme nul, et qui est situé verticalement au-dessus du point O, puis retombe en HK le long de la verticale. On connaît $OH = h$; on demande quel poids il faut suspendre à l'extrémité K du fil pour qu'il y ait équilibre lorsque les deux parties du fil font un angle donné $AHK = \theta$.

— Trois hommes ont à transporter une plaque homogène et d'égale épaisseur, ayant la forme d'un parallélogramme ; l'un d'eux prend la plaque par un sommet ; on demande en quels points du contour les deux autres porteurs doivent la saisir pour que le poids soit également réparti entre les trois hommes.

— Une boîte cubique sans couvercle est suspendue par un des sommets de la base supérieure ; elle est vide, et ses parois sont d'épaisseur uniforme, mais négligeable ; trouver la position d'équilibre.

— Une plaque triangulaire homogène, pesante, et assimilable à un plan est suspendue par trois fils attachés aux trois sommets du triangle ; lorsqu'il y a équilibre, la plaque est horizontale. Trouver une relation entre les longueurs α, β, γ, des fils, et les côtés respectivement opposés dans le triangle.

— Si trois mobiles, placés aux sommets d'un triangle, partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés dans le même sens avec des vitesses proportionnelles à ces côtés, leur centre de gravité reste immobile.

— Déterminer la position d'équilibre d'un système de deux mobiles pesants égaux assujettis à rester sans frottement sur une circonférence, située dans un plan vertical, et sur une tige rigide susceptible de se mouvoir librement autour d'un point A pris sur le diamètre horizontal de la circonférence.

REMARQUES SUR LES FIGURES HOMOTHÉTIQUES

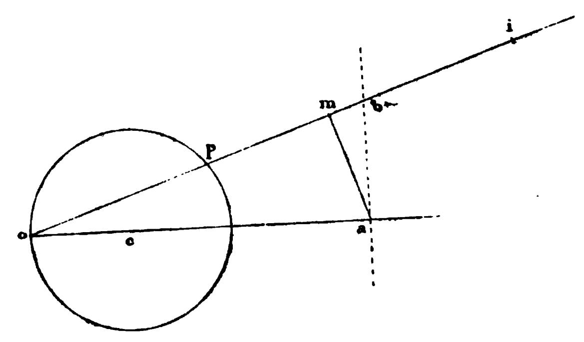
ET LES FIGURES INVERSES

Par MAURICE **d'Ocagne**.

I. — Considérons deux figures, courbes ou surfaces, homothétiques par rapport au point o. Tirons par ce point une

sécante quelconque qui coupe les deux figures respectivement en m et p. Prenons sur cette sécante un point i tel que
$$\frac{om}{pi} = h,$$
h étant une constante. Nous avons de plus
$$\frac{om}{op} = k.$$
Donc
$$\frac{op}{pi} = \frac{h}{k} \text{ ou } \frac{op}{op + pi} = \frac{h}{k + h},$$
c'est-à-dire
$$\frac{op}{oi} = \frac{h}{k + h}.$$

La figure décrite par le point i, lorsque la sécante pivote



autour du point o, est donc homothétique à la figure décrite par p et par suite à celle décrite par m.

II. — Considérons maintenant deux figures, courbes ou surfaces, inverses par rapport au point o. Une sécante quelconque menée par ce point coupe ces deux figures respectivement en m et p. Prenons sur cette sécante un point i tel que
$$om.pi = h.$$
Mais nous avons
$$om.op = k.$$
Donc
$$\frac{pi}{op} = \frac{h}{k}$$
ou
$$\frac{oi}{op} = \frac{h + k}{k}.$$

La figure décrite par le point i est donc homothétique,

par rapport à o à la figure que décrit le point p et, par suite, inverse par rapport à o de la figure que décrit le point m.

Pour faire ressortir l'utilité qui s'attache à ces remarques, je vais successivement les appliquer à un exemple très simple. *Autour de l'extrémité* o *du diamètre* oc *de la circonférence* c, *pivote une sécante* op *coupant cette circonférence en* p. *D'un point fixe* a *pris sur* oc, *on abaisse la perpendiculaire* am *sur la sécante et on porte sur cette sécante la longueur* mi = op *: trouver le lieu du point* i.

Première solution. — Le lieu du point m est la circonférence décrite sur oa comme diamètre ; cette circonférence est homothétique à la circonférence c par rapport au point o. Mais

$$\frac{mi}{op} = 1.$$

Donc, d'après la première remarque, le lieu du point i est homothétique à la circonférence c par rapport à o ; c'est, par suite, une circonférence passant par o et ayant son centre sur oa.

Deuxième solution. — Élevons à oa, en a, la perpendiculaire ao qui coupe la sécante mobile au point b. La droite ab peut être considérée comme inverse de la circonférence c par rapport à o. Mais

$$ob.pi = ob.om = oa^2,$$

qui est constant.

Donc, d'après la seconde remarque, le lieu du point i est homothétique de la circonférence c par rapport au point o; nous sommes ramenés à la même conclusion que précédemment.

INTERSECTION
DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ, DONT LES AXES NE SONT PAS SITUÉS DANS UN MÊME PLAN

Par M. **L. Geoffroy**, répétiteur à l'Ecole Centrale, professeur au collège Chaptal.

On n'examine pas, à l'ordinaire, dans les cours de géométrie descriptive, la question qui fait l'objet de cette note; elle a été écartée des programmes officiels et, dans l'esprit des élèves, il y a là une sorte de lacune qu'ils attribuent volontiers à l'impuissance de la méthode graphique.

Dans les ouvrages destinés à l'enseignement, on se contente de considérer le problème actuel comme un cas particulier du problème général de l'intersection de deux surfaces du second degré. On choisit les plans de projection d'une manière convenable, et on prend des plans sécants auxiliaires, qui donnent dans l'une des surfaces (si cela est possible) des sections elliptiques se projetant suivant des cercles; les plans auxiliaires, déplacés parallèlement à eux-mêmes, donnent dans l'autre surface des sections semblables se projetant suivant des courbes homothétiques; on trace l'une de ces courbes avec le plus grand soin, et elle permet d'obtenir, par le déplacement des projections circulaires des sections de la première surface, tous les points de l'intersection des deux surfaces.

(Voir la *Géométrie descriptive* de Kiæs.)

Nous nous sommes proposé de chercher une solution directe du problème, pour le cas particulier de deux surfaces de révolution du second degré, dont les axes sont placés d'une manière quelconque l'un par rapport à l'autre.

Cette solution est fondée sur le théorème suivant.

Deux surfaces du second degré, circonscrites à une même troisième surface également du second degré, se coupent suivant deux courbes planes.

Considérons deux sphères inscrites respectivement dans chacune des surfaces de révolution données, et imaginons les deux cônes qui, ayant pour sommets les centres de similitude directe (S) ou inverse (T) des deux sphères considérées, sont circonscrits à ces sphères. Prenons l'un de ces cônes, S par exemple; il coupe chacune des surfaces de révolution suivant deux courbes planes, en raison du théorème que nous rappelons plus haut.

Désignons par A et B les courbes planes déterminées par le cône sur la première surface; et par C et D les courbes planes situées sur la seconde surface, les courbes A et C, par exemple, étant situées sur le cône S, auront deux points communs réels ou imaginaires. Ces deux points appartiendront à l'intersection cherchée ; ils sont d'ailleurs situés sur l'intersection des plans des courbes A et C. On pourra donc les construire en cherchant l'intersection de la droite commune à ces deux plans avec le cône S.

Chaque cône auxiliaire fournira huit points; car les plans A et B coupent C et D suivant quatre droites, qui rencontrent elles-mêmes le cône S en huit points réels ou imaginaires.

La question est ainsi ramenée au problème simple : Trouver l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution.

Pour simplifier les constructions, on choisira le plan vertical, parallèle à la fois aux axes des deux surfaces, et on prendra le plan horizontal perpendiculaire à l'un des axes.

Le contour apparent du cône S s'obtient immédiatement, puisqu'il est formé par les tangentes communes aux contours apparents des deux sphères.

Pour obtenir les courbes planes communes à l'une quelconque des surfaces de révolution et au cône S, on ramènera l'axe de ce cône parallèlement au plan vertical, en le faisant tourner autour de l'axe de la surface de révolution considérée. Les courbes planes seront alors projetées verticalement suivant deux lignes droites; on aura ainsi les plans des deux courbes planes qu'on ramènera par une rotation contraire à la précédente dans leur position véritable.

Ayant effectué la même construction pour l'autre surface,

on n'aura plus qu'à construire les quatre droites suivant lesquelles le couple des plans A et B rencontre le couple C et puis D; on cherchera les intersections des quatre droites ainsi obtenues avec le cône de révolution.

Nous ferons remarquer que notre méthode, étant générale, s'applique au cas particulier de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent.

En prenant le plan vertical parallèle au plan des deux axes et l'un des axes étant perpendiculaire au plan horizontal, on peut substituer à l'emploi de la sphère de rayon variable décrite du point de concours des axes comme centre (ce qui ne donne à chaque opération que deux points de l'intersection) celui du cône S, qui donne huit points de l'intersection. On obtient immédiatement ces points dans le cas actuel, car les courbes planes A, B, C, D, sont projetées verticalement suivant des lignes droites, et on reporte facilement sur le plan horizontal les points obtenus en projection verticale à l'aide des parallèles de la surface de révolution dont l'axe est vertical.

Enfin nous terminerons par cette dernière remarque, que les deux sphères inscrites étant absolument arbitraires, on peut simplifier les constructions, en laissant l'une d'elles fixe pendant tout le cours de l'exécution de l'épure.

BACCALAURÉAT

PARIS

Le côté de la base d'une pyramide hexagonale régulière est a; sa hauteur est h; exprimer, au moyen de a et de h, le cosinus de l'angle formé par deux faces latérales adjacentes.

— On donne les deux traces d'un plan et la projection horizontale p du pied P de la perpendiculaire MP menée du point M de l'espace sur ce plan; la longueur de cette perpendiculaire est l; trouver les projections du point M.

— Dans le demi-cercle ADA', on mène la corde BB' parallèle au diamètre AA', à une distance de ce diamètre égale à la moitié du rayon. Exprimer le volume du solide décrit par la rotation autour de AA' de la partie comprise entre ces deux parallèles.

— On donne une circonférence et un diamètre horizontal AB. Trouver sur la circonférence un point M tel que, en abaissant une perpendiculaire MP sur

AB, on ait MP + PA = m, m étant une quantité donnée. Quelles sont les valeurs que doit avoir m pour que le problème ait 0, 1 ou 2 solutions?

— Dans une progression arithmétique composée de trois termes, on donne la somme des termes, $2a$, et la somme de leur quatrième puissance, b^4; calculer le terme du milieu et la raison de la progression.

— Deux droites situées chacune dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre étant données par leurs traces, on propose de trouver les projections de leur perpendiculaire commune.

— Sur le diamètre AB d'un cercle de rayon donné R, on porte une longueur AC = x. Au point C, on élève au diamètre une perpendiculaire qui rencontre en D la circonférence AMB, et on achève le rectangle ACDE. Puis, on fait tourner la figure autour de AB. On propose de déterminer x de façon que le rapport du volume engendré par le segment ACDM au volume engendré par le rectangle ACDE ait une valeur déterminée k. — Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre le nombre k pour que le problème soit possible?

MARSEILLE

Dans un cercle ayant un rayon égal à 3^m, la corde AB sous-tend un arc de 30°; la corde BC sous-tend un arc de 60°. On demande la surface ABCMA comprise en les deux cordes et la circonférence.

— Résoudre un triangle rectangle dont on donne la bissectrice et la médiane issues d'un même sommet. *(Cas où ce sommet est le sommet de l'angle droit; cas où c'est le sommet d'un angle aigu;* ces deux cas différents ne sont pas *indiqués* dans l'énoncé, qui est ainsi incomplet.)

— Angle d'une droite parallèle au plan vertical, et d'un plan passant par la ligne de terre et un point.

BESANÇON

— Étant donné un triangle isoscèle dont l'angle au sommet est A, on prend sur la base un point M, et on abaisse des perpendiculaires MP et MQ. 1° Exprimer la surface du quadrilatère APMQ; on désignera par A l'angle au sommet, par a la base, par p et q les distances MP et MQ; 2° déterminer la position du point M de telle sorte que la surface soit maxima ou minima.

— Appliquer la première partie au cas où l'on a

$$A = 32^\circ\ 27'\ 14''$$
$$a = \sqrt{5}\ ;\ p = \sqrt{2}\ .$$

— On lance de bas en haut, avec une vitesse v, un corps pesant sur un plan incliné d'un angle α à l'horizon; ce corps s'arrête en un point M dont on demande la distance à l'origine. Trouver en outre le lieu décrit par le point M lorsque l'inclinaison α du plan varie de 0 à 90°.

— Trouver la limite vers laquelle tend l'expression

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - x\sqrt{3}$$

quand x tend vers l'infini.

ÉCOLE DES MINEURS DE SAINT-ÉTIENNE, 1881

Mathématiques.

Calculer à un dix-millième près, le volume d'une sphère dont le rayon est $n\sqrt{2}$ (Chaque candidat prendra pour la valeur de n son numéro de passage).

— Résoudre et discuter

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$\log x + \log y = n$$

— On a un cône droit à base circulaire dont les génératrices sont indéfiniment prolongées des deux côtés du sommet, on le coupe par un plan perpendiculaire à l'axe. On demande de mener un second plan parallèle au premier, de façon que la surface latérale du solide compris entre les deux plans soit dans un rapport déterminé avec la somme des deux bases. Discuter.

Physique.

— Une machine pneumatique permet de faire le vide à $0^m,001$ de mercure; à quel degré de vide arrivera-t-on en appliquant le perfectionnement de Babinet?

— Une sphère de rayon R, de densité $\frac{1}{1+\alpha}$, est plongée dans l'eau distillée à 4°. De quelle hauteur s'enfoncera-t-elle dans le liquide? (Chaque candidat prendra pour α son numéro de passage.)

— Une substance transparente est taillée en prisme d'angle de 60°. Un rayon lumineux traversant cette substance sous l'angle de déviation minima, subit une déviation de 39° 42' 40". Quel est l'indice de réfraction?

— Une lentille biconvexe est taillée sous deux faces sphériques de 1 mètre de rayon. On constate qu'un point lumineux, situé dans l'axe à 8 mètres de la lunette, fait son image de l'autre côté à $1^m,10$. Trouver l'indice de réfraction.

COLLÈGE ROYAL FRANÇAIS DE BERLIN

ÉPREUVES ÉCRITES POUR LES BACHELIERS

Pâques 1880

Trouver les quatres termes d'une proportion connaissant la différence des moyens, a; la différence des extrêmes, b; et la somme des carrés des quatre termes, c.

— Trouver les deux côtés de l'angle droit et la hauteur d'un triangle rectangle sachant que la somme de ces trois lignes est égale à b, et l'hypoténuse à a.

— Construction et résolution d'un triangle obliquangle, connaissant un

angle C, la somme s de ses deux côtés, et la différence d des hauteurs correspondantes.

— Trouver le rapport des aires des trois sphères inscrite, exinscrite et circonscrite à un octaèdre régulier.

Saint-Michel 1880

Résoudre
$$xy + xy^3 = 6$$
$$x + xy^2 + xy^4 = 9.$$

— Trouver le premier terme x, et la raison y, d'une proportion arithmétique connaissant le produit a, et la somme $5\,b$ de ses termes.

— Construire et résoudre un triangle obliquangle, connaissant le rayon ρ du cercle inscrit, l'angle A et le segment q du côté c adjacent à A et déterminé par la hauteur. Application :
$$\rho = 22,5;\ q = 11;\ A = 79°36'40''.$$

— Dans un vase en forme de cône droit équilatéral renversé, on a placé une sphère de rayon r, et versé assez d'eau pour recouvrir exactement la sphère. Quelle hauteur cette eau atteindra-t-elle dans le vase après qu'on aura retiré la sphère?

CONCOURS ACADÉMIQUES DIVERS

On donne un angle ABA'; on mène la bissectrice de l'angle supplémentaire CBA'; d'un point O de cette bissectrice on abaisse les perpendiculaires OD et OD' sur AC et A'B; on fait passer par les points O et B une série de cercles qui coupent les côtés de l'angle ABA' aux points P et P', Q et Q'....; démontrer que : 1° les cordes PP', QQ'... sont vues du point O sous un angle constant; 2° les perpendiculaires élevées au milieu des cordes PP', QQ'... passent par le point O; 3° les segments PQ, P'Q' sont égaux; 4° la droite DD' passe par le milieu des cordes PP'; 5° les différentes cordes sont tangentes à une même parabole dont le foyer est O et la tangente au sommet est DD'. Construire cette parabole et trouver les points de tangence des diverses cordes. *(Grenoble, 1867.)*

— Si dans une progression par différence, trois termes consécutifs a, b, c sont premiers absolus, la raison est divisible par 6, à moins que le premier terme ne soit 3; s'il y en a 5, la raison est divisible par 30, à moins que le premier terme ne soit 5; s'il y en a 7, la raison est divisible par 210, à moins que le premier terme ne soit 7. (On suppose que le premier terme de la progression n'est pas 1). *(Poitiers, 1869.)*

— Résoudre l'équation
$a\cos^2 x + (2a^2 - a + 1)\sin x - 3a + 1 = 0$ *(Montpellier, 1868)*

— Étant donné un cercle et un diamètre AB, on mène une corde quelconque AC, et on la prolonge d'une longueur CD = AC; on joint le point D au centre du cercle, et on mène BC; lieu des points d'intersection de BC et de DO. *(Montpellier, 1868.)*

— Les trois angles d'un triangle sont en progression arithmétique, la somme des carrés de leurs sinus est égale à 2; quelles relations y a-t-il entre les côtés? *(Montpellier, 1869.)*

— Étant données deux parallèles coupées par une sécante, inscrire entre ces deux droites deux cercles tangents extérieurement l'un à l'autre, et tels que l'un soit tangent à la première parallèle et à la sécante, et l'autre tangent à la seconde parallèle et à la sécante. Solution géométrique et solution analytique.

(*Montpellier*, 1875.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1881

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde. On considère les droites D telles que si, par chacune d'elles, on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact M et M' soient dans un même plan. — 1° Démontrer que la droite D et la droite de contact MM' sont rectangulaires. — 2° Trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné A. — 3° Ce lieu est un cône du second degré; trouver le lieu des positions du point A pour lesquelles ce cône est de révolution. — 4° Trouver l'enveloppe C des droites D qui sont contenues dans un plan donné P, et la surface S engendrée par C quand P se déplace parallèlement à un plan donné Q. — 5° Trouver pour quelles directions de Q la surface S est de révolution.

Mathématiques élémentaires.

Résoudre un triangle, connaissant le côté a, l'angle B, et la différence $b - h = l$ entre le côté b et la hauteur h issue du sommet A. Discuter.

Montrer que le problème peut être ramené à la recherche des points où le côté AB rencontre une parabole ayant pour foyer le sommet C du triangle et pour directrice une parallèle au côté BC. Discuter à nouveau le problème, et comparer les résultats des deux discussions.

Mécanique.

(*Cette composition porte sur un sujet désigné à l'avance.*)

Théorie. — Montrer que l'étude du mouvement d'un corps solide qui peut tourner librement autour d'un point fixe, et qui est soumis à l'action de forces qui sont connues pour chaque position du corps solide, dépend de l'intégration de six équations différentielles du premier ordre. Établir ces équations.

Application. — Effectuer cette intégration dans le cas où deux des axes principaux d'inertie du corps relatifs au point fixe sont égaux, et où aucune force extérieure n'agit sur lui.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

Algèbre et Trigonométrie.

Calculer avec toute l'exactitude des tables à sept décimales la valeur de l'angle u donné par l'équation

$$u - e \sin u = m. \qquad (1)$$

pour $m = 48°$, $e = 0,167$.

On en déduira le rayon r et l'angle v au moyen des relations

$$r = 1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}.$$

NOTA. — Dans le calcul de l'équation (1), u devant être exprimé en parties du rayon, sera multiplié par 206265″.

Géométrie descriptive.

Si sur les cordes d'une ellipse, menées parallèlement à une direction donnée, comme diamètres, on décrit des circonférences, l'enveloppe de celles-ci sera une ellipse. Pour démontrer cette proposition, on considérera l'ellipse donnée comme la projection oblique sur un certain plan du contour d'une sphère. On fera une épure ou croquis de la figure à main levée.

Mécanique.

Théorie du pendule simple dans le vide, pour des oscillations extrêmement petites. Application.

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, *deuxième volume, premier fascicule, par* **M. Jurisch,** *professeur à l'école Colbert. — Paris, librairie Delagrave.*

Nous avons, il y a un an, signalé à nos lecteurs l'apparition du premier volume de cet ouvrage; la seconde partie, qui vient de paraître, comprend les trièdres, les plans tangents, les sections planes du cône, et la méthode des plans cotés.

On voit que les deux volumes parus comprennent ainsi tout le programme de Saint-Cyr; et nous signalons avec plaisir l'extension donnée par l'auteur à la méthode des plans cotés; M. Jurisch a repris rapidement, par cette méthode, si importante dans la pratique, les principales questions qu'il a traitées avec plus de détails dans la méthode des deux projections; c'est ainsi par exemple qu'il a montré comment on peut mener les plans tangents au cône et au cylindre en projection cotée. Les indications suffiront aux élèves pour leur donner une idée bien précise de la méthode, et les engager à refaire en projection cotée un certain nombre d'épures qu'ils auront exécutées d'autre part à l'aide de deux plans de projection; c'est le meilleur moyen pour eux de reconnaître que les deux méthodes ne présentent pas plus de difficultés l'une que l'autre.

Après les sections planes du cône, l'auteur a mis les énoncés de cinquante problèmes, choisis pour la plupart dans les questions d'examen ou de concours pour les écoles; ce sont les meilleurs exercices que l'on puisse donner comme préparation à des élèves.

En terminant, nous pouvons dire que, grâce à cette méthode qui consiste à ne pas laisser passer une question de détail sans la signaler à ses lecteurs, M. Jurisch nous a donné, pour la préparation au baccalauréat et à l'école Saint-Cyr, un guide très précieux dans l'ensemble de ses deux volumes; les

candidats à l'École militaire auront appris les meilleures constructions pratiques pour l'exécution d'une épure; et nous croyons que, en étudiant sérieusement cet ouvrage, plus d'un élève prendra du goût pour l'étude de la géométrie descriptive, dont il aura pu apprécier les méthodes si simples et si générales.

A. M.

ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1879

Solution par M. J. **Braun** élève du lycée Charlemagne (*).

On donne une conique rapportée à ses axes $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$, *et un point* M *sur cette conique.*

1° *Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point* M, *on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique* K *passant par l'origine* O *des axes.*

2° *Si autour du point* O *on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique* K *en deux points. Prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points, est la droite perpendiculaire au milieu du segment* OM.

3° *Par le point* O *on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point* O, *trois autres normales à la conique* K.

Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère ($A = 1$, $B = -1$), *montrer qu'une seule de ces normales est réelle.*

4° *Calculer les coordonnées de son pied.*

5° *Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.*

Dans ce qui va suivre, nous désignerons les coordonnées du point M par x_1 y_1.

PREMIÈRE PARTIE. — Soit $y = mx$ l'équation d'un diamètre de la conique. La deuxième corde d'intersection du cercle

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

avec cette conique passe par le point M, et elle est symétrique de la première par rapport aux axes; son équation est donc $y - y_1 = - m(x - x_1)$.

L'équation d'une conique passant par les points d'intersection de la conique donnée et des deux droites précédentes est

$$(y - mx)[y - y_1 + m(x - x_1)] + \lambda\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1\right) = 0$$

Pour que cette conique soit un cercle, il faut et il suffit que l'on ait $\frac{\lambda}{A} - m^2 = \frac{\lambda}{B} + 1$

ou $$\lambda = (1 + m^2)\frac{AB}{B - A}.$$

En portant cette valeur dans l'équation ci-dessus, ordonnant et simplifiant, l'équation générale du cercle devient

$$\frac{Am^2 + B}{B - A}(x^2 + y^2) + (mx - y)(mx_1 + y_1)$$
$$- \frac{AB}{B - A}(1 + m^2) = 0,$$

Les coordonnées du centre de ce cercle sont données par les deux relations

$$\left.\begin{array}{l} 2x\,\dfrac{Am^2 + B}{B - A} + m(mx_1 + y_1) = 0 \\ 2y\,\dfrac{Am^2 + B}{B - A} - (mx_1 + y_1) = 0 \end{array}\right\} \alpha.$$

L'élimination de m entre ces deux équations donne le lieu du centre.

En divisant membre à membre on voit que $\frac{x}{y} = - m.$

Ce qui pouvait être prévu, car le centre du cercle se trouve sur la perpendiculaire en O au diamètre $y = mx$.

Remplaçant m par $-\frac{x}{y}$ dans la seconde des équations (α), elle devient

$$2y\left(A\frac{x^2}{y^2} + B\right) + (A - B)\left(-\frac{x}{y}x_1 + y_1\right) = 0$$

ou, en supprimant le facteur étranger $y = 0$,

$$2(Ax^2 + By^2) + (A - B)(yy_1 - xx_1) = 0. \quad (1)$$

Cette équation représente une conique K ayant ses axes parallèles à ceux de la conique donnée et passant par l'origine. La tangente en ce point est $yy_1 = xx_1$. Par suite la normale a pour équation $yx_1 + xy_1 = 0$; cette droite est symétrique de la droite $\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$ par rapport à Ox. Donc la normale OM′ à la conique K au point O est symétrique de OM par rapport à Ox.

La conique K rencontre Ox au point D : $x = \frac{A - B}{2A} x_1$.

Elle rencontre Oy au point E : $y = -\frac{A - B}{2B} y_1$.

Les points D et E peuvent s'obtenir par une construction géométrique. En effet la droite DE a pour équation

$$Byx_1 - Axy_1 + \frac{A - B}{2} x_1 y_1 = 0. \quad (\beta)$$

Cette droite est parallèle à la normale en M à la conique donnée, car cette normale est

$$\frac{Ax}{x_1} - \frac{By}{y_1} = A - B.$$

De plus, si l'on fait $x = \frac{x_1}{2}$, $y = \frac{y_1}{2}$, l'équation (β) étant satisfaite, on voit que DE passe par le milieu C de OM.

De ces deux remarques on déduit la construction des points DE.

Le centre I de la conique K a pour coordonnées

$$x = \frac{A - B}{4A} x_1, \quad y = -\frac{A - B}{4B} y_1. \quad (\gamma)$$

Ce point I est le milieu du segment DE. Il s'ensuit que le point F, quatrième sommet du rectangle construit sur OD et OE, appartient également à la conique K, qui est maintenant déterminée, puisque l'on connaît quatre points O, D E, F, et la tangente en O. On peut remarquer que le point F est le milieu du segment intercepté par les axes sur la normale en M à la conique donnée.

Nous allons montrer que la conique K est semblable à la conique donnée.

En effet, l'invariant absolu $\frac{(A+A')^2}{B^2-AA'}$ est ici, pour la conique donnée,

$$\frac{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)^2}{-\frac{1}{AB}}=\frac{(A+B)^2}{-AB}$$

et pour la conique K $\frac{(A+B)^2}{-AB}$.

Donc ces deux coniques sont semblables.

D'ailleurs, si l'on transporte les axes parallèlement a eux-mêmes au point I, par les formules

$$x=X+\frac{A-B}{4A}x_1,\quad y=Y-\frac{A-B}{4B}y_1,$$

l'équation (1) devient

$$2(AX^2+BY^2)-\frac{1}{2}\frac{(A-B)^2}{4}\left(\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}\right)=0$$

ou $$AX^2+BY^2=\left(\frac{A-B}{4}\right)^2. \qquad (2)$$

Si maintenant on fait tourner la conique K de 90° autour du point I, son équation (2) deviendra, par la simple permutation de X en Y,

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=\frac{(A-B)^2}{16AB}. \qquad (2\ bis)$$

Ce qui montre qu'après cette rotation la conique K est homothétique de la conique donnée. On déduit de là en particulier que :

Les asymptotes de la conique K *sont perpendiculaires à celles de la conique donnée.*

Enfin l'équation (2), étant indépendante de x_1 y_1, montre que

Lorsque le point M *parcourt l'ellipse donnée, la conique* K *reste invariable de forme et de grandeur. Elle ne fait que se déplacer parallèlement à elle-même.*

Il s'ensuit que dans ce mouvement du point M, le point I, centre de la conique K, décrit lui-même la conique

$$Ax^2 + By^2 = \left(\frac{A - B}{4}\right)^2$$

égale à la conique K.

Deuxième partie. — D'après le théorème de Frégier, la droite qui joint les extrémités des deux rayons rectangulaires issus de O, passe par un point fixe situé sur la normale OM' en O. Comme OD et OE sont rectangulaires, il en résulte que le point fixe en question n'est autre que le point G, intersection de DE avec OM'.

Cela posé, il est évident que le lieu demandé est la polaire du point G par rapport à la conique K. C'est donc déjà une droite. Il s'agit de reconnaître qu'elle est perpendiculaire à OM et passe par le milieu C de ce segment.

Le point G étant défini par l'équation (β) qui représente DE et $\frac{y}{y_1} = -\frac{x}{x_1}$ qui représente OM', les coordonnées sont

$$x' = \frac{A - B}{2(A + B)} x_1 \text{ et } y' = -\frac{A - B}{2(A + B)} y_1. \quad (\delta)$$

Par suite sa polaire par rapport à la conique K a pour équation

$$x(4Ax' - (A - B)\, x_1) + y\,(4By' + (A - B)\, y_1) + (A - B)(y'y_1 - x'x_1) = 0$$

ou bien

$$xx_1\left(\frac{2A}{A + B} - 1\right) + yy_1\left(\frac{-2B}{A + B} + 1\right) + (x_1^2 + y_1^2)\frac{A - B}{-2(A + B)} = 0$$

ou enfin $$xx_1 + yy_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}.$$

Cette droite est bien perpendiculaire à la droite OM $\left(\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}\right)$ et elle passe bien par le point C, dont les coordonnées sont $\frac{x_1}{2}$ et $\frac{y_1}{2}$.

TROISIÈME PARTIE. — Dans le cas où l'on a $A = 1$, $B = -1$, l'équation (1) devient

$$x^2 - y^2 + yy_1 - xx_1 = 0. \qquad (4)$$

La conique K est donc aussi une hyperbole équilatère; d'ailleurs il ne pouvait pas en être autrement, puisque la conique K et la conique donnée sont semblables.

Nous allons faire voir que si d'un point d'une hyperbole équilatère on cherche à abaisser des normales à la courbe, deux de ces normales sont toujours imaginaires.

Prenons, en effet, des axes parallèles aux asymptotes, et l'origine au point d'où l'on abaisse les normales.

L'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$xy = ax + by. \qquad (\varepsilon)$$

L'hyperbole aux pieds des normales abaissées de l'origine aura pour équation

$$\frac{x}{y-a} = \frac{y}{x-b}$$

ou

$$x^2 - y^2 - bx + ay = 0. \qquad (\varphi)$$

Il s'agit de trouver les points communs aux deux courbes (ε) et (φ). Éliminons y entre ces deux équations, il vient

$$x^2 - \frac{a^2x^2}{(x-b)^2} - bx + \frac{a^2x}{x-b} = 0;$$

ou bien, en supprimant la solution $x = 0$ qui correspond à la normale qui a son pied en O, puis simplifiant l'équation :

$$(x-b)^3 = a^2b.$$

Cette équation n'a évidemment qu'une racine réelle, savoir :

$$x = b + \sqrt[3]{a^2b};$$

à laquelle correspond l'ordonnée

$$y = a + \sqrt[3]{ab^2}.$$ Ainsi

D'un point quelconque O *d'une hyperbole équilatère* $xy = ax + by$, *on ne peut abaisser qu'une normale réelle à la courbe, et les coordonnées de son pied sont*

$$x = b + \sqrt[3]{a^2b}, \quad y = a + \sqrt{ab^2}. \qquad (5)$$

QUATRIÈME PARTIE. — Le résultat précédent va nous servir à résoudre la question proposée pour l'hyperbole (4).

Faisons tourner les axes de 45° autour de O; les formules

de transformation sont

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \qquad (\lambda)$$

et par suite l'équation (4) devient dans ce système

$$XY = \frac{y_1 - x_1}{2\sqrt{2}} X + \frac{y_1 + x_1}{2\sqrt{2}} Y. \qquad (4 \textit{ bis})$$

En appliquant à cette équation les formules (5), nous trouvons pour les coordonnées de la normale réelle

$$X = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[x_1 + y_1 + \sqrt[3]{(y_1 - x_1)^2 (y_1 + x_1)} \right]$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[y_1 - x_1 + \sqrt[3]{(y_1 - x_1)(y_1 + x_1)^2} \right]$$

Il faut maintenant revenir aux axes primitifs, ce qui se fait immédiatement au moyen des formules (λ). Les coordonnées cherchées sont alors définitivement

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{2} + \frac{1}{\ }\sqrt[3]{x_1^2 - y_1^2}\left[\sqrt{x_1 - y_1} + \sqrt[3]{x_1 + y_1}\right] \\ y &= \frac{y_1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x_1^2 - y_1^2}\left[\sqrt[3]{x_1 - y_1} - \sqrt[3]{x_1 + y_1}\right] \end{aligned}\right\} (6)$$

Troisième et quatrième partie. — *Autre solution.* — On peut parvenir aux formules (6) par une autre méthode, sans effectuer aucune rotation d'axes.

L'hyperbole passant par les pieds des normales abaissées de l'origine sur l'hyperbole (4) a pour équation :

$$\frac{x}{2x - x_1} = \frac{y}{2y + y_1}$$

ou $\qquad 4xy - xy_1 - yx_1 = 0. \qquad (7)$

Eliminons y entre les équations (4) et (7), il vient

$$x^2 - \frac{x^2 y_1^2}{(4x - x_1)^2} + \frac{xy_1^2}{4x - x_1} - 2x_1 = 0$$

ou, en supprimant la solution $x = 0$,

$$(x - x_1)(4x - x_1)^2 - xy_1^2 + y_1^2 (4x - x_1) = 0.$$

Développant et simplifiant on a

$$16x^3 - 24x_1x^2 + 3x(3x_1^2 + y_1^2) - x_1(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

Pour discuter et résoudre cette équation débarrassons-la

de son second terme en posant $x = z + \frac{x_1}{2}$; $\quad (\mu)$

elle devient alors, après développement,

$$z^3 - \frac{3}{16} z (x_1^2 - y_1^2) - \frac{x_1}{2} \frac{x_1^2 - y_1^2}{16} = 0. \qquad (8)$$

Formons le caractère $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. On a ici

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \left[\frac{x_1^2 - y_1^2}{16}\right]^2 \frac{x_1^2}{16} - \frac{(x_1^2 - y_1^2)^3}{16^3} = \frac{(y_1^2 - y_1^2)^2 p_1^2}{16^3}$$

quantité essentiellement positive. L'équation (8) n'a donc qu'une seule racine réelle ; par conséquent on trouve de nouveau qu'il n'y a qu'une normale réelle.

La formule de Cardan, appliquée à l'équation (8) donne

$$z = \sqrt[3]{\frac{x_1}{4} \frac{x_1^2 - y_1^2}{16} + \frac{y_1}{4} \frac{x_1^2 - y_1^2}{16}}.$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{x_1}{4} \frac{x_1^2 - y_1^2}{16} - \frac{y_1}{4} \frac{x_1^2 - y_1^2}{16}}$$

ou $\quad z = \frac{1}{4} \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \left(\sqrt{x_1 + y_1} + \sqrt{x_1 - y_1}\right)$

On en déduit, en vertu de la relation (μ),

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{x_1^2 - y_1^2} \left[\sqrt[3]{x_1 + y_1} + \sqrt{x_1 - y_1}\right],$$

valeur conforme à celle déjà trouvée (6).

Quant à la valeur de y, on la déduirait de la précédente par la permutation des lettres x et y.

Cinquième partie. — Dans le cas général l'équation de l'hyperbole aux pieds des normales est

$$\frac{x}{4Ax - (A - B)x_1} = \frac{y}{4By + (A - B)y_1}$$

ou $\quad 4xy = xy_1 + yx_1. \qquad (7\ bis)$

Cette équation, étant indépendante de A et de B, montre que l'hyperbole ne dépend que du point M et non de la conique donnée. On peut encore énoncer ce résultat sous la forme suivante :

Si une conique K *est circonscrite à un rectangle variable* ODFE, *dont deux côtés* OD *et* OE *sont appliqués sur* O *et* Oy,

et dont la diagonale DE *passe par un point fixe* C; *si, de plus, la normale à cette conique en* O *est symétrique de* OC, *alors les pieds des normales abaissées de* O *sur ces différentes coniques seront sur une même hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles à* Ox *et* Oy, *et passant par* O *et* C, *et ayant son centre au milieu de* OC.

Revenons maintenant au problème proposé. Il s'agit de faire une combinaison des équations (1) et (7 *bis*), de manière à supprimer la solution commune $x = 0$, $y = 0$.

Pour cela nous écrirons ces équations sous la forme

Conique K : $x(2Ax - (A - B)x_1) + y(2By + (A - B)y_1) = 0$

et Hyperbole $\dfrac{x}{x_1 - 2x} = \dfrac{y}{2y - y_1}$

Remplaçant dans la première x et y par les quantités proportionnelles $x_1 - 2x$ et $2y - y_1$, il vient

$$(x_1 - 2x)[2Ax + (B - A)x_1] + (2y - y_1)[2By + (A - B)y_1] = 0$$

ou bien $$4(By^2 - Ax^2) + 2xx_1(2A - B) + 2yy_1(A - 2B) + (B - A)(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

Cette conique passe par les pieds des trois normales issues de O à la conique K, mais elle ne passe plus à l'origine.

Pour trouver l'équation du cercle demandé, écrivons la combinaison

$$4(By^2 - Ax^2) + 2xx_1(2A - B) + 2yy_1(A - 2B) + (B-A)(x_1^2 + y_1^2) + 2\lambda(Ax^2 + By^2) + \lambda(A - B)(yy_1 - xx_1) = 0$$

Pour que ce soit un cercle, il faut et il suffit que l'on ait $$2B + B\lambda = -2A + A\lambda$$

ou $$\lambda = 2\,\frac{A + B}{A - B}.$$

L'équation précédente devient alors

$$\frac{8AB}{A - B}(x^2 + y^2) + 2xx_1(A - 2B) + 2yy_1(2A - B) + (B - A)(x_1^2 + y_1^2) = 0$$

et la question est résolue.

EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881

Géométrie analytique.

On considère une hyperbole et une corde AB, perpendiculaire à l'axe transverse, par exemple; il existe deux cercles passant par les points A et B et tangents aux deux asymptotes. Démontrer que la distance des centres de ces cercles est constante, quelle que soit la corde principale AB considérée.

— Construire la courbe définie par les deux équations

$$y = \frac{t}{1-t}; \quad x = \frac{1+t}{(1-t)^2}.$$

— Lieu des milieux des cordes normales à une parabole.

— Construire $y^3 - xy + x = 0$.

— Asymptotes de $\rho^3(\sin\omega - 2\cos\omega) + \rho\cos\omega - 3 = 0$.

— Combien y a-t-il d'hyperboles équilatères passant par les points communs aux deux coniques $f = 0$, $\varphi = 0$; qu'arrive-t-il si les coniques sont, l'une et l'autre, des hyperboles équilatères? énoncer le théorème qui correspond à ce cas particulier remarquable.

— Surfaces qui correspondent à l'équation

$$x^2 + x^2 + z^2 + 2my(z + x) + 2zx = 1,$$

m étant un paramètre variable.

— Trouver le cône réciproque de

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0.$$

— Calculer le paramètre de la parabole

$$(ax + by)^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

— Que représente l'équation $xy - z^2 = 0$?

— Construire $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-3}$, les radicaux étant pris avec leur signe.

— Asymptotes de la courbe

$$(1 - 2\cos\omega)\rho^3 + 2\rho\sin\omega + 1 - 3\cos\omega = 0.$$

— Équation du second degré qui représente les tangentes menées à la parabole par un point donné.

— On donne la courbe $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'(x-d)(x-d')}$,

a, b, c, a', d, d' sont des nombres réels et on suppose $d > d'$; cette courbe aura des asymptotes; disposition de la courbe par rapport à l'asymptote $x = d$.

— Quelle est la surface représentée par l'équation

$$xy + yz + xz + 1 = 0?$$

— Quelle est la surface représentée par l'équation

$$xy + xz - x^2 + 1 = 0?$$

— Théorie des asymptotes en coordonnées polaires.

— Construire la courbe représentée par l'équation

$$y^2 = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-3}.$$

— Trouver l'équation du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée.

— Soient les deux équations homogènes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$
$$ax^3 + 3bx^2y + 3bxy^2 + dy^3 = 0;$$

représentant chacune un système de droites. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes aient une droite commune.

— Ecrire l'équation générale des surfaces du second degré renfermant l'axe des z; démontrer que tout plan passant par l'axe des z est tangent à la surface.

— Que devient l'équation générale des surfaces du second degré quand on prend pour axe des x et des z deux génératrices du cône asymptote, et pour axe des y le diamètre conjugué du plan des xz?

— Lieu des points de rencontre des génératrices rectangulaires de l'hyperboloïde à une nappe.

— Lieu des centres des sections faites dans une surface du second ordre par des plans passant par un point donné.

— On donne l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; chercher l'équation des plans parallèles à l'axe des y qui coupent la surface suivant deux droites.

— On donne l'un des foyers d'une hyperbole et l'un des sommets du rectangle construit sur les axes; trouver l'équation de la courbe.

— On donne une tangente à une conique, son point de contact et les foyers; trouver l'équation de la courbe.

— Etant donné un cône ayant son sommet à l'origine. on demande la condition pour qu'on puisse placer sur ce cône un trièdre trirectangle.

— Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à l'ellipse.

— On a une conique et deux points; par ces deux points, on mène les tangentes. Trouver l'équation de la conique qui passe par les quatre points de contact et par un point donné.

— On donne dans une surface de second ordre trois génératrices et la direction d'un plan cyclique. Trouver l'équation de la surface.

— Étant donnée l'équation $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x$, trouver l'équation générale des plans qui coupent la surface suivant une seule droite.

— Lieu des foyers d'une ellipse dont on connait un sommet situé sur le petit axe, et l'une des tangentes à l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux.

— On donne une ellipse; on mène la normale en un point M, et du centre on abaisse la perpendiculaire OP sur cette normale. Trouver le maximum et le minimum de OP, quand le point M décrit l'ellipse.

Algèbre.

Dérivée de $y = \text{arc sin } \sqrt{1 - \cos x}$.

— Arrangements de m lettres p à p; si l'on considère les arrangements de m lettres $(p - 1)$ à $(p - 1)$ et si, comme le veut la démonstration ordinaire, au lieu de placer les $m - p + 1$ lettres, successivement à la droite de l'arrangement A_m^{p-1} considéré, on le plaçait dans tous les intervalles, montrer que les arrangements ainsi formés se reproduiraient, et dire combien de fois chacun d'eux serait formé.

— Définition d'une fonction implicite. Dérivée d'une pareille fonction; que devient y' si, au point $x = a$, $y = b$, on a simultanément $f'_a(a, b) = 0$ $f'_b(a, b) = 0$? Pourquoi doit-on trouver y' par une équation du second degré?

— Définir le quotient de deux quantités imaginaires; démontrer qu'il y un système unique de solution.

— Chercher les racines de

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-3)^5} - 1 = 0.$$

— Dérivée de $y = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

— Dérivée de l'expression

$$y = \text{L} \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + \text{arc tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

— Dérivée de $$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x}}$$

— Dérivée de $y = \text{arc tg} \frac{a + bx}{b - ax}$;

la dérivée est celle de arc tg x; pourrait-on le voir *à priori*?

— Quand une équation a toutes ses racines réelles, peut-on remplacer les fonctions de Sturm par d'autres plus simples?

— Abaisser le degré d'une équation, sachant qu'il existe une relation entre deux racines.

— Étant donnée l'équation $x^4 - 2x^3 + ax - b = 0$, on demande la relation à établir entre a et b pour que la différence des deux racines de cette équation soit égale à une quantité donnée.

Mathématiques élémentaires.

Les trois plans menés par les arêtes d'un trièdre perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

— Les plans qui passent par les arêtes d'un trièdre et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

— On donne $\text{tg} \frac{x}{2} = z$; calculer x et $\cos x$.

— Définition de deux droites antiparallèles par rapport à un angle. Théorème fondamental.

— Chercher une expression de la somme

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots\ldots + \sin nx.$$

Étant donné un triangle sphérique dont les sommets sont situés sur un petit cercle et dont un des côtés passe par le pôle de ce petit cercle, on demande si l'angle opposé à ce côté est supérieur à un droit.

— Décomposer $(x^2 + x + 1)^2 + 1$ en un produit de deux facteurs réels du second degré.

— Entre quelles limites faut-il faire varier x pour que la fraction

$$\frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3}$$

soit plus grande que 1?

— Minimum de $\frac{x^4}{y^3}$, quand $x - y = \text{K}$.

— Si l'on retranche l'unité du carré d'un nombre premier, le reste est divisible par 24.

— Entre quelles limites faut-il faire varier x pour que l'inégalité.

$$\frac{3x^4 - 2x^2 + 22}{x^4 - 12x^2 + 35} > 2$$

soit satisfaite?

— Déterminer les côtés d'un triangle rectangle dont on connait la surface et le rayon du centre inscrit.

Géométrie descriptive.

On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical, un point par ses projections, et on considère le cône ayant ce point pour sommet et circonscrit à l'ellipsoïde; trouver: 1° la trace horizontale de ce cône; 2° le genre de cette trace d'après la position du point; 3° déterminer les axes, et, dans le cas où cette section est du genre hyperbole, déterminer ses asymptotes.

— On donne un plan, par ses traces, et un point quelconque de l'espace, par ses projections; on suppose ce point lié invariablement au plan; on demande ce que devient le point lorsque l'on rabat le plan sur le plan horizontal.

— On donne deux droites dans le plan horizontal; ces droites sont les traces de deux plans; on donne en outre les angles de ces plans avec le plan horizontal; trouver l'angle des deux plans.

— On donne un triangle plan ABC; AB est une horizontale située à un décimètre du plan horizontal; on suppose que AB tourne autour de AC; quelle sera la surface engendrée? Section par un plan passant par BC, et faisant un angle de 45° avec le plan horizontal.

— On donne une droite (ab, $a'b'$) parallèle au plan vertical; $m'n'$ est la projection verticale d'une courbe, qui a pour projection horizontale ab; cette courbe, en tournant autour de AB, engendre une surface; trouver un point de l'intersection de cette surface avec un plan donné par ses traces.

— On donne un triangle ABC dans le plan horizontal. Les droites AB, AC sont les génératrices opposées d'un cône de révolution dont l'axe serait la bissectrice de l'angle CAB. On coupe le cône par un plan passant par CB et faisant un angle de 30° avec le plan horizontal; trouver un point de la section et la tangente en ce point.

— On donne une droite parallèle au plan vertical; en tournant autour de la ligne de terre, cette droite engendre un hyperboloïde. Connaissant la projection verticale d'un point de la surface, trouver sa projection horizontale. Plan tangent en ce point.

— On donne une droite par ses projections et un point de cette droite. Ce point est le sommet d'un cône de révolution dont l'axe est la droite donnée. Construire le contour apparent sur le plan horizontal.

— On donne une droite parallèle au plan vertical, et une droite quelconque. La droite de front, en tournant autour de l'autre droite, engendre un hyperboloïde. Trouver la normale en un point.

QUESTION 275

La somme de n *nombres positifs, entiers ou fractionnaires, multipliée par la somme de leurs inverses ne peut jamais être égale à* n^2, *excepté si les quantités sont égales.*

On sait que, par une identité due à Lagrange et facile à vérifier,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots) - (Aa + Bb + Cc + \ldots)^2 = \Sigma(Ab - Ba)^2.$$

Le second membre ne peut être nul que si toutes ses parties positives sont séparément égales à zéro. Appliquant cette remarque à l'égalité proposée on aura,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) - n^2$$
$$= \Sigma\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2\right) = \Sigma\,\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2}.$$

Les quantités $x_1 x_2 \ldots x_n$ étant supposées positives, on a donc $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

NOTA. — Cette question a été résolue par MM. Gilly, étudiant à Montpellier; Dupuy, au lycée de Grenoble.

QUESTION 307

Solution par M. GILLY, élève à la Faculté de Montpellier.

---

a. *Former les dérivées successives de la fonction*

$$y = e^{\frac{a}{2}x^2}$$

Établir que la dérivée d'ordre n *est égale au produit de la fonction elle-même par un polynôme entier en* u, P_n, *du degré* n;

b. *Démontrer qu'entre les divers polynômes* P *existent les relations suivantes :*

$$P_n = P'_{n-1} + axP_{n-1} \qquad (\alpha)$$
$$P'_n = naP_{n-1} \qquad (\beta)$$
$$P_{n+1} = Pax_n + naP_{n-1} \qquad (\gamma)$$
$$P''_n + axP'_n - naP_n = 0. \qquad (\delta)$$

c. *Démontrer que si* a *est négatif, l'équation* P $=$ o *a toutes ses racines réelles.*

d. *Former le polynôme* P *en se servant de la troisième relation.*

a. Donnons à x l'accroissement h, on a

$$e^{\frac{a}{2}(x+h)^2} = y + \frac{h}{1} y' + \frac{h^2}{1 . 2} y'' + \dots + \frac{h^n}{1.2..n} y^n + \dots$$

d'autre part

$$e^{\frac{a}{2}(x+h)^2} = e^{\frac{a}{2}x^2} . e^{axh} . e^{\frac{a}{2}h^2};$$

or

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} h + \frac{(ax)^2}{1 . 2} h^2 + \dots + \frac{(ax)^n}{1.2\dots n} hn + \dots$$

$$e^{\frac{a}{2}h^2} = 1 + \frac{\frac{a}{2}}{1} h^2 + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{1 . 2} h^4 + \dots \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{1 . 2 \dots \frac{n}{2}} h^n + \dots$$

faisant le produit des deux dernières égalités, on a pour le coefficient de h^n

$$\frac{1}{1 . 2 \dots n}\Big[(ax)^n + \frac{n(n-1)}{1}\left(\frac{a}{2}\right)(ax)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(ax\right)^{n-4} + \dots\Big]$$

donc identifiant cette expression avec le coefficient de h^n dans la première égalité

$$y^{(n)} = e^{\frac{a}{2}} \Big[(ax)^n + \frac{n(n-1)}{1}\left(\frac{a}{2}\right)(ax)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(ax)^{n-4} + \dots\Big]$$

on a $$y = e^{\frac{a}{2}x^2}$$

$$y = xe^{\frac{a}{2}x^2} \qquad (2)$$

$$y'' = (a^2x^2 + a)e^{\frac{a}{2}x^2}$$

. . . .

. . . .

on est donc conduit à poser

$$y^{(n)} = P_n e^{\frac{a}{2}x^2}. \qquad (3)$$

Pour justifier cette formule, supposons-la vraie pour n et démontrons-la exacte pour la valeur $n + 1$:

$$y^{n+1} = (axP_n + P'_n)e^{\frac{a}{2}x^2} \qquad (4)$$

ou

$$y^{n+1} = P_{n+1}e^{\frac{a}{2}x^2}. \qquad (5)$$

b. L'équation (2) s'écrit

$$y' = axy.$$

D'après le théorème de Leibnitz on sait que si u, v sont deux fonctions de x, la dérivée n^{me} du produit uv est égale à

$$uv^{(n)} + \frac{n}{1} u'v^{(n-1)} + \frac{n(x - 1}{1.2} u''v^{(n-2)} + \dots$$
$$+ \frac{x}{1} u^{(n-1)} v' + u^n v$$

Appliquons cette formule à y', il vient

$$y^{(n+1)} = axy^n + \frac{n}{1} ay^{n-1}$$

qui s'écrit, d'après la formule symbolique (3),

$$P_{n+1} = axP_n + naP_{n-1} \text{ (formule } \gamma). \qquad (6)$$

D'autre part, (4) et (5) donnent

$$P_{n+1} = axP_n + P'_n \qquad (7)$$

ou

$$P_n = axP_{n-1} + P'_{n-1} \text{ (formule } \alpha).$$

Combinant (6) et (7), on en déduit

$$P'_n = naP_{n-1} \text{ (formule } \beta). \qquad (8)$$

Prenons la dérivée de (8)

$$P''_n = naP'_{n-1} \qquad (9)$$

or, d'après (8) $\quad P'_{n-1}, = (n - 1)aP_{n-2}. \qquad (10)$

Éliminons P'_{n-1} on a

$$P_n = n(n - 1)a^2P_{n-2} \qquad (11)$$

mais (6) donne

$$P_n = axP_{n-1} + (x - 1)aP_{n-2}. \qquad (12)$$

Entre (8), (11), (12), éliminons P_{n-1} et P_{n-2}, il vient

$$P''_n + axP'_n - naP_n = 0 \text{ (formule } \delta). \qquad (13)$$

c. L'équation P_n a toutes ses racines réelles. En effet, y s'annule pour $x = +\infty$, $x = -\infty$, et est continue dans l'intervalle, donc y' s'annule pour une valeur α entre ces

limites. Donc y' s'annule pour $x = -\infty$, $x = \alpha$, $x = +\infty$, par suite P_1 s'annule pour $x = \alpha$.

y' étant continue dans chaque intervalle, y'' s'annulera pour $x = -\infty$, $x = \beta$, $x = \gamma$, $x = +\infty$, β et γ comprenant α. Donc P_2 s'annulera pour $x = \beta$ et $x = \gamma$.

En continuant ainsi de proche en proche on voit que P_n a ses n racines réelles.

On a
$$P_n = axP_{n-1} + naP_{n-2} \qquad (\alpha)$$
$$P_{n-1} = axP_{n-2} + (n-1)aP_{n-3}$$
$$P_{n-2} = axP_{n-3} + (n-2)aP_{n-4}$$
$$\vdots$$
$$P_3 = axP_2 + 3aP_1\,.$$

Multipliant la première par ax, la seconde par $a^2x^2 + (n-1)a$ ... on obtient en ajoutant le tout
$$P_n = (ax)^n + \frac{n(n-1)}{1}\,\frac{a}{2}\,(ax)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\;.\;2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 (ax)^{n-4} + \dots$$
comme on l'avait trouvé directement.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Le Pont, du lycée Saint-Louis (classe de M. E. Lucas); Aubry, à Nancy; Vauthier, à Tarbes; Quiquet, à Lille.

QUESTION 311

Solution par M. P. BOULOGNE, élève au Lycée de Lille.

Par l'un des foyers d'une ellipse on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués et coupant la courbe en A, A' *d'une part, en* B, B' *d'autre part. Démontrer que* AA' + BB' *est constante.*

Soit m le coefficient angulaire de l'une des droites; son équation sera
$$y = m(x - c). \qquad (1)$$

Si x' et x'' sont les abscisses des points d'intersection de la droite avec l'ellipse, on aura

$$y' - y'' = m(x' - x'')$$

et par suite

$$AA' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} = (x' - x'')\sqrt{1 + m^2}$$

Éliminons y entre (1) et

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nous aurons

$$x^2(b^2 + a^2m^2) - 2a^2m^2cx + a^2(m^2c^2 - b^2) = 0;$$

d'où
$$x' - x'' = \frac{2ab^2\sqrt{1 + m^2}}{b^2 + a^2m^2}.$$

dès lors
$$AA' = \frac{2ab^2(1 + m^2)}{b^2 + a^2m^2}$$

De même
$$BB' = \frac{2ab^2(1 + m'^2)}{b^2 + a^2m'^2} \qquad (2)$$

où m et m' sont liées par la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

On a donc

$$AA' + BB' = \frac{2ab^2(1 + m^2)}{b^2 + a^2m^2} + \frac{2ab^2(1 + m'^2)}{b^2 + a^2m'^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{a}$$

La longueur constante est dès lors égale à celle du grand axe, plus la longueur de la corde focale perpendiculaire à cet axe.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Quiquet, du lycée de Lille; Baron, Savary, du lycée Henri IV; Dupuy, à Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

Mathématiques élémentaires.

375. — Soit ABC un triangle; le couper par une transversale telle que, des dix segments qui en résultent sur les trois côtés, trois, non contigus, soient égaux entre eux.

376. — L'arête d'un dièdre donné α est tangente à une sphère de rayon R. Quelle doit être, par rapport au plan diamétral de contact, la position de ce dièdre pour que la surface de sphère interceptée par le plan du dièdre soit maxima?

377. — Dans un trièdre SABC, la face BSC vaut 90 degrés et chacun des autres vaut 60 degrés. On porte sur SA une longueur arbitraire, et sur les autres arêtes des longueurs SB, SC, égales au plus grand segment de SA divisé en moyenne et extrême raison. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

378. — Trouver les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et la somme des carrés des bissectrices des angles aigus.

379. — Déterminer les trois côtés d'un triangle connaissant le périmètre $2p$, sachant que $bc = m^2$, et que les médianes correspondant aux côtés AB et AC sont à angle droit.

380. — On suppose que B n'est pas un carré parfait et on propose de mettre la quantité

$$z = \sqrt[4]{A + \sqrt{B}}$$

sous la forme d'une somme de deux radicaux carrés,

$$x = \sqrt{x} + \sqrt{q}.$$

Donner les conditions nécessaires pour que la transformation soit avantageuse, ce qui peut avoir lieu dans deux cas différents, savoir : 1° lorsque les quantités x et y sont de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$;
2° lorsque ces quantités sont des nombres rationnels. On appliquera la formule d'identité trouvée aux deux exemples numériques

$$z = \sqrt[4]{6 + \sqrt{20}}; \qquad z = \sqrt{7 + \sqrt{48}}$$

et l'on vérifiera les résultats numériques ainsi obtenus.

381. — Soient a, b, c, les trois arêtes du sommet d'un tétraèdre; on demande de mener un plan qui détache un tétraèdre dont le volume soit le $\frac{1}{8}$ du volume du tétraèdre donné et qui coupe SA, SB, SC aux points X, Y, Z, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{SX}{AX} = \frac{BY}{SY} = \frac{CZ}{SZ}.$$

Mathématiques spéciales.

382. — Si les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de cette droite décrit une ellipse ; démontrer que l'aire de cette ellipse est indépendante de l'angle des deux droites.

(Steiner.)

383. — Si trois points d'une droite glissent sur trois plans qui se coupent, on sait, par le théorème de Dupin, qu'un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde. Démontrer que le volume de cet ellipsoïde est indépendant de l'angle des plans. *(Ed. Lucas.)*

384. — Trouver la somme des produits trois à trois des termes de la progression arithmétique

$$\div\, a \,.\, a + r \,.\, a + 2r \,\ldots\, a + (n-1)r.$$

385. — Sommer les suites

$$C_n^1 + 2^3 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + \ldots + (n-1)^3 C_n^{n-1} + n^3 C_n^n.$$

$$1 + C_3^2 C_n^1 + C_4^2 C_n^2 + \ldots + C_{n+1}^2 C_n^{n-1} + C_{n+2}^2 C_n^n.$$

$$2^n + C_n^1 C_{n-1}^1\, 2^{n-2} + C_n^2 C_{n-2}^2\, 2^{n-4} + \ldots + C_n^p C_{n-p}^p\, 2^{n-2p} + \ldots$$

C_n^p indiquant le nombre des combinaisons de n objets p à p.

386. — Trouver le nombre de manières dont on peut distribuer p objets distincts entre q personnes, de telle sorte que chacune d'elles ait un objet au moins.

387. — Lieu des foyers des paraboles qui rencontrent en deux points fixes A et B une droite donnée, et qui sont normales en A à cette droite. On propose de vérifier géométriquement le résultat trouvé.

388. — Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données Ox, Oy. Soit M le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse ; soit μ le centre de ce cercle ; 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des axes ; 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de M est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse sur les deux

droites Ox, Oy, et le lieu de μ est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.

(E. Lemoine.)

CORRESPONDANCE

M. Burat-Dubois nous prie de rectifier une erreur qui s'est glissée dans sa note sur la détermination du maximum et du minimum de la fraction du second degré. A la huitième ligne de la page 11, il faut lire : *ce sera la même chose*, au lieu de : *ce sera le contraire*. En effet, si l'on a $ab' - ba' < 0$, la valeur $z = -\sqrt{m}$ donne bien un minimum, tandis qu'elle donne un maximum si l'on a $ab' - ba' > 0$. C'est à cette partie du calcul que se rapporte le mot : *contraire*. Mais dans le cas de $ab' - ba' < 0$, on a : $\sqrt{m} = \dfrac{\sqrt{k}}{ba' - ab'}$, car. avant d'extraire la racine carrée de l'expression $\dfrac{k}{(ab' - ba')^2}$, il faut la remplacer par l'expression égale $\dfrac{k}{(ba' - ab')^2}$; on a donc dans le cas du minimum :

$$x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} + z = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} - \frac{\sqrt{k}}{ba' - ab'} = \frac{-(ac' - ca') + \sqrt{k}}{ab' - ba'}$$

ce qui est la même chose que dans le cas où l'on a $ab' - ba' > 0$.

Il en résulte que le tableau qui donne le résumé *(page 15 de la note)* doit être, pour la première partie, modifié comme il suit :

$$k > 0,\ ab' - ba' \lesseqgtr 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum pour } x = \dfrac{-(ac' - ca') - \sqrt{k}}{ab' - ba'} \\ \text{minimum pour } x = \dfrac{-(ac' - ca') + \sqrt{k}}{ab' - ba'} \end{array} \right.$$

Cette erreur se trouve également dans l'algèbre de M. Lauvernay, et il est facile d'en trouver la raison ; c'est que M. Lauvernay désigne par x' la plus petite racine, et par x'' la plus grande racine de l'équation

$$(ab' - ba')\,x^2 + 2\,(ac' - ca')\,x + bc' - cb' = 0$$

et que, si $ab' - ba' < 0$, la plus petite racine est celle qui contient le signe $+$ devant le radical, et non pas l'autre ; de sorte que le maximum a lieu pour la même valeur que dans le cas de $ab' - ba'$ positif.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 1909-1

MAXIMA ET MINIMA

DE LA FONCTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Par **J. Bourget.**

Dans mon *Traité d'Algèbre*, j'ai étudié cette question en m'appuyant sur l'involution et je suis arrivé à une règle simple, qui permet de dire *a priori* ce que l'on doit trouver, aussitôt que les deux termes de la fraction sont décomposés en facteurs du premier degré.

Dans la note que je soumets aux lecteurs du journal, j'établis quelques lemmes préliminaires qui me dispensent de la théorie de l'involution et me permettent d'arriver rapidement aux mêmes résultats.

Lemme I. — Posons

$$P = b^2 - 4ac \qquad R = b'^2 - 4a'c'$$
$$Q = bb' - 2ac - 2a'c'.$$

On vérifie facilement l'identité suivante :

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') \qquad (1)$$
$$= \frac{1}{4}(Q^2 - PR).$$

Lemme II. — Si $Q^2 - PR > 0$, P et R peuvent être positifs, nuls ou négatifs ; mais si $Q^2 - PR < 0$, P et R sont nécessairement positifs tous deux, ou négatifs tous deux en même temps.

Lemme III. — On a identiquement :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

Le premier déterminant donne en le développant :

$$a(bc' - cb') + b(ca' - ac') + c(ab' - ba') = 0.$$

Le second donne

$$a'(bc' - cb') + b'(ca' - ac') + c'(ab' - ba') = 0.$$

On déduit de là les deux identités :

$$\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\,\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{c'}{a'} + \frac{b'}{a'}\,\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = 0 \qquad (3)$$

en supposant a, a', $ab' - ba'$ différents de zéro.

Lemme IV. — Soient les deux équations du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (4)$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0\,; \qquad (5)$$

admettons que ces équations n'aient pas de racine commune (voir notre *Algèbre*, p. 327), alors le déterminant $(ab' - ba')$ est différent de zéro.

De plus :

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 1/4\,(Q^2 - PR)$$

est différent de zéro, donc $Q^2 - PR$ est différent de zéro.

Lemme V. — Les relations (2) et (3) donnent, en nommant α, α' les racines de l'équation (4) et β, β' les racines de l'équation (5) :

$$\alpha\alpha' - (\alpha + \alpha')\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = 0$$

$$\beta\beta' - (\beta + \beta')\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} = 0$$

ou bien

$$\left(\alpha - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\alpha' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2 - \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$$

$$\left(\beta - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\beta' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)^2 - \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$$

ou bien

$$\left(\alpha - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\alpha' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \frac{Q^2 - PR}{4\,(ab' - ba')^2} \qquad (6)$$

$$\left(\beta - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right)\left(\beta' - \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\right) = \frac{Q^2 - PR}{4\,(ab' - ba')^2}. \quad (7)$$

Prenons le cas particulier où α, α', β, β' sont réels ; c'est-à-dire le cas où $P > 0$ $R > 0$
et convenons de porter sur une droite à partir d'un point O fixe, les racines α, α', β, β', dans un sens ou dans l'autre suivant leurs signes. Soit I le point correspondant au nombre $\frac{ca' - ac'}{ab' - ab'}$; soient A, A' les points correspondants aux racines α, α', et B, B' les points correspondants aux racines β, β', les parenthèses des premiers membres de (6) et (7) représenteront, en valeurs absolues, les longueurs IA, IA', IB, IB'.

1° Si $Q^2 - PR > 0$, les parenthèses auront le même signe, donc A et A' seront du même côté du point I ; il en sera de même de B et B'. D'ailleurs, comme le produit IA . IA' est égal au produit IB . IB', si IB est supérieur à IA, IB' sera inférieur à IA' ; donc dans ce cas :

Ou bien les points B et B' sont dans l'intervalle des points A et A' ;

Ou bien les points A, A' sont dans l'intervalle BB' ;

Ou bien les deux points A, A' sont d'un côté du point T et les deux points B, B' de l'autre côté.

2° Si $Q^2 - PR < 0$, P et R sont nécessairement de même signe, donc les racines des équations (4) et (5) sont toutes réelles, ou toutes imaginaires. Admettons qu'elles soient réelles. Les parenthèses des relations (6) et (7) auront des signes contraires, donc le point I sera dans l'intervalle AA' et aussi dans l'intervalle BB'.

Comme le produit IA . IA' est égal au produit IB . IB', si B est plus voisin de I que le point A, le point B' sera plus éloigné de I que le point A' ; donc les deux segments AA', BB' empiéteront l'un sur l'autre.

Ces préliminaires posés, il est facile de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Trouver les maxima et les minima de la fonction rationnelle du second degré*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}. \quad (8)$$

Nous supposons que les six coefficients sont réels et que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

n'ont pas de racines communes, que par conséquent

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$$

ou

$$Q^2 - PR$$

sont différents du zéro, et qu'en même temps le déterminant

$$ab' - ba'$$

est différent de zéro.

Les deux coefficients a et a' ne sont pas nuls à la fois, sans quoi la fraction serait le rapport de deux binômes du premier degré et le problème changerait. L'un des coefficients a ou a' peut être nul, nous examinerons à part ce cas particulier; nous supposerons d'abord qu'ils ne sont nuls ni l'un ni l'autre.

Résolvons l'équation (8) par rapport à x, nous aurons

$$x = \frac{-(b'y - b) \pm \sqrt{Ry^2 - 2Qy + P}}{2(a'y - a)}. \quad (9)$$

Distinguons maintenant plusieurs cas:

Premier cas: $R \gtrless 0, \quad Q^2 - PR > 0.$

Le trinôme placé sous le radical de (9) a ses racines réelles et inégales, on peut donc le mettre sous la forme

$$R(y - y')(y - y'') \ldots y' < y''.$$

Pour que x soit réel, R étant positif, il faut que y soit en dehors de l'intervalle des racines y' et y'', donc y' est un maximum d'une série de valeurs possibles et y'' un minimum d'une autre série de valeurs. — Si $R < 0$, il faut pour la réalité de x que y soit compris dans l'intervalle des deux racines, donc y' est un minimum d'une série de valeurs. y'' est un maximum de cette même série. — Dans tous les cas, il y a un maximum et un minimum.

Deuxième cas: $R > 0, \quad Q^2 - PR < 0.$

Dans ce cas, les racines du trinôme en y étant imaginaires et le premier terme étant positif, le trinôme est positif quel

que soit x, y n'est assujetti à aucune condition pour la réalité de x, il n'y a ni maximum ni minimum de y.

C'est le cas où les racines des deux termes sont réelles, car R et P sont nécessairement de même signe, et où les segments AA', BB', déterminés par ces racines sur un axe, empiètent l'un sur l'autre (*).

REMARQUE. — On ne peut pas supposer à la fois

$$R < o, \quad Q^2 - PR < o.$$

En effet, on peut mettre le trinôme en y sous la forme

$$(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c).$$

Faisons successivement dans ce trinôme :

$$y = -\infty, \frac{a}{a'}, \frac{c}{c'}, +\infty;$$

ce trinôme, à cause de son premier terme $Ry^2 < o$, prendra successivement les signes

$$- \quad + \quad + \quad -$$

donc il a nécessairement deux racines réelles, qui comprennent les nombres $\frac{a}{a'}$, $\frac{c}{c'}$, donc $Q^2 - PR$ est nécessairement positif. (Cette remarque est due à M. Pichenot.)

Troisième cas : $R = o$.

Le trinôme sous le radical devient

$$-2Qy + P = -2Q\left(y - \frac{P}{2Q}\right).$$

On ne peut pas supposer que Q est nul, car on aurait dans cette hypothèse $Q^2 - PR = o$, ce qui ne peut pas être. Donc suivant le signe de Q, y aura pour maximum ou pour minimum $\frac{P}{2Q}$.

REMARQUE. — Les maxima ou les minima que nous déterminons ainsi soit des maxima ou des minima *absolus ;* ils correspondent sont à des valeurs finies de x, soit à des valeurs infinies. Mais nous avons fait voir ailleurs dans le

(*) Nous rappellerons à nos lecteurs que, dans une note publiée dans le Journal (tome II, p. 19) nous sommes arrivé, par de simples considérations géométriques, à une conclusion identique à celle de M. Bourget (A. M).

journal, que pour cette fonction y continue et uniforme, les maxima ou les minima absolus sont aussi des maxima et des minima *relatifs*, à la condition que l'on considère $x = \pm \infty$ comme répondant au même point de l'axe des x. La méthode *indirecte* que nous avons employée ne conduit donc pas à des résultats contradictoires avec ceux que donnerait la méthode *directe*, fondée sur la définition classique des maxima et des minima.

Cette méthode indirecte permet de prévoir immédiatement ce que l'on trouvera à la vue seule des deux termes de la fraction décomposés en facteurs du 1er degré, et l'on peut énoncer le théorème suivant, que nous avons démontré dans notre *Algèbre*, en nous appuyant sur l'involution.

Théorème. — *1° La fonction* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, *quand* x *varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *n'a ni maximum ni minimum, si les racines du numérateur et du dénominateur sont réelles et si les segments* AA', BB' *qu'elles déterminent sur un axe, empiètent l'un sur l'autre.*

2° Dans le cas où le dénominateur de la fonction a ses racines égales, la fonction a un maximum ou un minimum.

3° Dans tous les autres cas, elle a un maximum et un minimum.

Cas particuliers. — Les cas particuliers où a ou bien a' seraient nuls, peuvent être regardés comme rentrant dans le cas général, en disant que dans cette hypothèse le trinôme correspondant a une racine réelle infinie.

Remarque. — Nous ne parlons pas des valeurs infinies de y, qui peuvent être considérées comme des maxima ou des minima de y, si le dénominateur de la fraction a ses racines égales, comme l'a remarqué M. Burat-Dubois.

Nous engageons le lecteur à consulter sur le même sujet les articles suivants parus dans le *Journal de Mathématiques* :

Note d'algèbre (Remarque sur la fraction du second degré), par M. Pichenot, t. II, p. 135; — *Note d'algèbre* (Étude des variations de la fraction du second degré), par M. Fajon, t. II, p. 358.

QUESTIONS D'EXAMEN

n étant un nombre impair, le produit

$$n(n^2+2)(n^2+7)$$

est divisible par 24.

Il suffit de démontrer que ce produit est divisible par 3 et par 8. Or, déjà, si n n'est pas divisible par 3, n^2 est un multiple de 3, augmenté de 1 ; donc n^2+2 est divisible par 3.

De plus le carré d'un nombre impair est toujours un multiple de 8, augmenté de 1 ; donc n^2+7 est un multiple de 8.

La proposition est donc démontrée.

Étant donnés un point et une circonférence, mener par le point une sécante telle que la partie extérieure soit à la partie intérieure dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Je suppose le problème résolu ; soit A le point donné, AB la partie extérieure, BC la partie intérieure de la sécante. Je mène le diamètre APQ passant par le point A ; puis je joins le point C au point Q, et par le point B, je mène BQ' parallèle à CQ jusqu'à la rencontre avec le diamètre ; j'ai

$$\frac{AQ'}{AQ}=\frac{AB}{AC}=\frac{m}{m+n}.$$

Donc le point Q' est connu ; je verrais de même que si je mène la droite CP et sa parallèle BP', le point P' où celle-ci rencontre le diamètre est déterminé, de plus l'angle P'BQ' est droit, donc le point B est sur une circonférence ayant P'Q' comme diamètre ; il est facile de trouver le centre et le rayon de cette circonférence ; le centre se trouve au point O' sur la ligne AO, tel que l'on ait

$$\frac{AO'}{AO}=\frac{m}{m+n}.$$

On en déduit facilement

$$\frac{OO'}{AO} = \frac{n}{m+n}.$$

D'autre part, le rayon R' de cette circonférence sera donné par la proportion $\frac{R'}{R} = \frac{m}{m+n}.$

Nous pouvons d'après cela chercher comment, pour chaque valeur du rapport $\frac{m}{n}$, doit être placé le point A pour que le problème soit possible, étant donnée une circonférence particulière. En effet, la dernière proportion nous donne

$$\frac{R - R'}{R} = \frac{n}{m+n}$$

$$\frac{R + R'}{R} = \frac{2m + n}{m+n}.$$

Or, on doit avoir

$$R - R' < OO' < R + R'$$

ou $$R\,\frac{n}{m+n} < AO.\frac{n}{m+n} < R.\frac{2m+n}{m+n}.$$

La première inégalité est toujours vérifiée si le point A est extérieur à la circonférence ; il reste donc

$$\frac{AO}{R} < \frac{2m+n}{n};$$

telle est la relation à laquelle doit satisfaire AO pour que le problème soit possible.

En supposant que les deux équations du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

ont une racine commune, on demande de former l'équation du second degré qui admet pour racines les racines non communes des deux équations données.

Appelons x_1 et x_2 les racines de la première équation ;
x_1 et x_3 les racines de la seconde.

Nous avons $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$
$x_1 + x_3 = -p'$ $x_1 x_3 = q'$.

Nous en tirons facilement

$$x_1 = \frac{q - q'}{p' - p};$$

et par suite

$$x_2 = \frac{q(p' - p)}{q - q'}$$

$$x_3 = \frac{q'(p' - p)}{q - q'}.$$

Donc

$$x_2 + x_3 = \frac{(q + q')(p' - p)}{q - q'};$$

$$x_2 x_3 = \frac{qq'(p' - p)^2}{(q - q')^2}.$$

Par suite, l'équation cherchée est

$$(q - q')^2 X^2 + (q^2 - q'^2)(p - p')X + qq'(p - p')^2 = 0.$$

Résoudre un triangle, connaissant un angle A, *la bissectrice* α *et la hauteur* h *partant du sommet de l'angle.*

Il est facile de voir que l'angle de la bissectrice et de la hauteur est égal à la demi-différence des angles à la base. En effet l'angle que fait la hauteur avec le plus grand côté c est égal à $\frac{A}{2} + p$, en appelant p l'angle de la bissectrice et de la hauteur ; par suite on a

$$\frac{\pi}{2} - B = \frac{A}{2} + p;$$

donc $2p = \pi - 2B - A = C - B;$

d'autre part on a $\sin p = \frac{h}{\alpha};$

il sera donc facile de déterminer l'angle aigu p, et par suite on aura les angles B et C; on est donc ramené à résoudre un triangle dont on connaît les angles et la hauteur, problème que l'on sait résoudre.

Résoudre un triangle, connaissant un angle A, *la bissectrice* α *et la médiane* m *issue du même sommet.*

On a d'abord $2(b^2 + c^2) = 4m^2 + a^2$,

ou, puisque $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

on en tire $b^2 + c^2 = 4\,m^2 + 2bc\cos A$;

puis $a^2 = 4\,m^2 - 4bc\cos A$;

enfin, entre la bissectrice et les côtés, on a la relation

$$bc = l^2 + \frac{a^2\,bc}{(b+c)^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$bc = l^2 + \frac{2bc\,(m^2 - bc\cos A)}{2m^2 + bc\,(1 - \cos A)}.$$

On en déduit bc par l'équation suivante du second degré:

$$b^2c^2\cos^2\frac{A}{2} - bcl^2\sin^2\frac{A}{2} - 2m^2l^2 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles; on ne doit prendre que la racine positive, et même pour qu'elle soit acceptable, il faut que l'on ait $b^2 + c^2 - 2bc > 0$;

or, on a $b^2 + c^2 - 2bc = 4m^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$.

En remplaçant bc par la racine positive de l'équation obtenue plus haut, on trouve comme condition

$$2m^2 - l^2\sin^2\frac{A}{2} - \sqrt{l^4\sin^4\frac{A}{2} + 4m^2l^2\cos^2\frac{A}{2}} > 0$$

qui, après réduction, donne

$$m > l.$$

Cette condition étant remplie, il est facile de voir que les valeurs que l'on en tire pour a, b, c, sont les côtés d'un triangle; il suffit que l'on ait

$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2.$$

Or on a

$$(b - c)^2 = 4m^2 - 2bc(1 + \cos A) = 4m^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

$$(b + c)^2 = 4m^2 + 2bc(1 - \cos A) = 4m^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

et $a^2 = 4m^2 - 4bc\cos A = 4m^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2} - 4\,bc\cos^2\frac{A}{2}$.

On voit alors immédiatement que la double inégalité précédente est vérifiée.

QUESTION 267

Solution par M. Chrétien, élève au Lycée du Havre.

On donne dans un plan deux circonférences qui se coupent en A, *et un point* B. *On demande de décrire, de* B *comme centre, une circonférence telle que deux des points* C *et* D *où elle coupe les deux premières, soient en ligne droite avec le point* A.

En outre, on suppose que le point B *parcourt la plus grande des deux circonférences ; par chacune de ses positions, on mène une parallèle à la direction correspondante* ACD. *Démontrer que cette parallèle est constamment tangente à une ellipse fixe, que l'on propose de déterminer.*

Première partie. — Soient C et D les deux points où la circonférence cherchée coupe les deux circonférences données O et O'; I étant le milieu de CD joignons les points O et O' aux points A et I, et abaissons les perpendiculaires OE, OF sur CD. Nous avons

$$OI^2 = OA^2 + IA^2 - 2IA.AE$$

$$O'I^2 = O'A^2 + IA^2 + 2IA.AF :$$

Fig. 1.

Donc, en ajoutant, et remarquant, d'après les positions des points I, A, E, F sur la droite CD, que l'on a

$$AE = IF = IA + AF,$$

il vient

$$OI^2 + O'I^2 = OA^2 + O'A^2.$$

Donc le lieu du point I est une circonférence ayant pour centre le milieu H de OO', et passant par le point A. Si nous prenons l'extrémité A_1 du diamètre AH, il est facile de voir

que la ligne BIA_1 est une ligne droite, d'où nous tirons la construction suivante : Nous joignons le point B au symétrique A_1 de A par rapport au milieu OH de OO', et du point A nous menons une perpendiculaire sur BA_1 ; cette perpendiculaire rencontre les circonférences aux points C et D qui appartiennent à la circonférence cherchée.

Deuxième partie. — B étant sur la plus grande circonférence, menons à CAD par le point B, la parallèle BT; soit F le symétrique de A_1 par rapport à BT; menons par ce point F la parallèle à OB; elle rencontre BT en G, et A_1O en L; ce dernier point est fixe, puisque $A_1O = OL$; on voit facilement que $A_1G + LG = LF = 2OB$, et que les angles A_1GB, LGT sont égaux ; donc le point G décrit une ellipse ayant pour foyers A_1 et L, pour grand axe le diamètre de la grande circonférence qui passe par les points précédents, et de plus cette ellipse est tangente à BT. C.Q.F.D.

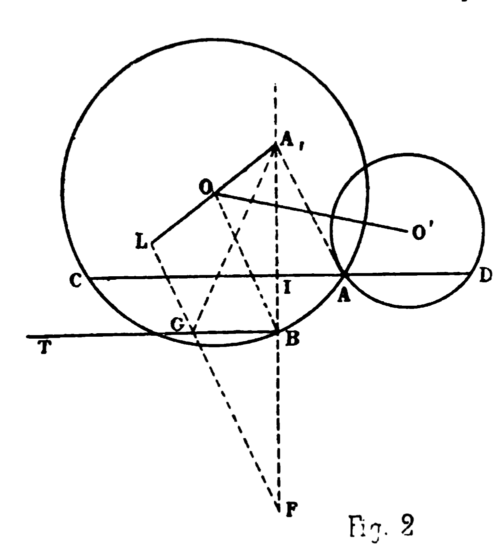


Fig. 2

QUESTION 304

Solution par M. Henri Bourget, du Collège d'Aix.

On donne deux cercles O *et* O', *et on mène une sécante* SAA' *par un des centres de similitude. Par les points antihomologues* A et A', *on mène les rayons* OA *et* O'A' *qui se coupent en* I, *de*

même les tangentes respectives AH, A'H *qui se coupent en* H. *On joint* SH *et* S'I, *S' étant le second centre de similitude. On demande le lieu du point de rencontre des droites* SH *et* S'I. *Si l'on prend pour centre d'inversion le point* S *et pour module d'inversion un module tel que chaque circonférence se change dans l'autre, on demande quelle est la figure inverse de l'axe radical des deux cercles.* (Desmons.)

1° Commençons par faire la remarque suivante : si l'on a (*fig. 1*) un cercle O dans lequel on inscrit un quadrilatère dont les diagonales sont l'une le diamètre HI, l'autre la corde AA' perpendiculaire à ce diamètre, et si l'on prend sur AA' ou sur son prolongement un point S que l'on joint aux points I et H, on voit que les droites MI, NH, LS sont les trois hauteurs du triangle IHS; et que le point D est le conjugué harmonique de S par rapport à A et A', puisqu'il appartient à la polaire du point S.

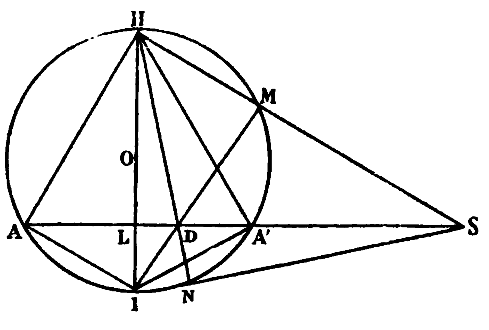


Fig 1

Cela posé, considérons le problème proposé (*fig. 2*).

Parmi les sécantes qu'on peut mener du point S, menons la ligne SO. Dans ce cas on voit aisément que le point S est le point de rencontre de SH et de IS'; le point S est donc un point du lieu. Il en est de même du point S'.

Nous allons démontrer que pour un point quelconque M du lieu, l'angle SMS' est droit, le lieu sera donc une circonférence décrite sur SS' comme diamètre.

Pour cela, rappelons-nous d'abord que les tangentes en des points antihomologues se coupent sur l'axe radical HR des deux cercles O et O', et que par suite le quadrilatère inscriptible AIA'H a ses côtés égaux deux à deux, et que le faisceau (I, OS'O'S) est harmonique :

Par suite, le point D est conjugué harmonique de S par rapport à AA′; donc en considérant le quadrilatère inscriptible AIA′H, nous voyons d'après notre remarque première que l'angle en M est droit, ce qu'il fallait démontrer.

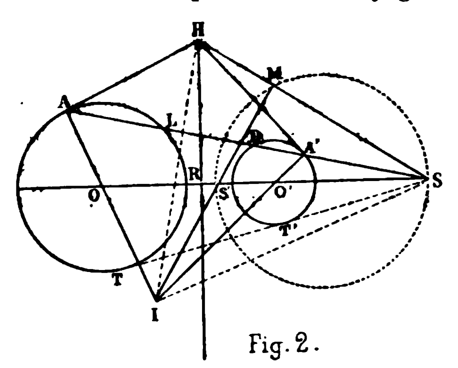


Fig. 2.

2° Dans la transformation proposée, STT′ se transforme en elle-même, et les points T et T′ l'un dans l'autre. Le module d'inversion doit donc être $\sqrt{ST \, . \, ST'}$, la moyenne géométrique des puissances du point S par rapport aux cercles O, O′.

Dans la figure transformée, l'axe radical rencontrant la ligne du centre en R se transformera en une circonférence décrite sur SR′ comme diamètre, SR′ étant déterminé par la relation $SR \, . \, SR' = ST \, . \, ST'$.

Ce cercle sera donc facile à construire.

QUESTION 338

Solution par M. Rivard, élève au Lycée du Mans.

Soient ABC *un triangle;* AD, BE, CF, *les hauteurs abaissées respectivement sur les côtés* BC, CA, AB; O *le point d'intersection de ces hauteurs. Sur* AB, *on prend un point* G *tel que* GC = CA: *sur* AC *un point* H *tel que* BH = BA; *on mène* DK *parallèle à* ED, GK *parallèle à* FD; CG *et* DF *se coupent en* m; BH *et* DE *se coupent en* n. *Cela posé, on demande de démontrer :*

1° *Que les six points* B, G, O, H, C, K, *sont sur une même circonférence;*

2° *Que les cinq points* O, M, D, C, E, *sont sur une même circonférence; il en est de même des cinq points* O, n, D, B, F;

3° *Que Om est perpendiculaire sur CG, et On sur BH;*

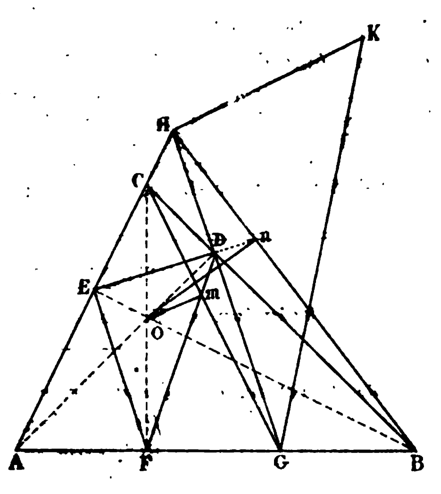
4° *Que* O *est le centre du cercle inscrit dans* DEF, *triangle qui est le quart du triangle semblable* KGH, *et aussi le centre du cercle circonscrit à* AGH;

5° *Que les quatre points* E, O, n, H, *sont sur une même circonférence, ainsi que les quatre points* F, O, m, G.

1° L'angle CGB est supplémentaire de l'angle CGA, qui, par construction, est égal à l'angle BCA : l'angle COB est égal à l'angle EOF; or dans le quadrilatère inscriptible EOFA, on a

EOF + EAF = 2dr;

donc le quadrilatère BGOC est inscriptible. L'angle AHB étant, par construction, égal à l'angle CAB, est supplémentaire de COB, et la circonférence BGOC passe par le point H. Enfin, l'angle HKG est



par construction égal à EDF. Or, le quadrilatère inscriptible donne ADF = ACF, et puisque AD et CF sont les bissectrices de EDF et de ACG, les angles HKG et HCG sont supplémentaires, et le point K se trouve sur la circonférence BGOCH.

2° On a déjà vu que ADF = FCG. Par suite les quatre points, O, *m*, D,C sont sur une même circonférence; mais on sait que la circonférence qui passe pas les points O, D, C passe par le point E. On démontrerait de même que les cinq points O, *n*, D, B, F sont sur une même circonférence.

3° Dans la circonférence O*m*DCE, on a C*m*O = CDO = 1dr. On voit de même que O*n*B = 1dr.

4° On sait que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices des angles du triangle DEF ; le point O est donc

le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Les points E, F, étant les milieux des côtés AG et AH du triangle AGH, les triangles EDF, HGK, qui ont les côtés respectivement parallèles, sont semblables, et le rapport des surfaces est $\frac{1}{4}$.

De plus, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle AGH.

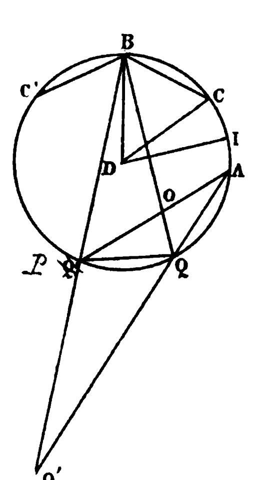
5° Dans le quadrilatère EO*n*H, les angles opposés $\widehat{\text{HEO}}$, H*n*O sont droits ; le quadrilatère est donc inscriptible. Il en est de même du quadrilatère FO*m*G.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vitte, Lapareillé, Baron, au lycée Henri IV; Fiévet, à Lille; Baudouin, à Beauvais; H. Bourget, à Aix; William Hoover, à Dayton (États-Unis d'Amérique); Montérou, au lycée Louis-le-Grand; Giroud, à Grenoble; Leclair, à Passy; Provost, au Mans; Perrier, à Lons-le-Saulnier; Gino-Loria, à Mantoue; Lévy et Tinel, à Rouen; Joly, à Tarbes.

QUESTION 339

Solution par M. Joly, élève du Lycée de Tarbes.

Dans un cercle, on mène à partir d'un point B *sur la circonférence, deux cordes fixes et égales* BC, BC′, *puis on prend un point* A *fixe sur la circonférence ; une corde* PQ *se meut en restant toujours égale à* BC. *On joint le point* B *au point* P *et le point* A *au point* Q ; *ces deux lignes se coupent en* O ; *de même les lignes* AP et BQ *se coupent en* O′. *Trouver le lieu géométrique du point* O *et le lieu géométrique de* O′.



Soit I le milieu de l'arc CA, et D le centre du cercle.

L'angle BOA a pour mesure arc BC $+$ arc $\frac{\text{CA}}{2}$ il est donc constant, et le lieu du point O est un segment décrit sur AB comme corde, et capable de l'angle BDI.

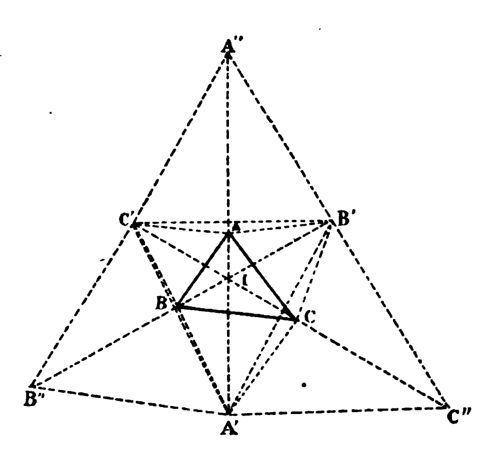
On verrait de même que le lieu du point O′ est un segment décrit sur AB comme corde, et capable de l'angle CDI.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Baudouin, à Beauvais; Vitte, Baron, au lycée Henri IV; La Chesnais, au lycée Saint-Louis; Provost, au lycée du Mans; Barthe, à Tarbes; Bertin, à Vesoul; Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 340

Solution par M. TINEL, élève au Lycée Corneille à Rouen.

Connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle, déterminer géométriquement ce triangle.



Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle cherché; soient A′, B′, C′ les sommets des triangles équilatéraux donnés. On sait (DESBOVES, *Questions de géométrie*, p. 156) que ces droites sont égales, se coupent en un point I, et que l'on a

$$AIC = CIB = BIA = 120^\circ.$$

Le quadrilatère A′BIC étant inscriptible, et le triangle A′BC étant équilatéral, on sait aussi (DESBOVES, *loc. cit.* p. 151) que l'on a $IA' = IB + IC$.

On a de même $IB' = IC + IA,$

$IC' = IA + IB.$

Construisons sur A′B′, A′C′, B′C′ extérieurement au triangle A′B′C′ des triangles équilatéraux dont les sommets res-

pectifs soient C″, B″, A″. Il est facile de voir que les droites A′A″, B′B″, C′C″, passent par le point I, et aussi respectivement par les points A, B, C; de plus, on a, pour la même raison que précédemment,

$$A''I = IB' + IC' = IC + IB + 2AI,$$

On en tire facilement, puisque

$$A''I = AA'' + AI$$

et que $\quad IC + IB = IA'$,

la relation $\quad AA'' = IA' + AI = AA'$.

Donc le point A est le milieu de A′A″. On déduit de là la construction simple suivante :

Sur les côtés du triangle A′B′C′, on construit extérieurement des triangles équilatéraux; on joint le sommet libre de chacun de ces triangles équilatéraux au sommet opposé du triangle A′B′C′. Les milieux des trois lignes ainsi menées sont les sommets du triangle ABC cherché.

Nota. La même question a été résolue par MM. Bonieux, à Riom; H. Bourget, à Aix.

M. William Hoower, à Dayton (États-Unis d'Amérique), a envoyé une solution par le calcul, dans laquelle il détermine la valeur des côtés du triangle cherché en fonction des côtés du triangle formé par les trois points donnés.

QUESTION 341

Solution par M. Baudouin, élève au Collège de Beauvais.

Calculer la base et le côté d'un triangle isoscèle, connaissant la médiane et la hauteur issues d'un des sommets de la base.

J'appelle x l'un des côtés égaux, y la base, h la hauteur et m la médiane données; j'ai les relations suivantes :

$$x^2 + y^2 = 2m^2 + \frac{x^2}{2}, \text{ et } hx = y\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}},$$

ou $\quad x^2 + 2y^2 = 4m^2; \; 2hx = y\sqrt{4x^2 - y^2}.$

Si nous élevons la seconde au carré, et que nous remplacions x^2 par sa valeur $4m^2 - 2y^2$, nous arrivons à l'équation bicarrée

$$9y^4 - 8y^2(h^2 + 2m^2) + 16h^2m^2 = 0,$$

qui permet de trouver y, et par suite x.

La condition de réalité des racines se réduit, puisque h et m sont positifs, à la condition suivante :

$$h^2 + 2m^2 > 3mh,$$

ce qui peut s'écrire

$$(m - h)^2 + m(m - h) > 0,$$

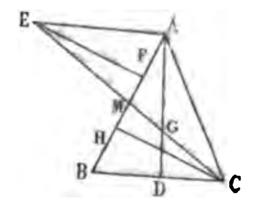
ou

$$(m - h)(2m - h) > 0;$$

cette dernière se réduit à $m > h$, condition évidente, d'après les données.

Solution géométrique par M. Joly, du Lycée de Tarbes.

Supposons le problème résolu; menons AE parallèle à BC, jusqu'à sa rencontre avec CM prolongée; abaissons EF perpendiculaire sur AB; soit G le centre de gravité de ABC. On a évidemment EF = CH. Donc AB est une tangente commune intérieure aux deux circonférences égales ayant pour centres E et C, et pour rayon h, la distance des centres étant $2m$. La direction AB est donc connue; ensuite, nous aurons le point A par l'intersection de la droite précédente et de la circonférence décrite sur $EG = \frac{4}{3} m$ comme diamètre. Il est facile d'achever le triangle.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. H. Bourget, à Aix; Hellot, Tinel, à Rouen; Flévet, à Lille; Henry, à Bréchaincourt; Dupuy, à Grenoble; Baron, au lycée Henri IV; La Chesnais, au lycée Saint-Louis; Barthe, à Tarbes; W. Hoover, à Dayton (États-Unis); Perrier, à Lons-le-Saulnier; Bertin, à Vesoul; Leclair à Passy.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR, 1881

Étudier les variations de l'expression

$$\frac{2x - 3}{x^2 + 4},$$

notamment pour certaines valeurs de x telles que $x = \frac{3}{2}$, $x > \frac{3}{2}$, etc.

— **Variations de la fonction** $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$.

— Variations de la fraction $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$; cette fraction a-t-elle un maximum et un minimum ?

— Étant donné $\frac{\sin x}{\sin (a - x)} = m$, trouver $\operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x$.

— Que devient l'expression $\frac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$, quand a tend vers b?

— Rendre calculable par logarithmes

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

— Simplifier

$$\cos a \cos (b - c) + \cos b \cos (c - a) + \cos c \cos (a - b).$$

— Connaissant la directrice et deux tangentes d'une parabole, trouver le foyer.

— Même problème en remplaçant les deux tangentes par deux points de la courbe.

— On donne une droite AB et un point P. Lieu des projections du point P sur tous les plans qui passent par AB.

— On joint un point A à un point B quelconque d'une droite xy. On construit un carré ABCD sur AB, et on demande le lieu des points C et D quand le point B se déplace sur xy.

— Sur le diamètre AB d'un cercle O on prend un point C, à droite de O, et l'on demande le lieu des points M, également distants de C et de la circonférence.

— On donne la directrice et le foyer d'une parabole ; trouver les points de rencontre d'une droite et de la courbe.

— Mener un cercle passant par deux points, et tangent à une droite donnée.

— Construire $x = \frac{a\sqrt{5}\ \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

— Construire $x = \frac{a}{2 - \sqrt{3}}$.

— Connaissant le foyer et la directrice d'une parabole, trouver les points de la courbe qui sont sur une parallèle à la directrice, et les tangentes en ces points.

— Construire un carré équivalent à un décagone régulier.

— Construire $x = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

— Construire $x = a\sqrt{7}$.

— On prolonge le diamètre d'un cercle d'une longueur égale au rayon. On mène la tangente par le point obtenu. Calculer la surface engendrée par l'arc compris entre le diamètre et le point de contact quand la figure tourne autour du diamètre. Rapport de cette surface à celle de la sphère ; surface engendrée par la tangente.

— Étant donnés un cercle et un point, mener par le point une sécante telle que le rapport des deux arcs interceptés soit égal à $\frac{3}{7}$. Valeur de la corde interceptée. Valeur de son apothème.

— On détermine un plan par les projections de trois de ses points. Trouver l'angle de la ligne de terre avec ce plan.

— On se donne trois points non en ligne droite dans un plan perpendicu-

laire au plan horizontal ; ces trois points sont sur une circonférence directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre. Mener à ce cylindre un plan tangent par un point donné extérieur.

— On donne les projections de trois points non en ligne droite ; ce sont les sommets de la base d'un prisme triangulaire dont la direction des arêtes est donnée par les angles que fait l'une d'elles avec les côtés adjacents de la base. Trouver les projections et la section droite du prisme.

— On donne un point dans un plan quelconque ; ce point est le centre d'un cercle rayon donné, situé dans ce plan ; le cercle est la base d'un cône dont le sommet est sur la ligne de terre. On demande de mener à ce cône un plan tangent passant par la ligne de terre.

— On donne un cercle O sur un plan horizontal coté 8 ; ce cercle est la directrice d'un cylindre dont on donne une génératrice par sa projection horizontale et la cote 15 d'un de ses points. Mener un plan tangent par un point extérieur coté 13.

— Construire une pyramide triangulaire dont on connaît la base sur le plan horizontal, et les trois arêtes latérales. Chercher l'un des dièdres latéraux, et un des dièdres à la base.

— On suppose qu'un pendule vertical porte une boule de 50 grammes. Quelle force horizontale faut-il appliquer à cette boule pour que le pendule fasse avec l'horizon un angle de 60 degrés ?

— Un poids de 45 kilog. est soumis pendant 3 secondes à une force de 25 kilog. Quelle est la vitesse de ce corps au bout des 3 secondes ?

— Avec quelle vitesse faut-il lancer un corps sous une inclinaison de 60 degrés pour qu'il tombe à une distance donnée du point de départ ?

— On donne un cylindre de hauteur h et de densité d ; ce cylindre est surmonté d'une demi-sphère de rayon r égal à celui du cylindre, et de densité d'. Trouver le centre de gravité du système. Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que le centre de gravité soit au centre de la demi-sphère ?

— Une barre AB, de $1^m,50$, pesant 150 kilog., est appuyée en A et B. Quelle sera la pression supportée en A et B si l'on applique au point C tel que AC = 60 centimètres, un poids de 100 kilog. ?

QUESTIONS D'EXAMEN

Un hyperboloïde étant donné par ses trois directrices rectilignes, reconnaître s'il est de révolution.

Lorsqu'un hyperboloïde est de révolution, tout plan tangent est perpendiculaire au plan du méridien passant par le point de contact ; de plus, tout plan tangent coupe la surface suivant deux droites faisant un angle constant, et le plan méridien suivant la bissectrice de l'angle de ces deux droites ; enfin le plan méridien passe par l'axe et par suite contient le centre.

Cela posé, pour reconnaître si la surface est de révolution,

je commencerai par déterminer son centre; ce point est le centre du parallélépipède dont trois arêtes s'appuient sur les trois directrices données.

Puis, prenant une position quelconque de la génératrice, je détermine les trois plans qu'elle forme avec les droites données; du centre, j'abaisse sur chacun de ces plans une perpendiculaire; le pied de cette perpendiculaire sera sur la bissectrice de l'angle de la génératrice avec la directrice correspondante, si la surface est de révolution; enfin, je mène par chaque bissectrice et la perpendiculaire un plan; si ces trois plans se coupent suivant une droite, la surface est de révolution.

On donne un cercle et deux génératrices de même système d'un hyperboloïde, déterminer le centre et les axes de la surface ainsi que les deux sections circulaires qui passent par un point donné.

On sait que, dans un hyperboloïde, deux génératrices de même système ne sont jamais dans un même plan, et que si deux génératrices de même système qui sont dans un même plan, sont parallèles, leur plan passe par le centre de la surface.

Par conséquent, si par la génératrice A je mène un plan parallèle à la génératrice B, et si je prends son intersection b avec la circonférence donnée, le plan mené par B et b est un plan diamétral; de même, si je mène par B un plan parallèle à A, et si je prends son intersection a avec la circonférence, le plan mené par A et a est encore un plan diamétral; donc l'intersection de ces deux plans est un diamètre qui rencontre A et B ; c'est donc un diamètre réel. Je puis donc facilement déterminer le centre; soit O ce centre.

Si, par le centre O, je mène un plan parallèle au plan du cercle, ce plan contient un des axes de la surface. Pour avoir cet axe, je prends la droite qui passe par les centres et je la projette sur le plan du cercle diamétral; il me suffit dans ce plan de mener une perpendiculaire à la projection précédente, j'aurai un axe en grandeur et en position.

De plus, le plan qui projette la droite des centres des

deux cercles sur le plan de l'un d'eux, est un plan principal; il coupe la surface suivant une hyperbole dont nous connaissons assez d'éléments pour en déterminer facilement les axes en grandeur et en position. En effet ce plan principal coupe A en un point m et si nous projetons A sur ce plan, la projection est tangente à l'hyperbole de section; nous connaissons donc un premier système de diamètres conjugués, dont l'un est connu en grandeur et position, l'autre en position seulement; de même, la génératrice B nous donnera un second système de diamètres conjugués; et, puisque le produit des segments interceptés sur une tangente par un système de diamètres conjugués est égal au carré de diamètre parallèle à la tangente, nous aurons facilement les asymptotes, et par suite les axes.

Enfin nous aurons très simplement la seconde direction de plans circulaires, en prenant le second plan cyclique qui passe par le centre. Il sera donc extrêmement facile de mener les deux plans circulaires qui passent par un point donné de la surface.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Concours de 1879.

Solution par M. J. Braun, élève du Lycée Charlemagne (*).

Étant donné un tétraèdre OABC, *défini par l'angle trièdre* O, *et par les longueurs* $4a$, $4b$, $4c$, *des arêtes* OA, OB, OC, *on joint les milieux des arêtes opposées, et ces trois droites se coupent en un point* ω.

1° *Démontrer que l'ellipsoïde qui admet ces droites pour diamètres conjugués, est tangent aux six arêtes du tétraèdre.*

2° *Trouver l'équation de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite s'appuyant sur les trois droites* A′, B′, C′ *qui passent par les milieux de* OA, OB, OC, *et sont parallèles à* OB, OC, OA.

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

Trouver l'intersection des deux surfaces.

3° *En appelant* HK *une droite s'appuyant sur* A', B' *et* C', *cette droite rencontre l'ellipsoïde en deux points* H *et* K *par chacun desquels on mène un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point.*

Démontrer que ces plans passent par le centre de l'ellipsoïde, et trouver le lieu décrit par leur intersection.

SOLUTION ANALYTIQUE

Nous prendrons pour axes de coordonnées les droites $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, qui passent par les milieux de OA, OB, OC et nous poserons $\omega\alpha = a'$, $\omega\beta = b'$, $\omega\gamma = c'$. Ces longueurs peuvent être facilement calculées en fonction des angles AOB, BOC, COA, dont nous désignerons les cosinus ν, λ, μ et qui définissent le trièdre O.

En effet si l'on prend un instant pour axes les droites OA, OB, OC, les coordonnées de α seront $(2a, 0, 0)$, celles de α', point symétrique de α par rapport à ω: $(0, 2b, 2c)$. Par suite:

$$\alpha\alpha'^2 = 4a'^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 2\lambda.\ 2b\ 2c$$
$$- 2\mu.\ 2c.\ 2a. - 2\nu.\ 2a.\ 2b.$$

ou bien $a'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\lambda bc - 2\mu ca - 2\nu ab$,
de même $b'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\mu ca - 2\nu ab - 2\lambda bc$
et $c'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\nu ab - 2\lambda bc - 2\mu ca$.

Ainsi les longueurs a', b' c' peuvent être considérées comme données.

Première partie. — Cela posé, l'équation de l'ellipsoïde, dans le système d'axes adopté est évidemment

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1. \qquad (1)$$

Démontrons, par exemple, qu'il est tangent à l'arête BC. Cette arête est définie par les équations

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = -1 & \text{qui représente le plan ABC} \\ -\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1 & \text{— — OBC} \end{array}\right\} (2)$$

D'autre part, le plan tangent à l'ellipsoïde, au point α'

dont les coordonnées sont $(-a', 0, 0)$ a pour équation $\frac{x}{a'} = -1$, et si l'on retranche les deux équations (2), on trouve précisément $\frac{x}{a'} = -1$.

Le plan tangent en α' passe donc par BC, qui, par suite, est tangent à l'ellipsoïde.

DEUXIÈME PARTIE. — L'hyperboloïde a évidemment pour centre le point ω, et il admet comme génératrices les trois droites A'_1, B'_1, C'_1 symétriques de A', B', C' par rapport au centre ω.

Cela posé, soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1$$

l'équation de cet hyperboloïde. Coupons-le par le plan des xy.

La section doit se composer des deux droites B' et B'_1 qui ont pour équations (dans ce plan des xy)

$$-\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

et

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 1.$$

On doit donc avoir

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy \equiv \left(\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'}\right)^2.$$

Par suite $\quad A = \frac{1}{a'^2},\ A' = \frac{1}{b'^2},\ B'' = -\frac{1}{a'b'},$

on trouverait de même

$$A'' = \frac{1}{c'^2},\ B = -\frac{1}{b'c'},\ B' = -\frac{1}{c'a'}.$$

L'équation de l'hyperboloïde demandé est donc

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - \frac{2yz}{b'c'} - \frac{2zx}{a'c'} - \frac{2xy}{a'b'} = 1. \quad (3)$$

Il s'agit maintenant de trouver l'intersection des surfaces (1) et (3). On peut remplacer pour cela (3) par la combinaison (1) — (3), ce qui donne

$$\frac{yz}{b'c'} + \frac{zx}{c'a'} + \frac{xy}{a'b'} = 0. \quad (4)$$

C'est un cône du second degré ayant pour sommet l'ori

gine ω, et admettant pour arêtes les droites $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$ (axes des coordonnées).

Pour achever de définir géométriquement ce cône, il suffit de connaître les plans tangents le long des génératrices $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$.

Cherchons par exemple le plan tangent en α (a', o, o); il a pour équation $\frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 0$

et cette équation est la somme des équations (2). Donc le plan tangent au cône le long de la génératrice $\alpha\omega\alpha'$ n'est autre que le plan ωBC.

De même ωCA et ωAB sont les plans tangents le long des génératrices $\beta\omega\beta'$ et $\gamma\omega\gamma'$.

Revenons maintenant à l'intersection de (1) et de (4).

Si l'on multiplie (4) par 2, et qu'on y ajoute (1), on obtient

$$\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'}\right)^2 = 1$$

qui se décompose en deux autres, savoir

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$$

et

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = -1.$$

Ces équations sont celles des deux plans $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$.

L'intersection cherchée peut donc être considérée comme celle du cône (4) par ces deux plans. Le plan $\alpha'\beta'\gamma'$ coupe le cône suivant une ellipse passant par α', β', γ' et tangente aux côtés de triangle ABC; le plan $\alpha\beta\gamma$ donne une ellipse symétrique de la première par rapport à ω.

Finalement, l'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde se compose de deux ellipses, complètement déterminées.

Troisième partie. — On peut écrire l'équation de l'hyperboloïde (3) sous la forme

$$\left(\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)^2 - \frac{4yz}{b'c'} = 1$$

ou

$$\left(\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)^2 - \left(\frac{y}{b'} + \frac{z}{c'}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)^2$$

ou enfin
$$\frac{x}{a'}\left(\frac{x}{a'} - \frac{2y}{b'} - \frac{2z}{c'}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)\left(1 - \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'}\right). \quad (5)$$

Écrivons les deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a'} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b'} - \dfrac{z}{c'}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a'} - \dfrac{2y}{b'} - \dfrac{2z}{c'}\right) = 1 - \dfrac{y}{b'} + \dfrac{2}{c'} \end{cases}$$

Ces équations représentent une droite. Si l'on élimine le paramètre variable λ entre elles, on obtient l'équation de l'hyperboloïde (5). La droite (6) est donc une des génératrices de l'hyperboloïde ; d'autre part elle n'appartient pas au système des trois génératrices A', B', C', car il est facile de vérifier qu'elle rencontre C', par exemple.

Dès lors nous pouvons conclure que (6) sont les équations générales qui représentent les droites HK de l'énoncé.

Pour chercher l'intersection d'une de ces droites avec l'ellipsoïde, il suffit évidemment de prendre son intersection par le plan $\alpha\beta\gamma$, puis par le plan $\alpha'\beta'\gamma'$.

Pour le plan $\alpha\beta\gamma$, on a à résoudre les trois équations

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a'} - \lambda\dfrac{y}{b'} + \lambda\dfrac{z}{c'} = \lambda \\ \lambda\dfrac{x}{a'} + (1 - 2\lambda)\dfrac{y}{b'} - (1 - 2\lambda)\dfrac{z}{c'} = 1 \\ \dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b'} + \dfrac{z}{c'} = 1 \end{cases}$$

Appliquant à ces équations la règle de Cramer, on trouve pour les coordonnées du point H, les valeurs

$$\frac{x_1}{a'} = \frac{2\lambda(\lambda + 1)}{3\lambda^2 + 1}, \quad \frac{y_1}{b'} = \frac{1 - \lambda^2}{3\lambda^2 + 1}, \quad \frac{z_1}{c'} = \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{3\lambda^2 + 1} \quad (H)$$

En remplaçant la dernière des équations (7) par $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = -1$ on obtient les coordonnées du point K

$$\frac{x_2}{a'} = \frac{2\lambda(1-\lambda)}{3\lambda^2+1}, \quad \frac{y_2}{b'} = \frac{-2\lambda(\lambda+1)}{3\lambda^2+1}, \quad \frac{z_2}{c'} = \frac{\lambda^2-1}{3\lambda^2+1} \quad (K)$$

Le plan tangent au point H à l'ellipsoïde (1) est donc

$$2\lambda(\lambda+1)\frac{x}{a'} + (1-\lambda^2)\frac{y}{b'} + 2\lambda(\lambda-1)\frac{z}{c'} = 3\lambda^2+1$$

et le plan mené par K, parallèlement à ce plan tangent, sera

$$2\lambda(\lambda+1)\left[\frac{x}{a'} - \frac{2\lambda(1-\lambda)}{3\lambda^2+1}\right] + (1-\lambda^2)\left[\frac{y}{b'} + \frac{2\lambda(\lambda+1)}{3\lambda^2+1}\right]$$
$$+ 2\lambda(\lambda-1)\left[\frac{z}{c'} + \frac{1-\lambda^2}{3\lambda^2+1}\right] = 0$$

ou bien $2\lambda(\lambda+1)\dfrac{x}{a'} + (1-\lambda^2)\dfrac{y}{b'} + 2\lambda(\lambda-1)\dfrac{z}{c'} = 0$

De même le plan mené par H, parallèlement au plan tangent en K, sera

$$2\lambda\left(\lambda-1\right)\frac{x}{a'} + 2\lambda\left(\lambda+1\right)\frac{y}{b'} + \left(\lambda^2-1\right)\frac{z}{c'} = 0.$$

On voit que ces deux plans passent bien par l'origine.

Pour trouver le lieu décrit par leur intersection, il suffit d'éliminer λ entre ces deux équations.

Ordonnons-les par rapport à λ ; elles deviennent

$$\lambda^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{2z}{c'} - \frac{y}{b'}\right) + 2\lambda\left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right) + \frac{y}{b'} = 0$$

$$\lambda^2\left(\frac{x}{a'} + \frac{2y}{b'} - \frac{z}{c'}\right) + 2\lambda\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right) + \frac{z}{c'} = 0$$

L'application d'une règle bien connue donne alors :

$$\left[\frac{z}{c'}\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2z}{c'} - \frac{y}{b'}\right) - \frac{y}{b'}\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)\right]^2$$

$$4\left[\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right)\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2z}{c'} - \frac{y}{b'}\right) - \left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right)\left(\frac{2x}{a'} + \frac{2y}{b'} - \frac{z}{c'}\right)\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right)\frac{z}{c'} - \frac{y}{b'}\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right)\right]$$

ou bien

$$\left[\frac{z}{c'}\left(\frac{x}{a'} + \frac{z}{c'}\right) - \frac{y}{b'}\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'}\right)\right]^2$$
$$= \left[\frac{z}{c'}\left(\frac{x}{a'} - \frac{z}{c'}\right) - \frac{y}{b'}\left(\frac{y}{b'} - \frac{x}{a'}\right)\right]$$

$$\times\left[\frac{z}{c'}\left(\frac{x}{a'}-\frac{z}{c'}\right)-\frac{y}{b'}\left(\frac{y}{b'}-\frac{x}{a'}\right)+\frac{4yz}{b'c'}-\frac{4x^2}{a'^2}\right]$$

ou encore

$$\left[\left(\frac{y}{b'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}\right]\left[\left(\frac{z}{c'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}\right]$$
$$+\left[\left(\frac{z}{c'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}\right]\left[\left(\frac{x}{a'}\right)^2-\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right]$$
$$+\left[\left(\frac{x}{a'}\right)^2-\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right]\left[\left(\frac{y}{b'}\right)^2-\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}\right]=0$$

ou

$$\left(\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right)^2-\frac{x^2}{a'^2}\left(\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}+\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}\right)$$
$$-\frac{y^2}{b'^2}\left(\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}+\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right)-\frac{z^2}{c'^2}\left(\frac{x}{a'}\frac{z}{c'}+\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}\right)$$
$$+\frac{x^2}{a'^2}\frac{y}{b'}\frac{z}{c'}+\frac{y^2}{b'^2}\frac{z}{c'}\frac{x}{a'}+\frac{z^2}{c'^2}\frac{x}{a'}\frac{y}{b'}=0$$

ou

$$\left[\frac{xy}{a'b'}+\frac{yz}{b'c'}+\frac{zx}{c'a'}\right]^2$$
$$-\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}\right)\left(\frac{xy}{a'b'}+\frac{yc}{b'c'}+\frac{zx}{c'a'}\right)=0$$

Cette équation se décompose en deux :

1° $$\frac{xy}{a'b'}+\frac{yz}{b'c'}+\frac{zx}{c'a'}=0,$$

c'est le cône (4) ;

2° $$\frac{z^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-\frac{xy}{a'b}-\frac{yz}{b'c'}-\frac{zx}{c'a'}=0$$

qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a'}-\frac{y}{b'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}-\frac{z}{c'}\right)^2+\left(\frac{z}{c'}-\frac{x}{a'}\right)=0$$

et par conséquent $\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}$.

C'est la diagonale du parallélépipède construit sur $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$.

En résumé, le véritable lieu décrit par l'intersection des plans ωH et ωK est le cône du second degré, qui a pour sommet l'origine et pour directrice la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

PREMIÈRE PARTIE. — Le plan tangent à l'ellipsoïde au point α' est parallèle au plan $\beta\gamma\omega$, qui est le plan diamétral conjugué de la direction $\omega\alpha'$. Or BC étant parallèle à $\beta\gamma$, l'est aussi au plan $\beta\gamma\omega$; donc BC est contenue dans le plan tangent en α' et par suite elle est tangente à l'ellipsoïde.

Même démonstration pour les cinq autres arêtes.

DEUXIÈME PARTIE. — Coupons l'ellipsoïde par le plan ABC ; la section est une ellipse Σ, passant par α', β', γ', et tangente à BC, CA et AB.

Coupons l'hyperboloïde par le même plan sécant, la section sera une conique Σ' passant par α', β', γ'. Cherchons la tangente en α'.

Pour l'obtenir, il faut considérer le plan tangent à l'hyperboloïde en α', lequel est déterminé par la génératrice B', et par la deuxième génératrice A', qui passent par α' ; ce plan tangent n'est donc autre que OBC ; son intersection avec le plan sécant est BC, et par suite BC est la tangente en α' à la conique Σ'.

Donc Σ' coïncide avec Σ et cette conique forme une première partie de l'intersection.

Quant à la seconde partie, elle est évidemment symétrique de la première par rapport à ω. On retrouve le résultat déjà obtenu.

TROISIÈME PARTIE. — Considérons une position HK de la génératrice mobile ; et soient R et K les traces de cette droite sur les plans $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$; je dis que αH et γ'K sont parallèles. En effet, HK et A' déterminent un plan, dont les intersections αH, γ'K par deux plans parallèles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma$ doivent être parallèles entre elles.

Prenons le point h symétrique de H par rapport à ω ; h sera sur l'ellipse Σ, et αh sera parallèle à α'H ; les plans tangents en h et H sont parallèles, et tout plan passant par K et ω passe aussi en h.

En résumé la question proposée revient à la suivante :

Étant donnés trois diamètres conjugués $\omega\alpha'$, $\omega\beta'$, $\omega\gamma'$ d'un ellipsoïde, dans le plan $\alpha'\beta'\gamma'$, on mène deux parallèles $\gamma'k$, $\alpha'h$; démontrer que le plan mené par chacun des points h et k, parallèlement au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point, va passer par le centre ω, et trouver le lieu décrit par l'intersection de ces deux plans.

Menons $\beta'L$ parallèle à $\gamma'k$ et $\alpha'h$, et considérons le plan diamétral conjugué de la direction $\alpha'h$ et sa trace σT sur le plan de l'ellipse Σ.

Il est clair que les plans tangents à l'ellipsoïde, en α' et en h, se coupent suivant une droite TD' située dans ce plan diamétral; et TD' sera parallèle à la trace ωD du plan $\omega\beta'\gamma'$ sur le plan diamétral $\omega\sigma T$. Or $\beta'\gamma'$ et KL coupent σT au même point D; la droite ωD parallèle à TD' appartient donc au plan ωKL.

Mais $\alpha'\beta'\gamma'$ est un triangle de surface maxima inscrit dans l'ellipse Σ, car la tangente en α' est parallèle à $\beta'\gamma'$, etc... De plus surf. $hkL =$ surf. $\alpha'\beta'\gamma'$.

Donc hkL est aussi un triangle inscrit de surface maxima, et la tangente hT, en h, est parallèle à KL.

De là il résulte que le plan mené par K parallèlement au plan tangent à l'ellipsoïde en h, n'est autre que ωKL; de même l'autre plan de l'énoncé est ωhL. Ces deux plans passent bien par le centre ω de l'ellipsoïde, et leur intersection ωL décrit le cône du second degré ayant pour sommet ω et pour base l'ellipse Σ.

Nous retrouvons ainsi le résultat déjà obtenu analytiquement.

QUESTION 321

Solution par M. Baron, élève au Lycée Henri VI.

Établir pour des valeurs entières et positives de p *et de* n *quel que soit* x, *l'identité*

$$(x-1)^{p+1}(1^p x + 2^p x^2 + \dots + n^p x^n)$$

$$= \beta_1 x^{n+p+1} + \beta_2 x^{n+p} + \ldots$$
$$+ \beta_{p+1} x^{n+1} + \alpha^p x^p + \alpha^{p-1} x^{p-1} + \ldots \alpha_1 x \qquad (1)$$

les coefficients α, β *étant indépendants de* x *et donnés par les égalités*

$$\beta_1 = n^p$$
$$\beta_2 = (n-1)^p - C^1_{p+1} n^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_{p+1} = (n-p)^p - C'_{p+1}(n-p+1)^p + \ldots + (-1)^p C^p_{p+1} n^p.$$
$$\alpha_1 = (-1)^{p+1}\, 1^p$$
$$\alpha_2 = (-1)^{p+1}.\, 2^p + (-1)^p C^2_{p+1}\, 1^p$$
$$\alpha_3 = (-1)^{p+1}.\, 3^p + (-1)^p C'_{p+1}.\, 2^p + (-1)^{p-1} C^2_{p+1}.\, 1^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_p = (-1)^{p+1} p^p + \ldots\ldots + (-1)^2 C^{p-1}_{p+1}\, 1^p$$

Pour établir cette identité développons $(x-1)^{\mu+1}$ par la formule du binôme, il vient

$$(x-i)^{p+1} = x^{p+1} + C^1_{p+1}\, x^p + C^2_{p+1}\, x^{p-1}$$
$$+ (-1)^3 C^3_{p+1}\, x^{p-2} \ldots + (-1)^p C^p_{p+1}\, x + (-1)^{p+1} C^{p+1}_{p+1}$$

Puis pour mettre en évidence les coefficients β, il suffit d'ordonner les deux termes du produit indiqué dans (1) par rapport aux puissances décroissantes de x et d'effectuer ce produit.

$$x^{p+1} - C^1_{p+1}\, x^p + C^2_{p+1}\, x^{p-1} + (-1)^3 C^3_{p+1}\, x^{p-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^p C^p_{p+1}\, x + (-1)^{p+1} C^{p+1}_{p+1}$$
$$n^p x^n + (n-1)^p x^{n-1} + (n-2)^p x^{n-2} + \ldots + 2^p x^2 + 1^p . x$$

$$\begin{array}{l|l} x^p\, x^{n+p+1} + (n-1).\alpha & x^{n+1} + (n-2)^p \\ \qquad - C^1_{p+2}\, n^p & \qquad + (-1)^1 C^1_{p+1}(n-1)^p x^{n+p} \\ & \qquad + (-1)^2 C^2_{p+1}\, n^p \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|l} x^{n+p-1} + \ldots + (n-p)^p & x^{n+1} + \ldots \\ \qquad - C^1_{p+1}(n-p+1)^p & \\ \qquad + C^2_{p+1}(n-p+2)^p & \\ \qquad \vdots & \\ \qquad + (-1)^{p-1} C^{p-1}_{p+1}(n-1)^p & \\ \qquad + (-1)^p C^p_{p+1} n^p & \end{array}$$

La loi de formation des coefficients β est évidente.

Pour un coefficient quelconque β_i on aura l'expression

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix.

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

DE LONGCHAMPS
Professeur
de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

2e SÉRIE

TOME SIXIÈME



ANNÉE 1882

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1882

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

INTRODUCTION DU POLYNOME DÉRIVÉ

EN MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (*)

On sait comment on reconnaît qu'un polynôme entier en x est divisible par $(x - a)$, et aussi comment on reconnaît qu'un polynôme entier est divisible par $(x - a)(x - b)$, a et b étant deux nombres *différents;* mais si l'on suppose que l'on fasse $a = b$, on rencontre une difficulté, lorsque l'on cherche les conditions de divisibilité d'un polynôme entier par $(x - a)^2$.

C'est cette question qui va nous occuper ici.

Désignons par U_x le polynôme proposé, et convenons que U_a exprime la valeur que prend ce polynôme quand nous y remplaçons x par a ; alors les deux conditions

$$U_a = 0, \quad U_b = 0,$$

si b est égal à a, se réduisent à la relation unique, *nécessaire mais non suffisante* $\quad U_a = 0$.

Reprenons les conditions du cas général.

$$U_a = A_0 a \ + A_1 a^{m-1} + \dots + A_m = 0$$
$$U_b = A_0 b^m + A_1 b^{m-1} + \dots + B_m = 0.$$

Nous pouvons remplacer l'une d'elles par la condition

$$\frac{U_a - U_b}{a - b} = 0$$

(*) Voir l'*Algèbre* de Lauvernay, p. 30.

ou
$$\left.\begin{array}{l} A_0 (a^{m-1} + b\, a^{m-2} + \dots + b^{m-1}) \\ + A_1 (a^{m-2} + b\, a^{m-3} + \dots + b^{m-2}) \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + A_{m-1} \end{array}\right\} = 0$$

Si l'on suppose que a tende vers b, cette relation devient à la limite

$$m A_0\, a^{m-1} + (m - 1) A_1\, a^{m-2} + \dots + A_{m-1} = 0.$$

Si nous appelons *polynôme dérivé d'un polynôme donné*

$$U_x = A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} + \dots + A_{m-1}\, x + A_m$$

celui que l'on obtient en écrivant la suite

$$m A_0\, x^{m-1} + (m - 1) A_1\, x^{m-2} + \dots + A_{m-1}$$

dont les termes sont déduits des termes correspondants de U_x par la loi suivante : *1° Si* $A_k\, x^{m-k}$ *est écrit dans le polynôme* U_x , $(m - k) A_k\, x^{m-k-1}$ *sera le terme correspondant du polynôme dérivé; 2° la constante* A_m *de* U_x *ne figure pas dans le polynôme dérivé;* nous pourrons former immédiatement le polynôme dérivé de U_x et en le désignant par U'_x , nous allons établir le théorème suivant:

Théorème. — *Pour qu'un polynôme* U_x *soit divisible exactement par* $(x - a)^2$, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait :* $U_a = 0$, $U'_a = 0$, *c'est-à-dire que* a *annule le polynôme proposé et le polynôme dérivé de celui-ci.*

Nous avons déjà reconnu que ces conditions étaient nécessaires, mais il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

On a $U_x = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$

$$U_a = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \dots + A_{m-1} a + A_m$$

donc puisque $U_a = 0$

$$\text{(A)}\quad U_x = (x - a) \left\{\begin{array}{l} A_0 (x^{m-1} + a x^{m-2} + \dots + a^{m-1}) \\ + A_1 (x^{m-2} + \dots\dots\dots\dots + a^{m-2}) \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + A_{m-1} \end{array}\right\}$$

ou $$U_x = (x - a)\, V_x$$

V_x désignant le polynome qui est placé dans la parenthèse. Mais on trouve que

$$V_a = U'_a$$

donc $$V_a = 0$$

et l'on a $$V_x = (x - a)\, W_x$$

par suite $$U_x = (x - a)^2\, W_x$$

ce qui prouve que si $U_a = 0$, $U'_a = 0$, U_x est exactement divisible par $(x - a)^2$.

Application. — *Reconnaitre que*

$$U = nx^{n-1} - (n + 1)x^n y + y^{n+1}$$

est exactement divisible par

$$V = x^2 - 2xy + y^2.$$

On écrira d'abord

$$U = y^{n+1} \left\{ n \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} - (n + 1) \frac{x^n}{y^n} + 1 \right\}$$

$$V = y^2 \left\{ \frac{x^2}{y^2} - 2 \frac{x}{y} + 1 \right\}$$

et en posant $$\frac{x}{y} = X$$

on considérera les deux polynomes :

$$u_x = nX^{n+1} - (n + 1)\, X^n + 1;$$

$$v = X^2 - 2X + 1.$$

On a $$u_1 = 0$$

$$u'_x = n\,(n + 1)\, X^n - n\,(n + 1)\, X^{n-1}$$

donc $$u'_1 = 0$$

et par suite v est divisible par $(X - 1)^2$; d'où l'on déduit que U est exactement divisible par V.

Polynôme dérivé second. Divisibilité par $(x - a)^3$. *Indice simple, indices multiples.*

On peut généraliser les idées précédentes et après avoir conçu le polynôme U′, dérivé de U, imaginer le polynôme dérivé de U′, le désigner par U″ et le nommer *polynôme dérivé second.* On aura donc

$$U_x = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots$$
$$+ A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A$$

$$U'_x = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + 2A_{m-2}x + A_{m-1}$$

$$U''_x = (m-1)mA_0x^{m-2} + (m-2)(m-1)A_1x^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2}$$

et nous nous proposons de rechercher les caractères de divisibilité par $(x - a)^3$, lesquels peuvent s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Pour qu'un polynôme entier* U_x *soit divisible par* $(x - a)^3$, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$U_a = 0 \qquad U'_a = 0 \qquad U''_a = 0.$$

Mais avant d'exposer la démonstration de cette propriété, nous donnerons quelques explications sur l'emploi si fréquent dans l'analyse de l'*indice*, du *double indice*, en général de l'*indice multiple*.

Quand on veut exprimer par une *notation abrégée* qu'une expression algébrique donnée U renferme une certaine lettre x, il est commode de représenter (comme nous l'avons fait plus haut, pour le polynôme entier) cette expression par U_x. Si l'on veut aussi rappeler que U a une valeur qui dépend de deux lettres x, y, nous pouvons le désigner par $U_{x,y}$; x et y sont dits des indices. On écrit aussi U_x^y ; mais en adoptant cette écriture algébrique qui s'énonce U *indice* x, *indice* y, il faut se rappeler que la lettre y représente un *indice*, et non un *exposant*. Cette convention faite, nulle confusion n'est possible et l'on pourra prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux notations précédentes ; l'une et l'autre sont d'ailleurs employées.

Lorsque les indices x, y, z..... d'une expression algébrique $U_{x,y,z.....}$ ou quelques-uns d'entre eux sont assujettis à prendre des valeurs entières et positives, la partie de l'algèbre qui étudie les relations dites *relations de récurrence*, auxquelles satisfont les relations considérées, est nommée *analyse combinatoire*.

Posons d'après la notation des indices

$$R_{x,m} = x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots + a^m$$

alors $\quad R_{a,m} = a^m + a^m + a^m + \ldots + a^m$

(B) $\quad R_{a,m} = (m+1)a^m$

$$\frac{R_{x,m} - R_{a;m}}{x - a} = \frac{x^m - a^m}{x - a} + a\,\frac{x^{m-1} - a^{m-1}}{x - a} + \ldots + a^{m-1}$$

et par suite

$$R_{x,m} - (m+1)a^m = (x-a)\left\{ R_{x,m-1} + aR_{x,m-2} + \ldots + a^{m-1} \right\} \quad \text{(C)}$$

la formule (A) du paragraphe précédent peut s'écrire, cette notation étant adoptée,

$$U_x = (x - a)\left\{ A_0 R_{x,m-1} + A_1 R_{x,m-2} + \ldots + A_{m-1} \right\}$$

et en posant

$$V_x = A_0 R_{x,m-1} + A_1 R_{x,m-2} + \ldots A_{m-1}$$

on a, en tenant compte de l'égalité (B),

$$V_a = A_0\, ma^{m-1} + A_1 (m - 1)a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}$$

et par suite d'après (C)

$$(1) \qquad V_x - V_a = (x - a)\left\{ \begin{array}{l} A_0(R_{x,m-2} + aR_{x,m-3} + \ldots + a^{m-2}) \\ + A_1(R_{x,m-3} + aR_{x,m-4} + \ldots + a^{m-3}) \\ + \ldots \\ + A_{m-3}\, R_{x,1} + a \\ + A_{m-2} \end{array} \right\}$$

ou $$V_x - V_a = (x - a)\, W_x$$

W_x désignant la parenthèse qui suit le facteur $(x - a)$ dans l'identité (1). Il est maintenant facile de reconnaître que $$2W_a = U'_a\,;$$
on a en effet

$$W_a = \left\{ \begin{array}{l} A_0 (R_{a,m-2} + aR_{a,m-3} + \ldots + a^{m-2}) \\ + A_1 (R_{a,m-3} + aR_{a,m-4} + \ldots + a^{m-3}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + A_{m-3} (R_{a,1} + a) \\ + A_{m-2} \end{array} \right\}$$

ou, et en vertu de l'égalité (B),

$$\begin{array}{l} A_0 a^{m-2}\left\{ 1 + 2 + 3 + \ldots + (m - 1) \right\} \\ + A_1 a^{m-3}\left\{ 1 + 2 + 3 + \ldots + (m - 2) \right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$+ A_{m-3}a \{ 1 + 2 \}$$
$$+ A_{m-2}$$

d'ailleurs, si l'on pose

$$S_p = 1 + 2 + 3 + \ldots + p,$$

on a aussi

$$S_p = p + (p - 1) + (p - 2) + \ldots + 1 ;$$

on aura $$2S_p = p(p + 1) ;$$

donc

$$2W_a = m(m - 1)A_0a^{m-2} + (m - 1)(m - 2)A_1a^{m-3} \ldots$$
$$\ldots + \ldots + 2 . 1A_{m-2}$$

ou enfin

$$2W_a = U''_a.$$

La démonstration du théorème qui nous occupe est maintenant très simple.

On a successivement établi que,

$$U_x - U_a = (x - a) V_x$$
$$V_x - V_a = (x - a) W_x$$

avec les conditions $$V_a = U'_a$$
$$2W_a = U''_a$$

on en déduit

$$U_x = U_a + (x - a) U'_a + (x - a)^2 W_x .$$

Si l'on suppose à la fois $U_a = 0$, $U'_a = 0$, on retrouve le résultat déjà établi; U_x est alors divisible par $(x - a)^2$, puisque l'on a $U_x = (x - a)^2 W_x$

et alors de deux choses l'une : ou W_a n'égale pas o, par suite U''_a n'égale pas o et alors U_x n'est pas divisible par $(x - a)^3$; ou au contraire $W_a = 0$, par suite $U''_a = 0$, alors W_x est divisible par $(x - a)$, et U_x par $(x - a)^3$; les trois conditions *nécessaires et suffisantes* pour que U_x soit divisible par $(x - a)^3$, sont donc

$$U_a = 0, \ U'_a = 0, \ U''_a = 0.$$

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE

Problème. — *Étant donné un point* P *dans l'intérieur d'un cercle, de ce point on lance une bille; trouver dans quelle direction il faut la lancer pour qu'elle revienne au point de départ après* n *réflexions.*

Soient *(fig. 1)* A_1 et A_n le premier et le dernier point d'incidence. Les deux triangles OA_1P, OA_nP ont le côté OP commun, $OA_1 = OA_n$; de plus, il est facile de voir que les angles en A_1 et en A_n sont égaux. Donc les angles en P sont égaux ou supplémentaires.

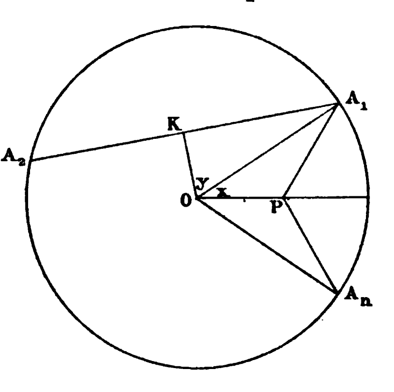


Fig. 1.

Si ces angles sont supplémentaires, le point mobile décrit un polygone régulier, convexe ou concave. Si donc on peut construire un polygone régulier de n côtés passant par le point P, il y aura une solution. Il suffit pour cela que l'apothème de ce polygone régulier soit inférieur à OP.

En second lieu, supposons que les angles en P soient égaux. Abaissons du point O une perpendiculaire OK sur A_1A_2; et posons $A_1OP = x$; $A_1OK = y$; nous trouvons facilement les égalités suivantes:

$$A_2\,OP = x + 2y$$
$$A_3\,OP = x + 4y$$

et, en général $\quad A_h\,OP = x + 2(h - 1)y.$

Pour que A_n soit symétrique de A_1 par rapport à OP, il faut que l'on ait

$$2x + 2(n - 1)y = 2K\pi$$

ou

$$x + (n - 1)y = K\pi$$

D'autre part on a, en posant $OP = a$, $OA_1 = r$,

$$\frac{a}{r} = \frac{\cos y}{\cos(x - y)}.$$

Or $$x - y = K\pi - ny.$$

Donc $$\frac{a}{r} = \pm \frac{\cos y}{\cos ny}.$$

Cette dernière équation définit l'angle y; on aura par suite l'angle x, par la première équation.

Dans le cas particulier de $n = 2$, l'équation précédente devient *quadratique*, et, par suite, peut se traiter d'une manière élémentaire; mais on peut aussi résoudre la question géométriquement comme il suit :

Soient *(fig. 2)* P la position initiale, A_1 et A_2 les deux points d'incidence; menons la ligne A_1O, et prolongeons-la jusqu'au point K où elle rencontre une perpendiculaire à OP menée par le point P; enfin décrivons le cercle PO, ayant pour centre P, et passant par le point O; il coupe en I la droite OK, et en D le prolongement de OP. Il est facile de voir que le quadrilatère PIKD est inscriptible; on a donc

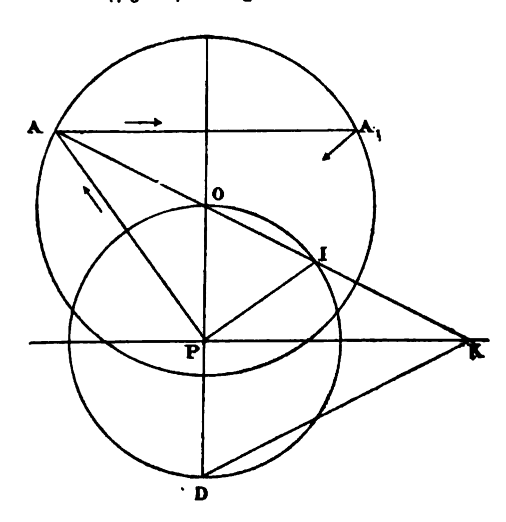


Fig. 2.

$$OI \times OK = 2OP^2;$$
$$OK - OI = OA_1 = r;$$

le problème est donc susceptible d'une solution graphique, puisqu'il revient à construire deux lignes connaissant leur différence et leur produit; on aura donc facilement OK, et, par suite, le point A_1 sera déterminé.

QUESTIONS

A L'USAGE DES CANDIDATS DE SAINT-CYR

Trouver une progression arithmétique pour laquelle la somme des termes soit donnée, quel que soit n, par la formule

$$3n^2 + 4n.$$

— Quelle relation doit-il y avoir entre les coefficients de deux équations du premier degré à deux inconnues pour que la valeur de l'une des inconnues soit double de l'autre ?

— Sur les quatre côtés d'un rectangle, on construit extérieurement des triangles équilatéraux ; on demande, connaissant le périmètre du rectangle, dans quel cas la surface totale sera maxima.

— Simplifier et rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{(\cos a + \cos b)^2}.$$

— Résoudre $\sin x + \cos x = \text{séc}\, x.$

— Les côtés d'un triangle sont

$$x^2 + x + 1, \quad 2x + 1, \quad x^2 - 1.$$

Démontrer que l'angle opposé au premier côté est de 120 degrés.

— Calculer à 0,01 près l'expression

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}.$$

Calculer à 0,01 la valeur de l'expression

$$\sqrt{3 + \sqrt{\pi}}.$$

Combien faudra-t-il prendre de chiffres exacts à π ?

— La surface d'une sphère augmente de 371 centimètres carrés lorsque le rayon augmente de 1 centimètre ; calculer, d'après ces données, le rayon à un millimètre près.

— Trouver la vraie valeur de l'expression

$$\sin a = \frac{\text{tg}\, a}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}$$

quand on y suppose $\text{tg}\, a = \infty$.

— Décomposer $2a$ en deux parties x et $2a - x$ telles que

$$\frac{2}{2a - x} + \frac{2a - x}{x}$$

soit maximum ou minimum.

— Trouver trois nombres en proportion continue, connaissant la somme 19 de ces nombres, et la somme 133 de leurs carrés.

— Une équation bicarrée dont les coefficients sont commensurables admet pour racine $2 - \sqrt{3}$; trouver les trois autres racines et l'équation qui leur a donné naissance.

— Résoudre l'équation $\cos^2 x - \cos^2 (a - x) = m$.

— Dans un cercle, on connait les longueurs c et c' de deux cordes parallèles et la distance d de ces deux cordes ; on demande : 1° le rayon du cercle ;

2° la distance du centre à l'une des cordes; 3° la longueur de la corde équidistante des deux premières.

— Calculer les éléments d'un triangle rectangle dont on connaît la surface et la somme des côtés de l'angle droit.

— On donne les trois angles d'un triangle ABC; calculer l'angle formé par la bissectrice de l'angle A et la médiane issue du même sommet.

— Calculer les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice b de l'angle droit et le rapport $\frac{m}{n}$ des deux côtés de l'angle droit.

— Les quantités variables x et y étant assujetties à vérifier l'équation

$$x^2 + y^2 + xy = 216,$$

assigner les valeurs de x et y qui rendent maxima l'expression

$$2x + 3y.$$

— Deux ouvriers doivent creuser un fossé; le premier en fait la moitié, et ensuite le second fait le reste; ils emploient alors 25 heures; si les deux ouvriers travaillaient ensemble, ils auraient fini en 12 heures; combien de temps chaque ouvrier mettrait-il pour faire seul l'ouvrage entier?

— Étant donné un point sur la bissectrice d'un angle, mener par ce point une sécante qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

— Décomposer 17 en trois parties telles que la somme des carrés de ces parties soit égale à 120, et le produit des parties extrêmes égal à 3 fois la deuxième.

— Si a et b sont deux nombres qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, $a^4 - b^4$ est divisible par 240.

— Trouver une équation dont les racines soient les carrés des racines de l'équation

$$7x^2 + 4x + 2 = 0.$$

— On donne l'équation $x^2 + bx + c = 0$; trouver une équation du second degré en y, telles que les racines de cette dernière équation soient égales aux racines carrées des racines de l'équation donnée.

— Calculer à $\frac{1}{20}$ près la valeur de $\sqrt{17 + \sqrt{5}}$.

— Etant donné un triangle isoscèle ABC, on mène par le sommet A une droite AX dans l'intérieur du triangle; des extrémités B et C de la base, on mène des perpendiculaires BB' et CC' sur la droite AX. On demande de déterminer la position de AX de façon que la somme, ou le produit, des deux perpendiculaires soit maximum ou minimum.

— Résoudre $\cos(x + \alpha) - \cos(x + \beta) = \cos \gamma$.

— Résoudre un triangle connaissant la base, l'angle au sommet, et la somme es produits des deux autres côtés par des quantités données.

— Sachant que $x^2 + y^2$ est constant, trouver le maximum ou le minimum de la quantité $mx + ny$.

— Déterminer la base du système de numération dans lequel le nombre 127 se trouve exprimé par le 243.

— Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le rayon du cercle inscrit et la surface. — Discussion des valeurs obtenues.

— Trouver les trois côtés d'un triangle tels que ces trois côtés et la surface soient quatre nombres entiers consécutifs.

— Démontrer que, quel que soit x, on a

$$\text{arc tg.} \frac{x \cos a}{1 - x \sin a} - \text{arc tg.} \frac{x - \sin a}{\cos a} = a.$$

— Étant donné un triangle quelconque ABC, mener par le point A une droite telle que si l'on abaisse sur cette droite les perpendiculaires BB', CC', les deux triangles BAB', CAC' soient équivalents.

— Résoudre un triangle connaissant deux côtés et la bissectrice de l'angle compris.

— Parmi les cylindres de même volume, quel est celui qui peut être inscrit à la plus petite sphère?

— Résoudre un triangle connaissant un côté a, la hauteur correspondante h et et la différence δ des angles B et C adjacents au côté donné.

— Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre et la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

— Trouver quatre nombres en proportion géométrique, connaissant leur somme, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs quatrièmes puissances.

— Résoudre le système $x + y = a$; $x^5 + y^5 = x^2 + y^2$.

— Trouver le maximum du produit xyz, sachant que le produit $a^x b^y c^z$ est constant.

— Les angles d'un triangle sont en progression arithmétique, et la somme des carrés de leurs sinus est égale à 2; quelle relation doit-il exister entre les côtés de ce triangle?

— Résoudre un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé A, et sachant que le côté b est double du côté c. Discuter.

— Résoudre et discuter l'équation $x^2(3\alpha - 1) + 2x + 4\alpha - 1 = 0$; trouver pour quelles valeurs de α les racines sont comprises entre $+1$ et -1.

— Couper un tronc de pyramide par un plan parallèle aux bases, de façon que la section soit moyenne proportionnelle entre les deux bases.

— Étant donné $\operatorname{tg} a$, calculer $\cos \frac{a}{4}$.

— Résoudre un triangle connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit.

— Résoudre un triangle connaissant les angles et la surface.

— Trouver quatre nombres en progression arithmétique, connaissant le produit des extrêmes, 22, et le produit des moyens, 40.

— Si S, S', S'' sont les sommes de n termes de trois progressions arithmétiques dont les premiers termes sont l'unité et dont les raisons sont respectivement 1, 2, 3, démontrer que l'on a

$$S + S'' = 2\,S'.$$

— Si a, b, c sont les termes de rang p, q, r d'une progression géométrique, on a

$$a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q} = 1.$$

— Dans une progression géométrique, le terme de rang $p + q$ est m; le terme de rang $p - q$ est n; en déduire que le terme de rang p est $\sqrt{mn}$, et le terme de rang q est $m \sqrt[2q]{\left(\frac{n}{m}\right)^p}$.

— Résoudre un triangle rectangle connaisant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0$.

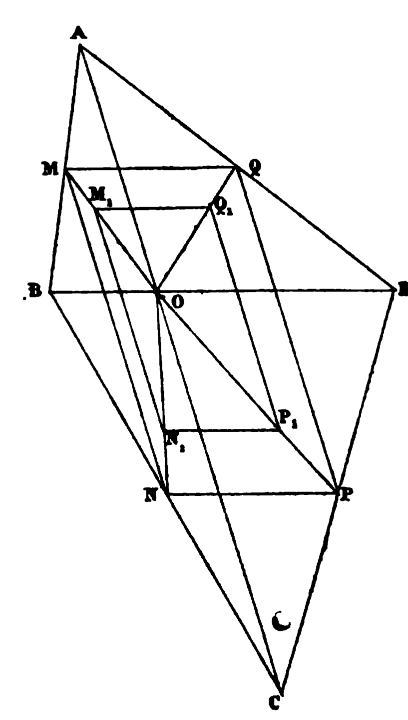
— Résoudre $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

QUESTION 350

Solution par M. GINO-LORIA, élève à l'Université de Mantoue (Italie).

Les centres de gravité des quatre triangles dans lesquels tout quadrilatère est divisé par ses deux diagonales sont les sommets d'un second quadrilatère semblable au parallélogramme maximum inscrit dans le quadrilatère proposé et équivalent aux $\frac{2}{9}$ *de ce quadrilatère.*

Soit ABCD le quadrilatère donné; MNPQ le parallélogramme inscrit maximum, O le point de rencontre des diagonales AC, BD.



Déterminons sur OM le point M_1 au tiers de OM à partir de M, et par des constructions analogues déterminons les points N_1, P_1, Q_1.

Ces points M_1, N_1, P_1, Q_1 sont les centres de gravité des triangles de l'énoncé.

Il résulte des constructions précédentes que

$$OM_1 = \frac{2}{3} OM;$$

$$ON^1 = \frac{2}{3} ON;$$

$$OP_1 = \frac{2}{3} OP;$$

$$OQ_1 = \frac{2}{3} OQ.$$

Donc M_1N_1 et MN; P_1N_1 et PN; P_1Q_1 et PQ; Q_1M_1 et QM sont deux à deux parallèles. Par suite les triangles OMN, OM_1N_1 sont semblables; de même ONP et ON_1P_1; OPQ et OP_1Q_1; OQM et OQ_1M_1. Dès lors les quadrilatères MNPQ et $M_1N_1P_1Q_1$ composés du même nombre de triangles semblables et semblablement placés sont semblables. — Leurs surfaces sont donc entre elles comme les carrés de deux lignes homologues. Donc

$$\frac{MNPQ}{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{OM^2}{MO_1^2} = \frac{9}{4},$$

donc $$M_1N_1P_1Q_1 = \frac{4}{9} MNPQ;$$

mais $$MNPQ = \frac{1}{2} ABCD;$$

donc $$M_1N_1P_1Q_1 = \frac{2}{9} ABCD.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Prevost, au Lycée du Mans, et Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 352

Solution par M. H. Bourget, au Collège d'Aix.

Construire géométriquement un triangle connaissant un angle, le côté opposé et la bissectrice de cet angle ou de son supplément.

1° Supposons le problème résolu. Soient ABC le triangle demandé, BAC l'angle donné $AE = l$ sa bissectrice, $BC = m$, le côté opposé (*fig. 1*).

Circonscrivons un cercle O au triangle ABC; la bissectrice AE prolongée passe en D milieu de l'arc BC. Donc si sur BC on décrit un segment capable de l'angle donné, le problème revient à mener par le point D une sécante telle que la partie AE ait une longueur donnée l.

Joignons BD. Les triangles semblables ABD, EBD donnent

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{ED}$$

ou $\overline{BD}^2 = AD \cdot ED.$

D'autre part $AD - ED = l.$

A l'aide de ces deux équations on peut construire la ligne AD.

Cette ligne une fois construite, de D comme centre avec AD pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera le segment capable en deux points A et A'. Joignant A et A' aux points B et C on aura deux triangles égaux et symétriques par rapport au diamètre DP.

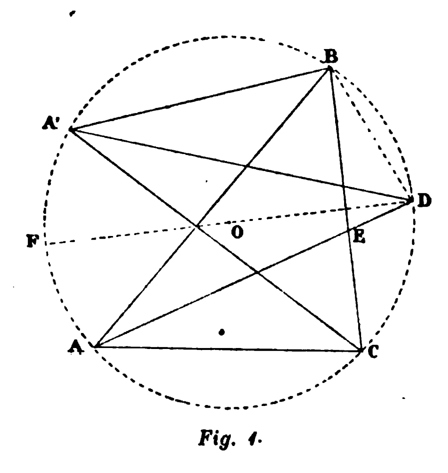


Fig. 1.

Pour que le problème soit possible, il faut que $AD < 2R$, R étant le rayon du cercle O.

Quand $AD = 2R$, A et A' se confondent, il n'y a qu'une solution; le triangle ainsi construit est isoscèle.

2° Si on donnait la bissectrice du supplément de l'angle A, on obtiendrait par une construction analogue le point D (*fig. 2*). Puis de D comme centre, avec AD comme rayon, on décrirait une circonférence qui couperait le cercle O en A et A'. On

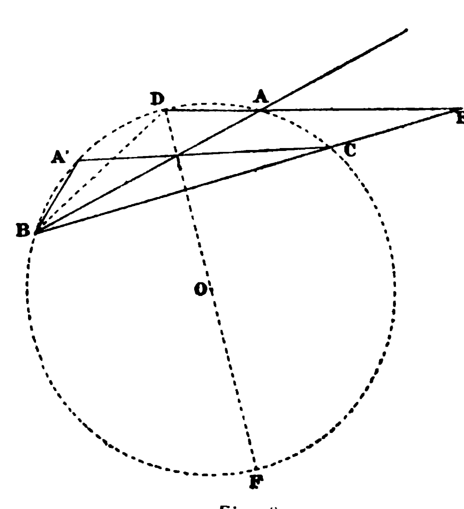


Fig. 2.

aurait encore deux solutions égales et symétriques par rapport à DF.

Le cercle de centre D coupe toujours le cercle O, à moins que AD ne soit nul ; dans ce cas le problème n'a qu'une solution, qui est un triangle isoscèle.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saunier Gino-Loria, à Mantoue ; Henry, à Bréchancourt ; Joly, à Tarbes ; Hellot, à Rouen ; Debray, à Chauveney-Saiut-Hubert ; Hoover à Dayton (États-Unis) ; Vigy, à Vitry-le-François

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE CAEN

Août 1881.

Étant donnés dans un plan deux points A et B, et une droite CD, trouver une circonférence qui passe par les deux points, et intercepte sur la droite une corde de longueur donnée. Examiner le cas où les deux droites sont rectangulaires. Dans les deux cas, trouver le rayon de la circonférence.

— Par un point donné sur l'un des côtés d'un triangle, mener une droite qui le partage en deux parties équivalentes.

— Un triangle tourne autour de sa base, dont la longueur est la moitié de la hauteur correspondante. Calculer le volume engendré, et comparer ce volume à celui d'une sphère dont le rayon serait égal à la base du triangle.

— Connaissant le rayon et la distance des centres de deux circonférences, extérieures l'une à l'autre, calculer la longueur de chaque tangente commune comprise entre les points de contact. Conditions pour que le quadrilatère formé par les quatre tangentes soit inscriptible.

— Déterminer les valeurs du paramètre m pour lequel les quatre racines de l'équation bicarrée

$$x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

sont en progression arithmétique. Calcul des racines correspondantes.

— Déterminer les deux points de la ligne de terre dont la distance à un plan donné est égale à 3 centimètres. Les traces du plan sont dans le prolongement l'une de l'autre, et font un angle de 30° avec la ligne de terre. On joindra à l'épure une explication succincte.

— La durée de l'année sidérale étant égale à 365,25637 jours, et celle de la révolution sidérale de la lune à 27,32166 jours, calculer la durée de la révolution synodique de la lune.

— Trouver le maximum du volume du cylindre inscrit dans une sphère de rayon 1.

— Démontrer que dans un tétraèdre régulier les six arêtes sont perpendiculaires deux à deux, et que leurs trois perpendiculaires communes se coupent en un point qui est en même temps le point de concours des quatre hauteurs.

— Connaissant la longueur l de l'arête d'un tétraèdre régulier, calculer la

distance d'un sommet à la face opposée, la plus courte distance de deux arêtes opposées, le volume du tétraèdre, enfin la grandeur, à une seconde près, de l'angle dièdre fourni par deux faces contiguës.

— Un plan parfaitement poli est incliné de 30° sur l'horizon ; sa longueur est de 25 mètres. On demande au bout de combien de temps un corps pesant abandonné en haut du plan sera arrivé en bas.

— Combien de temps faut-il pour rembourser un emprunt de 20000 francs par annuités de 1600 francs, le taux étant 4 0/0 ?

— Un tronc de pyramide régulière a pour bases deux carrés, l'un de 16 mètres, l'autre de 9 mètres de côté ; on sait de plus que le polyèdre est circonscrit à une sphère ; calculer le rayon de la sphère, le volume et la surface du polyèdre.

— Un arc de cercle compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π a pour sinus $-\frac{240}{289}$; calculer le sinus et le cosinus de la moitié de cet arc.

— Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x+c} = 0$$

et démontrer qu'elle a toujours ses racines réelles, a, b, c étant des nombres réels quelconques.

— Aux trois sommets A, B, C d'un triangle dont les angles sont aigus, on applique trois forces parallèles, de même sens, et respectivement égales à tgA, tgB, tgC. Trouver le point d'application de leur résultante, et montrer que la grandeur de cette résultante est égale au produit tg A. tg B. tg C. Dire comment il faudrait modifier l'énoncé du théorème si le triangle avait un angle obtus.

RENNES

Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un de ses sommets sans traverser la surface. Quelle position doit avoir le triangle pour engendrer le plus grand volume possible ?

— Un levier coudé, dont les deux bras, supposés rectilignes, font entre eux un angle de 120°, et dont l'un est double de l'autre, est en équilibre sous l'action de deux poids égaux suspendus à ses extrémités ; quelles sont les inclinaisons respectives des deux bras par rapport à l'horizontale ?

— On donne un point C centre d'un cercle de rayon variable, et un point A par lequel on mène les tangentes AB et AD. Pour quelle valeur du rayon la corde de contact BD a-t-elle une longueur donnée ? — Maximum de cette longueur. Interprétation géométrique.

— On donne une circonférence O de rayon R, et un point A, par lequel on mène toutes les sécantes telles que ABC. Quelle est celle qui détermine le triangle OBC de surface maximum ?

MONTPELLIER

Démontrer par la trigonométrie que la surface du dodécagone régulier est égale à trois fois le carré du rayon.

— Trouver un arc dont la tangente égale dix fois le sinus.

— Une personne a emprunté 10000 francs ; elle veut se libérer au moyen

de 24 paiements égaux effectués : le premier un an après l'emprunt et les suivants d'année en année. Calculer quelle doit être la valeur de l'annuité, le taux de l'intérêt étant de 4 1/2 0/0.

— Etant donnés deux alliages d'argent et de cuivre, l'un au titre de 0,[illegible], et l'autre au titre de 0,900, combien faut-il prendre de grammes de chacun pour faire 100 pièces de 1 franc au titre de 0,835 ?

— Transformer en un monôme le binôme $a \sin x + b \cos x$. Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle maxima ou minima ? Faire le calcul pour $a = 3$, $b = 4$.

MARSEILLE

Etant donné un triangle équilatéral ABC, inscrire dans ce triangle un autre triangle équilatéral A'B'C', sous cette condition que la surface du triangle A'B'C' soit la moitié de la surface du triangle ABC ; déterminer les segments AA' et A'B en fonction du côté a du triangle donné.

— Quel est le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes d'un cercle qui vont converger en un même point ?

— On donne par leurs projections une droite $(ab, a'b')$ et un point (o, o') ; on demande de trouver les projections d'une droite passant par le point (o, o') et rencontrant la ligne de terre et la droite $(ab, a'b')$.

— Etudier les variations de l'expression.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 20}$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Quelle est la longitude d'un lieu dont l'heure avance sur l'heure de Paris de $2^h\,27'\,36''$, et quelle est la latitude de ce lieu, sachant que la hauteur méridienne du soleil est au solstice d'été de $75°\,13'\,24''$, et que l'inclinaison du plan de l'écliptique sur le plan de l'équateur est égale à $23°\,27'\,15''$.

— Deux cercles dont les rayons sont R et R' sont tangents extérieurement. Mener une sécante qui détermine dans le premier cercle une corde égale à R, et dans le second une corde égale à R'. Déterminer le point où cette sécante coupe la ligne des centres.

POITIERS

Une barre homogène dont l'unité de longueur pèse a kilogrammes, et dont une extrémité A est fixe, supporte en un point B de sa longueur un poids P, tandis qu'une force verticale Q, appliquée de bas en haut à l'autre extrémité C, est destinée à maintenir la barre en équilibre ; étant donnés a, P, Q et la distance AB, trouver AC. Montrer qu'il y a un minimum pour Q, et trouver la valeur correspondante de C.

— Exprimer, en fonction du demi-paramètre et de l'angle α que fait la tangente à la parabole en un point M avec le rayon vecteur : 1° la longueur de la normale à la courbe au point M ; 2° la longueur de l'ordonnée ; 3° la distance qui sépare le pied de l'ordonnée du sommet de la parabole ; 4° le rayon vecteur.

— Entre quelles limites peut varier la fraction

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} ?$$

— Deux corps pesants partent au même moment d'une hauteur h ; le premier, sans vitesse initiale, suit un plan faisant avec l'horizon un angle α ; le second suit un plan incliné d'un angle β, et arrive en même temps que le premier. Quelle est la vitesse initiale? Application $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; $h = 9{,}8088$.

NANCY

Trouver quatre nombres en proportion, sachant que la somme des moyens est égale à a, la somme des extrêmes égale à b, et la somme des carrés des quatre termes égale à k^2.

— Calculer le rayon d'une sphère sachant que les deux bases d'une zone de cette sphère sont distantes du grand cercle parallèle de 15° et de 75°, et que la surface de la zone est égale à 16 mètres carrés. — Calculer le volume du segment sphérique compris entre les plans des deux bases de la zone.

GRENOBLE

Maximum et minimum de

$$3 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x.$$

— A quelles distances du sommet d'une pyramide de hauteur égale à 142 mètres faut-il mener des plans parallèles à la base pour que son volume soit divisé en trois parties équivalentes?

BORDEAUX

Maximum et minimum de

$$\sin x + 3 \cos x.$$

— Calculer en kilomètres carrés la surface de la zone terrestre comprise entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est de 30°.

— Sur deux droites rectangulaires se coupant en O, on prend quatre points A, B, C, D à une distance d de O ; de chacun de ces points comme centre, on décrit des circonférences égales et tangentes deux à deux ; puis une grande circonférence enveloppe la première et leur est tangente ; calculer le rayon de chacune de ces circonférences et le rapport de la surface de chacun des cercles intérieurs au cercle enveloppant. Quelle doit être la valeur de d pour que le rapport soit $\frac{1}{10}$.

TOULOUSE

Étant donné un petit cercle de rayon r sur une sphère de rayon R, déterminer le rayon d'un second cercle parallèle au premier, et comprenant avec le premier un segment sphérique qui soit dans un rapport k avec le cône qui aurait pour sommet le centre du premier cercle et pour base le second cercle. Discuter.

— Trouver sur l'une des arêtes d'une pyramide polygonale de sommet S un point B tel que, si on mène par ce point un plan parallèle à celui de la base de la pyramide, l'aire de la section obtenue soit les trois quarts de l'aire de la base de la pyramide.

PARIS

Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos(x + h)$$

h étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

— Trouver la valeur de $\operatorname{tg} x$ d'après l'équation

$$\operatorname{tg}^2 x = K \operatorname{tg}(x + a) \operatorname{tg}(x - a);$$

discuter la solution, et trouver sans tables la valeur de x lorsque $K = 1$.

— Trouver les rayons de bases du tronc de cône circonscrit à une sphère et dont le volume est double de celui de cette sphère; on connaît le rayon R de la sphère.

— Calculer les côtés b et c d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse a, et dans lequel les angles B et C vérifient la relation

$$\sin B = 2 \sin C.$$

— Une pyramide régulière a pour base un triangle équilatéral dont on donne le côté a, on sait de plus que la surface latérale de la pyramide est égale à deux fois la surface de la base. Calculer la hauteur.

— Etant donné un cône circulaire droit dont le côté est égal au diamètre $2a$ de la base, trouver à quelle distance x du sommet il faut mener un plan parallèle à la base pour que la surface du cercle suivant lequel ce plan coupe le cône soit égale à la surface latérale du cône comprise entre les deux plans parallèles.

— Connaissant le côté a de la base d'une pyramide régulière à base carrée, et la hauteur h, calculer le rayon de la sphère circonscrite.

— Les bases d'un tronc de pyramide étant B et b, calculer l'aire de la section faite dans cette pyramide par un plan équidistant des bases.

— Trouver l'angle de deux plans dont l'un est parallèle à la ligne de terre.

— Trouver une progression arithmétique de cinq termes connaissant la somme $5a$ de ses termes, et la somme $\frac{1}{b}$ de leurs inverses. On déterminera le terme du milieu et la raison.

— Trouver la relation qui doit exister entre a et a' pour que le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{x^2 + 2ax + 1}{x^2 + 2a'x + 1}$$

soient égaux et de signes contraires.

— ABCD est un rectangle dont les côtés $AB = a$, $BC = b$ sont donnés. Calculer au moyen de ces données les deux volumes engendrés par les triangles AOB, COD tournant autour de AB. Le point O est le point de concours des diagonales.

— Combien faut-il prendre de termes dans la progression arithmétique

$$4.\ 7.\ 10.\ 13\ldots.$$

pour que la somme de ces termes soit égale à 60500.

— Résoudre les trois équations

$$x + y + z = 1$$
$$ax + by + cz = h$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = h^2$$

et faire voir que le numérateur et le dénominateur des valeurs de chacune des inconnues peuvent être décomposés en facteurs du premier degré.

— On considère un cercle de rayon R, et une tangente AB à ce cercle; on mène

BC perpendiculaire à AO. Calculer le volume du cône engendré par ABC tournant autour de AC. On donne le rayon R et OA = a.

— A quelle condition les trois équations

$$ax + by + cz = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$
$$a''x + b''y + c''z = 0$$

sont-elles satisfaites autrement que par $x = 0, y = 0, z = 0$?

QUESTIONS PROPOSÉES

1. — Démontrer que le polynôme

$$A = n(n + 1)(n + 2)x^n - 6.n.1.x^{n-1}$$
$$- 6.(n - 1).2x^{n-2} - 6.(n - 2).3.x^{n-3}\ldots$$
$$- 6.2(n - 1).x - 6n$$

est exactement divisible par $(x - 1)$, et donner le quotient.

(G. de Longchamps.)

2. — Démontrer que le polynôme

$$A = nx^{n+1} - (1 + np)x^n + (p - 1)x^{n-1} + (p - 1)x^{n-2}$$
$$+ \ldots + (p - 1)x + p$$

est exactement divible par

$$x^2 - (p + 1)x + p.$$

(G. de Longchamps.)

3. — Résoudre l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$$

4. — Démontrer que, si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a ses racines réelles, l'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

a aussi ses racines réelles, quel que soit a.

(G. de Longchamps.)

5. — A tout triangle ABC, on peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABC. Ces triangles sont inscriptibles dans une circonférence ayant pour centre le centre des médianes antiparallèles de ABC.

(J. Neuberg.)

6. — A tout triangle ABC, on peut inscrire deux trian-

gles ayant leurs côtés parallèles aux bissectrices de ABC; ces triangles ont le même cercle des neuf points.

(J. Neuberg.)

7. — Sur les côtés d'un triangle donné ABC, on construit trois triangles semblables ABC_1, BCA_1, CAB_1, tels que les droites AA_1, BB_1, CC_1, concourent en un même point D. Démontrer que les points A_1, B_1, C_1, décrivent chacun une circonférence. *(J. Neuberg.)*

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, *à l'usage des aspirants au baccalauréat es sciences et des candidats aux écoles du gouvernement*, *par M.* **Combette**, *professeur au lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Germer-Baillière.

Nous avons voulu attendre la publication du second fascicule de cet ouvrage pour pouvoir l'étudier d'ensemble; nous avons trouvé, dans ce nouveau cours écrit par M. Combette, les qualités qui devraient se rencontrer dans tout livre écrit pour des élèves : la précision, et surtout l'ordre méthodique dans l'exposition. M. Combette, tout en introduisant dans son Cours de Géométrie, quelques-unes des notions connues maintenant sous le nom de *géométrie moderne*, et qu'il est indispensable d'exposer aux élèves, même de Mathématiques élémentaires, a su cependant rejeter les modifications que l'on tendait à introduire dans l'étude du cinquième livre, et revenir aux méthodes de Legendre, évitant ainsi aux élèves de tourner souvent dans un cercle vicieux sous prétexte d'avoir des idées plus générales sur les figures de l'espace.

M. Combette, sans vouloir faire une géométrie sphérique, a cependant traité quelques questions relatives à la sphère, telles que les cercles tangents sur la sphère, le plan radical de deux sphères, etc.; mais l'une des parties importantes de l'ouvrage que nous analysons ici, est l'étude des courbes usuelles. L'auteur a eu soin de rattacher les trois courbes l'une à l'autre par la considération des directrices et de l'excentricité. On sait que c'est en partant de la définition des coniques par l'excentricité, que les auteurs anglais ont étudié ces courbes au point de vue géométrique; mais, jusqu'à présent, cette notion géométrique n'avait pas encore eu droit de cité chez nous.

Enfin, pour résumer ce que nous avons à dire de l'ouvrage de M. Combette, nous dirons que cette géométrie contient tout ce que l'on demande aux examens des écoles, que par suite elle doit être considérée comme un ouvrage complet, et a droit au même succès que les deux autres ouvrages du même auteur que nous avons signalés précédemment.

Cours de Géométrie descriptive, *par* M. Ch. Brisse, *professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes, répétiteur de géométrie et stéréotomie à l'École polytechnique.* — Paris, Imprimerie Gauthier-Villars. Prix: 5 francs.

La première partie seulement de cet ouvrage est parue; mais nous n'avons pas voulu attendre pour la recommander à nos lecteurs; les idées énoncées par l'auteur ont en effet une importance capitale: M. Brisse insiste sur ce point qu'il n'y a jamais qu'une seule méthode générale pour la solution d'un même genre de questions, et que cette méthode ne comporte aucune exception ; en outre, l'auteur a le soin de rappeler que toujours on doit effectuer une construction dans l'espace avant de faire une épure, et qu'on ne doit lire dans l'espace que pour disposer des données, et lire l'épure que lorsqu'elle est terminée; on doit s'occuper, pendant son exécution, exclusivement d'appliquer les règles données pour *le trait.*

M. Brisse a, dès le début, signalé l'emploi d'un seul plan horizontal de projection, mais avec autant de plans verticaux qu'on le juge nécessaire. D'après cela, il devenait inutile d'indiquer la méthode des changements de plan, et aussi de faire l'étude des prétendus cas particuliers d'un problème, qui tiennent au choix du système de plans que l'on considère ; au contraire l'auteur a étudié avec soin la méthode du rabattement et la méthode des rotations. Puis il a donné toutes les indications nécessaires à l'exécution d'une épure, la distinction des parties vues et des parties cachées, et, à propos des polyèdres, a donné des exercices d'ombre.

Les problèmes traités par M. Brisse sont développés assez complètement pour que les élèves y trouvent toutes les indications utiles, et en même temps soient forcés à un travail personnel sérieux, pour en tirer un véritable profit; c'est, à nos yeux, une bien grande qualité dans un ouvrage classique. Nous espérons que beaucoup de personnes, jugeant comme nous, assureront le succès de cet ouvrage, dont la première partie fait désirer très vivement la seconde.

La solution de la question n° 355 donnée dans le numéro de décembre est inexacte; nous en donnerons une solution nouvelle dans le numéro de février.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 202-2.

RÉSOLUTION PAR LES TABLES

DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A RACINES RÉELLES

Lorsque l'équation du second degré a ses racines réelles et inégales, on peut toujours, par un changement de variable, l'identifier avec une équation trigonométrique très simple et on obtient, par suite, très rapidement les racines de l'équation au moyen des tables de logarithmes, comme nous allons l'indiquer.

1. — Proposons-nous, d'abord, de déterminer $\sin 2\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg} \varphi$. Nous avons

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi ;$$

puis $$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} ;$$

donc, nous avons

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Inversement, nous aurons, pour déterminer $\operatorname{tg} \varphi$ en fonction de $\sin 2\varphi$, l'équation

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{2}{\sin 2\varphi} \operatorname{tg} \varphi + 1 = 0. \qquad (1)$$

De même, nous savons que l'équation qui donne $\operatorname{tg} \varphi$ en fonction de $\operatorname{tg} 2\varphi$ est

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi} \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0. \qquad (2)$$

2. — Cela posé, considérons l'équation du second degré ramenée à la forme

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (3)$$

dans laquelle nous supposons d'abord q positif, et son signe mis en évidence ; posons

$$x = z \sqrt{q} ;$$

l'équation devient, en divisant par q,

$$z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0. \qquad (4)$$

Puisque les racines sont réelles, nous pouvons poser

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{2}{\sin 2\varphi},$$

ce qui nous donne

$$\sin 2\varphi = \frac{-2\sqrt{q}}{p};$$

cette équation donne pour φ une valeur réelle, car on voit facilement que cette valeur de sin 2φ est comprise entre -1 et $+1$, son carré étant $\frac{4q}{p^2}$, quantité moindre que 1, par hypothèse ; connaissant l'angle 2φ des tables, nous en tirons l'angle φ, puis nous avons

$$z' = \operatorname{tg} \varphi; \quad z'' = \operatorname{cotg} \varphi;$$

d'où nous tirons $x' = \sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi; x'' = \sqrt{q} \operatorname{cotg} \varphi.$

Exemple. — Soit à résoudre par les tables l'équation

$$x^2 - 10{,}83945x + 26{,}991104 = 0.$$

Nous trouvons $2\varphi = 73°27'14''$;

puis $x' = 3{,}87625,$

$x'' = 6{,}9632.$

3. — Supposons en second lieu que l'équation soit de la forme

$$x^2 + px - q = 0, \qquad (5)$$

dans laquelle nous admettons encore q positif ; posons comme précédemment $x = z\sqrt{q}$;

l'équation devient, après avoir divisé par q,

$$z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z - 1 = 0.$$

Si nous posons alors

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi},$$

nous identifions l'équation (6) avec l'équation (2), et nous en tirons

$$z' = \operatorname{tg} \varphi$$
$$z'' = -\operatorname{cotg} \varphi.$$

Donc nous avons

$$x' = \sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi$$
$$x'' = -\sqrt{q} \operatorname{cotg} \varphi.$$

Exemple. — Proposons-nous de résoudre l'équation

$$x^2 + 0{,}42331x - 8{,}53972 = 0.$$

De l'égalité $\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\sqrt{q}}{p}$

nous tirons $\quad 2\varphi = 85^\circ\ 51'\ 27''$;

puis $\quad x' = 2{,}71828$

$\quad x'' = -3{,}14159.$

La méthode précédente est indiquée dans la Trigonométrie américaine de *Chauvenet*; elle a une grande analogie avec celle qui est généralement enseignée; mais pourtant elle a sur celle-ci l'avantage d'éviter la connaissance de la résolution de l'équation du second degré.

4. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les racines étaient réelles; mais nous pouvons encore employer la première forme quand les racines sont imaginaires; dans ce cas, nous avons nécessairement q positif, et l'équation a la forme $\quad x^2 + px + q = 0.$

En posant encore $\quad x = z\sqrt{q}$

nous trouvons, en divisant par q,

$$z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0.$$

Posons alors $\quad \dfrac{p}{2\sqrt{q}} = \cos\varphi$:

l'angle φ est calculable par les tables; car le carré du premier membre, $\dfrac{p^2}{4q}$, est inférieur à 1; alors l'équation devient $\quad z^2 + 2z\cos\varphi + 1 = 0$

ou $\quad z^2 + 2z\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 0.$

Ce qui peut s'écrire

$$(z + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 0$$

ou $\quad (z + \cos\varphi + i\sin\varphi)(z + \cos\varphi - i\sin\varphi) = 0.$

Dans ce cas, les racines ont pour expression, comme on le sait, $\quad a + bi$ et $a - bi$;

on a donc $\quad a = \sqrt{q}\cos\varphi;\ b = \sqrt{q}\sin\varphi$;

par conséquent, nous pouvons calculer les racines imaginaires.

EXEMPLE. — Soit à résoudre l'équation

$$x^2 + 6{,}28318\,x + 10{,}87312 = 0,$$

nous trouvons $\varphi = 17^\circ\,41\ 10'$,

puis $a = -3{,}14159$

$b = 1{,}001769.$

Donc les racines sont

$$-3{,}14159 \pm 1{,}001769\,i.$$

MAXIMA ET MINIMA DANS LES PROBLÈMES

MÉTHODE DIRECTE

Quand l'énoncé d'un problème se borne à la recherche du maximum ou du minimum d'une quantité, on doit se proposer d'abord d'obtenir l'expression de cette quantité en fonction d'une variable dont le choix, qui n'est pas absolu, est généralement indiqué par l'énoncé ou par la figure.

Cela fait, on cherche à discuter l'expression trouvée, c'est-à-dire *à suivre sa variation quand la variable choisie va, par exemple, toujours en croissant entre les valeurs extrêmes compatibles avec la question.*

Si on peut préciser cette variation, il est clair que l'on arrive naturellement à déterminer *les valeurs correspondantes de la fonction et de la variable pour lesquelles la fonction passe par un maximum ou par un minimum.*

C'est ce que nous appellerons la *méthode directe.*

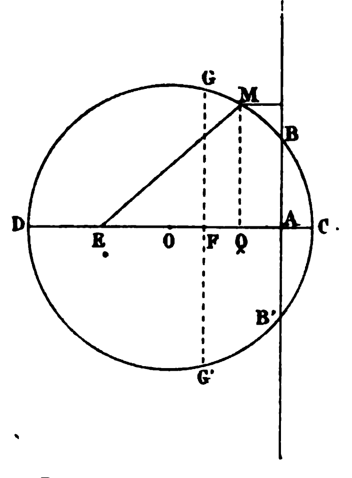
Nous allons en donner plusieurs exemples.

Exemple 1. — *Étant donnés une circonférence* O, *une droite* BB' *située à une distance* OA *du centre égale à* $\frac{3R}{4}$, *et un point* E *situé sur le diamètre* OA *à une distance du centre égale à* $\frac{R}{2}$, *on propose de trouver les positions d'un point* M *mobile sur la circonférence, pour lesquelles la somme des carrés de ses distances au point* E *et à la droite* BB' *est maximum ou minimum.*

Prenons pour variable x la distance du centre à la projection Q du point mobile sur le diamètre OA, cette variable étant positive ou négative suivant que le point Q est à droite ou à gauche de O; et cherchons l'expression de la somme y des carrés en fonction de x. Pour la position M du point, nous avons

$$y = \left(\frac{3R}{4} - x\right)^2 + \left(R^2 + \frac{R^2}{4} + Rx\right)$$

et il est aisé de s'assurer que cette expression conserve la même forme quand le point M occupe une position quelconque sur la circonférence, et cela grâce à la convention faite sur le signe de x. Or, cette expression étant ordonnée par rapport à x, s'écrit



$$y = x^2 - \frac{R}{2}x + \frac{29R^2}{16}.$$

C'est donc un trinôme du second degré en x qu'il s'agit de discuter quand x croît de $(-R)$ (à $+R$). A cet effet, nous le mettons sous la forme

$$y = \left(x - \frac{R}{4}\right)^2 + \frac{7R^2}{4}.$$

Sous cette forme nous voyons que y décroîtra jusqu'au moment où x croissant atteindra $\frac{R}{4}$; à partir de ce moment, y croîtra indéfiniment.

En prenant les valeurs extrêmes, on a donc le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|l}
x & -R \ldots \quad < -\frac{R}{2} \ldots < -\frac{R}{4} \ldots < +R \\
y & \frac{53R^2}{16} \ldots > \frac{37R^2}{16} \ldots > \frac{7R^2}{4} \ldots < \frac{37R^2}{16}
\end{array}$$

donc y passe par le *minimum* $\frac{7R^2}{4}$ quand $x = \frac{R}{4}$.

De plus, lorsque x atteint la valeur R, le point M est en C; et le point continuant à parcourir la circonférence, x repasse par les valeurs précédentes; il en est donc de même de y; la valeur $\frac{37R^2}{16}$ est donc un *maximum* pour y; de même, le point M arrivant en D, et continuant à parcourir la courbe, y va en décroissant, la valeur $\frac{53R^2}{16}$ est donc encore un *maximum*.

En résumé, dans une révolution complète du point M, la somme des carrés passe par deux maxima, quand le point mobile est en D ou en C, et elle passe par deux minima égaux quand le point mobile est aux deux points symétriques G et G′ tels que $OF = \frac{R}{4}$.

Exemple 2. — *Étant donnés les trois points* A, B, C, *on considère un point* M *parcourant de* x *vers* y *la droite indéfinie qui passe par les points* B *et* C; *on propose de trouver la position du point* M *pour laquelle la somme des carrés de ses distances aux points* A, B, C *est minima.*

Nous représentons par a la distance donnée AD du point A à BC, et par b, c les distances données DB, DC.

Enfin, nous prenons pour variable x la distance du point D au point M, cette distance étant comptée positivement dans le sens yx, et négativement en sens inverse.

Dans la position M, nous obtenons, pour la somme y de carrés,

$$y = a^2 + x^2 + (b - x)^2 + (c + x)^2.$$

Cette expression reste évidemment de même forme tant que le point M est à gauche du point D ; on démontre aisé-

ment que cette forme se conserve encore lorsque ce point est à droite de D, la distance de ce point à D étant alors $(-x)$.

En ordonnant y par rapport à x, nous obtenons

$$y = 3x^2 - 2(b-c)\,x + (a^2 + b^2 + c^2);$$

c'est un trinôme du second degré que nous écrivons

$$y = 3\left[\left(x - \frac{b-c}{3}\right)^2 + \frac{3a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2bc}{9}\right].$$

Nous voyons alors que, x croissant de $-\infty$ à $\frac{b-c}{3}$, ce trinôme décroît jusqu'à

$$y_1 = \frac{3a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2bc}{9},$$

et que x croissant à partir de $\frac{b-c}{3}$, la quantité y croît indéfiniment.

Cette fonction est donc *minima* quand $x = \frac{b-c}{3}$, et sa valeur minima est y_1.

En supposant $b > c$, comme dans la figure, nous obtenons la position E du point mobile dans le cas de minimum en prenant le milieu O de BC, et portant $\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{OD}}{3}$.

Remarque. — Ce résultat est facile à voir par la géométrie; soit, en effet, G le centre des moyennes distances des points A, B, C, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle ABC; on sait que *la somme des carrés des distances d'un point de l'espace aux points* A, B, C *égale trois fois le carré de la distance de ce point au point* G, *plus la somme des carrés des distances du point* G *aux points* A, B, C.

Donc le minimum de la somme des carrés des distances aux points A, B, C, est le même que le minimum de la distance au point G; si donc le point variable se déplace sur BC, le minimum sera atteint lorsqu'il se trouvera à la projection E de G sur BC.

Exemple 3. — *Étant donné un point* A, *intérieur à une circonférence* O, *on propose de tracer par ce point deux cordes rectangulaires* MN, PQ, *telles que l'aire du quadrilatère* MPNQ *soit maxima ou minima.*

Soit a la distance donnée OA, et soit x la distance variable du point O à la corde MN.

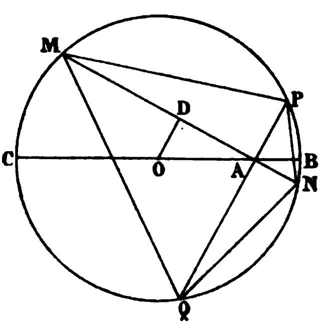
L'aire d'un quadrilatère étant la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur ses diagonales, l'aire y du quadrilatère MPNQ a pour expression

$$y = 2\text{MD} \times \text{QE}.$$

Or $\quad \text{MD} = \sqrt{\text{R}^2 - x^2}; \quad \text{QE} = \sqrt{\text{R}^2 - \text{OE}^2}\cdot$

Donc $\quad y = 2\sqrt{(\text{R}^2 - x^2)(\text{B}^2 - a^2 + x^2)}.$

Or, y étant positif, son maximum et son minimum auront lieu dans les mêmes circonstances que le maximum ou le minimum du carré



$$y^2 = -4x^4 + 4a^2x^2 + 4\text{R}^2(\text{R}^2 - a^2);$$

le second membre étant un trinôme bicarré en x, nous pouvons suivre sa variation; et à cet effet nous l'écrivons

$$y^2 = -4\left[\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - \left(\text{R}^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right].$$

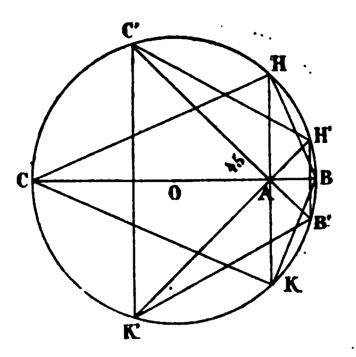
Sous cette forme, nous voyons que, x croissant de o à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la quantité y^2 croît, et x croissant de $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ à a, y décroît; donc nous obtenons un maximun de y^2, et par suite de y quand les deux cordes sont également inclinées sur le diamètre OA; la valeur maximun de y est alors

$$2\text{R}^2 - a^2.$$

D'ailleurs, la surface va en décroissant quand x croît de $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ à a, c'est-à-dire jusqu'au moment où la corde MN devient perpendiculaire au diamètre OA; il est clair qu'en supposant que cette corde continue à pivoter autour du point A, l'aire va repasser par les valeurs précédentes; donc cette

aire atteint un minimum au moment où l'une des cordes coïncide avec le diamètre OA; la valeur de ce minimum est

$$2R\sqrt{R^2 - a^2}.$$



En résumé quand l'angle droit fait une révolution complète autour du point A, l'aire du quadrilatère passe par deux maxima égaux C'H'B'K', et deux minima égaux CHBK.

Remarque. — Tous ces exemples se traitent aisément en faisant usage de la limite F' (x) du rapport $\left(\frac{k}{h}\right)$ de l'accroissement de la fonction F (x) à l'accroissement de x. Ainsi, comme nous l'avons déjà indiqué, l'étude de la variation, d'une fonction, de laquelle résultent ses maxima et minima, est ramenée à l'étude du signe d'une autre fonction F' (x) qui est sa dérivée; c'est la véritable méthode générale pour résoudre ce genre de questions. Ce qui va suivre est un composé de méthodes détournées qui ne peuvent être comprises complètement et rendues rigoureuses que par un retour à ces idées générales de continuité.

MÉTHODE INDIRECTE

Méthode. — La méthode directe n'est applicable, dans les cours élémentaires, que si l'on sait discuter la fonction qui exprime, à l'aide de la variable choisie, la quantité dont on cherche le maximum ou le minimum.

Dans le cas contraire, on peut arriver souvent à trouver néanmoins le maximum ou le minimum, en prenant une *méthode indirecte* qui peut se résumer ainsi :

Soit y la quantité exprimée en fonction de la variable x; proposons-nous de chercher comment il faut prendre x pour que la quantité y prenne une valeur donnée m, que nous laissons, d'ailleurs arbitraire; si nous sommes conduit, pour

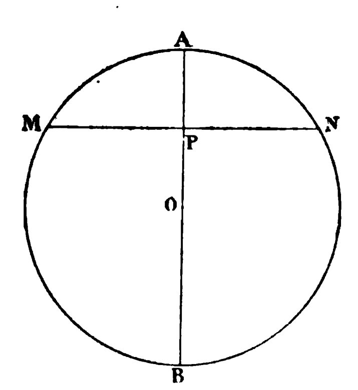
résoudre ce problème auxiliaire, à une équation en x que nous sachions résoudre, nous pourrons trouver les conditions de possibilité de cette question, et en déduire les limites de grandeur de l'indéterminée m. Ces limites feront alors généralement connaître la valeur maxima ou minima de y.

C'est ainsi que nous avons trouvé, dans les exemples donnés pour les problèmes du second degré, qu'une question de maximum se dégageait toujours de la discussion.

Nous donnons encore ici de nouveaux exemples de l'application de cette méthode.

Exemple I. — *Tracer dans une circonférence donnée une corde* MN *telle que la somme de la longueur de cette corde et de la distance* OP *au centre soit maxima.*

Il suffit évidemment d'étudier la question en supposant que la corde MN se déplace parallèlement à elle-même, $OP = x$, que nous prenons comme variable, croissant de o à R.



La quantité y, dont on cherche le maximum, est alors

$$y = x + 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Nous ne savons pas discuter cette fonction de x; nous avons alors recours à la méthode indirecte.

Nous nous proposons de trouver x de sorte que y prenne la valeur arbitraire m; il suffit pour cela de résoudre l'équation

$$x + 2\sqrt{R^2 - x^2} = m.$$

Cette équation étant irrationnelle, nous isolerons le radical dans un membre

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x, \qquad (1)$$

et nous élèverons les deux membres au carré; en ordonnant par rapport à x, nous obtenons

$$5x^2 - 2\,mx + (m^2 - 4R^2) = 0 \qquad (2)$$

Pour que la quantité y puisse acquérir la valeur m, il faut et il suffit qu'il corresponde à cette valeur une racine réelle de l'équation (1) ; c'est-à-dire que, pour cette valeur m, l'équation (2) ait une racine réelle, positive et moindre que m (à cause de l'élevation au carré).

Or, la condition de réalité des racines de l'équation (3) est

$$m^2 - 5(m^2 - 4R^2) \geq 0$$

ou

$$m^2 - 5R^2 \leq 0$$

ce qui conduit à la condition nécessaire et suffisante

$$m^2 \leq R\sqrt{5},$$

puisque m est positif.

Donc déjà m ne peut avoir de valeur supérieure à $R\sqrt{5}$; voyons si m peut égaler cette limite supérieure ; lorsque $m = R\sqrt{5}$, l'équation admet la racine double $\frac{m}{5}$, ou

$$\frac{R\sqrt{5}}{5}.$$

qui est positive, et moindre que m ; elle est donc acceptable, et la plus grande valeur que peut atteindre m est $R\sqrt{5}$; c'est donc le maximum cherché. En discutant le problème auxiliaire on trouverait le minimum R atteint pour $x = R$.

Exemple II. — *Étant donné un rectangle* ABCD, *on propose de placer le point* M *sur la direction du côté* AB, *de sorte que la somme des aires des triangles* AMN, DNC *soit un minimum.*

Il est visible effectivement que si le point M part de A en se dirigeant vers X, la somme des surfaces a d'abord pour valeur la moitié de l'aire du rectangle, et que le point M venant se placer en F tel que AF = AB, la somme des aires reprend la même valeur ; donc M se déplaçant de A vers F ; cette somme variable qui a commencé par décroître, a passé par un *minimum*.

Soient a, b les dimensions du rectangle et soit x la distance variable AM, l'expression de la somme y des deux aires sera alors

$$y = \frac{1}{2}\, x\, AN + \frac{1}{2}\, a\, DN.$$

Or on a $$\frac{x}{\text{AN}} = \frac{a}{\text{DN}} = \frac{a+x}{b},$$

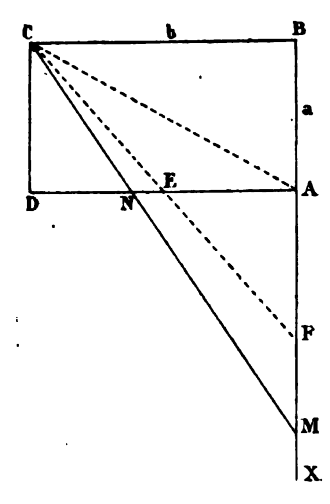
d'où $$y = \frac{bx^2}{2(a+x)} + \frac{ba^2}{2(a+x)} = \frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}.$$

Ne sachant pas discuter la fonction que nous trouvons, nous appliquons la *méthode indirecte :* nous cherchons donc à déterminer x de sorte que la somme des aires ait la valeur m. A cet effet, nous considérons l'équation

$$\frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)} = m;$$

d'où $$bx^2 - 2mx + a(ab + 2m) = 0. \qquad (1)$$

Pour que la somme des aires puisse acquérir la valeur m, il faut et il suffit que, à cette valeur de m, corresponde une racine réelle et positive de l'équation (1); or, la condition de réalité des racines de (1) est



$$m^2 - ab(ab + 2m) \geq 0$$

ou $$m^2 + 2abm - a^2b^2 \geq 0. \qquad (2)$$

Les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de (2) sont réelles, inégales et de signes contraires : il faut donc et il suffit, pour satisfaire à (2), que la quantité positive m ne soit pas inférieure à la racine positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$m \geq ab(\sqrt{2} - 1).$$

Ainsi la somme des aires ne peut pas être inférieure à $ab(\sqrt{2} - 1)$; voyons si elle peut l'égaler; quand m a cette valeur limite, l'équation (1) admet la racine double $\frac{m}{b}$, ou $a(\sqrt{2} - 1)$; cette valeur, étant positive, est acceptable; par suite la moindre valeur de y est bien

$$ab(\sqrt{2} - 1)$$

et le minimum est atteint quand on a

$$x = a(\sqrt{2} - 1),$$

valeur facile à construire.

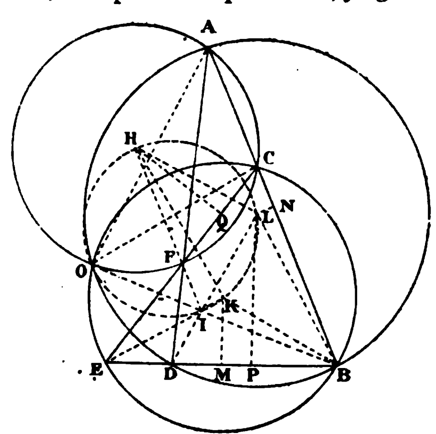
Note de la Rédaction. — Cet article est extrait textuellement de l'Algèbre de M. Combette, dont nous avons déjà rendu compte. Il fait voir dans quel esprit rigoureux et méthodique est écrit cet ouvrage, que nous ne saurions trop recommander à nos lecteurs.

QUESTION 361

Solution par M. E. Sauviat, au Lycée de Nantes.

Considérons quatre droites dans un plan; ces quatre droites prises trois à trois forment quatre triangles et l'une d'elles, AB *par exemple, appartient à trois de ces triangles. Dans chacun des trois triangles correspondant à* AB, *joignons le centre du cercle circonscrit au sommet opposé à* AB. *1° Pour un même côté* AB, *les trois droites ainsi menées concourent en un point* I: *2° les quatre points analogues à* I *et les quatre centres des cercles circonscrits aux triangles formés par les quatre droites sont sur une même circonférence.*

1° Menons les droites LD, EK qui se coupent en I; joignons IF, FH et démontrons que les points F, I, H sont en ligne droite.



L'angle EID = IDB — IED ou la différence de leurs compléments : EKM — DLP.

Remplaçons ces deux angles par leurs égaux ECB, DAB; on a : EID = ECB — DAB = AFC = EFD.

Donc le quadrilatère FIDE est inscriptible et l'on a

$$EFI = IDM,$$

mais dans le triangle LDP, IDM est le complément de l'angle L ou de son égal FAC. D'ailleurs, l'angle HFC est le complément de l'angle FHQ ou de son égal FAC. Les deux angles IDM et HFC ont donc même complément et sont égaux. Or, on vient de voir que EFI = IDM. Donc EFI = HFC et les trois points H, F, I sont en ligne droite.

2° Je dis d'abord que les trois cercles H, L, K se coupent en un même point ; soit O le point d'intersection des cercles L et K, on a

$$AOC = AOB - COB = ADB - CEB = EFD = AFC.$$

Le cercle H passe donc par le point O.

Il faut prouver que le quadrilatère HLKI est inscriptible. Or, l'angle KHL = AOC qui a ses côtés perpendiculaires à ceux du premier, et AOC = AFC.

Donc $$KHL = AFC.$$

D'ailleurs LIK = EID = EFD, puisque le quadrilatère EDIF est inscriptible.

Donc $$LIK = EFD = AFC.$$

Les deux angles KHL, EFD égaux à AFC sont égaux entre eux et le quadrilatère IKLH est inscriptible ; c. q. f. d.

On peut d'ailleurs remarquer que le cercle circonscrit passe par le point O.

En effet,

$$\text{LOK ou son égal } LBK = ABD - LBN - KBM$$

ou $$LBK = ABD - \left(\frac{\pi}{2} - ADB\right) - \left(\frac{\pi}{2} - ECB\right)$$

$$= ABD + ADB + ECB - \pi.$$

Or $$ABD + ADB = \pi - FAC,$$

donc $$LBK = ECB - FAC = AFC = AOC = KHL,$$

donc $$\text{LBK ou son égal } LOK = KHL.$$

Donc les cinq points I, K, L, H, O sont sur une même circonférence. Si on considère un côté autre que AB, on a une circonférence qui doit avoir en commun avec la précédente le point O et deux quelconques des trois points H,K,L.

Cette nouvelle circonférence se confond donc avec la première.

Il en résulte que les quatre points analogues à I, les

quatre centres des cercles circonscrits et le point O sont neuf points sur une même circonférence.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Liégeois, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, classe de M. Courcelles.

QUESTION 368

Solution par M. PIGEAUD, élève du Lycée de Châteauroux.

Circonscrire à une circonférence de rayon r *un triangle isoscèle dont le côté soit égal à* m *fois la base.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Supposons le problème résolu; soit ABC le triangle proposé. Je mène le rayon OD et j'ai dans les deux triangles semblables ADO et ABH:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{BH} \text{ ou } \frac{AO}{r} = \frac{mBC}{\frac{BC}{2}};$$

d'où $$AO = 2mr.$$

De là la construction suivante. D'un point A distant du point O d'une longueur $2mr$ je mène deux tangentes au cercle, et par le point H déterminé par AO prolongé, j'élève une perpendiculaire à cette même droite AO. Le triangle ainsi construit répond à la question.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Hellot, à Rouen; Delcambre, collège Chaptal, à Paris; Baron, à Sainte-Barbe; Verdier, à Passy; Sauviat, à Nantes; Fiévet, à Lille; Provost, au Mans.

QUESTION 389

Solution par M. MAYON, élève au Lycée Henri IV.

On considère un cercle Δ *et un diamètre* AB *de ce cercle; ayant pris sur* AB, *entre les points* A *et* B, *un point fixe* C, *on trace, du même côté du diamètre, deux droites rencontrant le cercle aux points* D *et* E. *On suppose ces droites mobiles, mais à chaque instant symétriques par rapport à la perpendiculaire*

CZ *au diamètre* AB; *enfin de même aux points* D, E, *les tangentes au cercle* Δ, *tangentes qui se rencontrent au point* F. *On propose de démontrer les propriétés suivantes de la figure ainsi formée :*

1° Le quadrilatère CDEF *est inscriptible.*

2° Le lieu décrit par le point F *est une droite.*

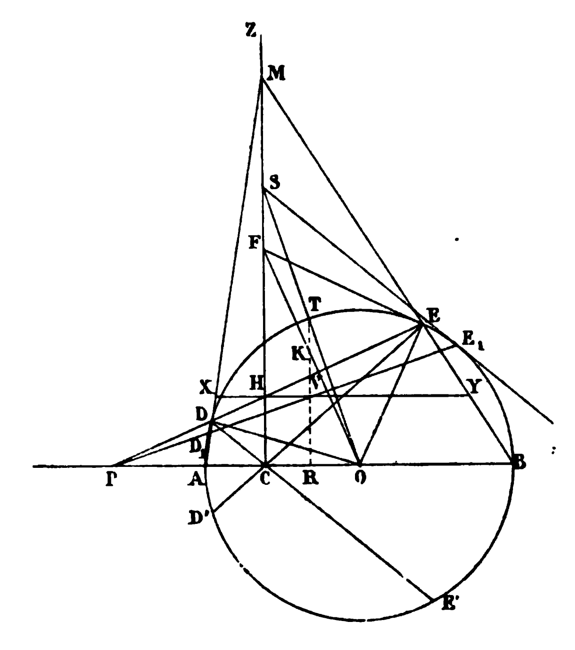
3° Le lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère CDEF *est une droite.*

4° La droite DE *passe par un point fixe.*

5° Le triangle CDE *est maximum quand il est rectangle.*

6° Le lieu décrit par le point de concours des droites AD, BE *est une droite.*

I. — La question est évidemment résolue, du moins en



majeure partie, si on s'appuie sur la division harmonique et la théorie des polaires. Ainsi le lieu de F et le lieu du point de concours des droites AD et BE sont évidemment la polaire du point fixe par lequel passent les droites DE,

lequel point fixe n'est autre que le conjugué harmonique de C par rapport au cercle.

Cette question offre, ce semble, plus d'intérêt si on s'astreint à en démontrer les divers points en ne s'appuyant que sur des principes plus élémentaires.

II. — *1° Le quadrilatère* CDEF *est inscriptible.*

Joignons DO, EO ; le quadrilatère FDOE est inscriptible; il a l'angle en F commun avec le quadrilatère CDEF ; il suffit donc de montrer que DCE = DOE ; en prolongeant EC et DC en D' et E', comme CD et CE sont symétriques par rapport à AB, on a arc DE = arc D'E'. Donc les angles DCE et DOE sont égaux comme ayant même mesure l'arc DE.

2° Lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

Il résulte du premier cas que ce cercle circonscrit est commun aux deux quadrilatères CDEF, ODEF. Or le centre du cercle circonscrit au second quadrilatère est au milieu de la droite FO en K. On a KC = KO comme rayon du même cercle; donc le lieu du point K est une perpendiculaire à AB élevée au milieu de CO.

Remarque. — Étudions ce lieu : toute la droite en fait évidemment partie; soit I son point de rencontre avec le cercle et S le point de rencontre de OT avec CZ : si par S je mène des tangentes au cercle, les droites symétriques correspondantes CD et CE jouiront d'une propriété remarquable: quand les points D et E seront sur le cercle entre A et D_1 d'une part, B et E d'autre part, le centre du cercle circonscrit à CDE F sera à l'intérieur du cercle; quand D et E seront sur l'arc D_1TE_1, le centre du cercle circonscrit sera extérieur au cercle; enfin quand D est en D_1 et par suite E en E_1 le centre correspondant n'est autre que le point T.

3° Lieu de F. — Puisque KF = KO, comme on a CR = RO, il en résulte que dans le triangle OCF, FC est parallèle à KR ; donc le lieu de F est une perpendiculaire en C à AB.

Au point de vue géométrique, la partie de cette droite comprise à l'intérieur du cercle ne fait pas partie du lieu; car les tangentes étant réelles. leur point de rencontre F est à l'extérieur du cercle.

4° La droite DE *passe par un point fixe.*

Soit P le point de rencontre de cette droite avec AB. Soit V son point de rencontre avec FO. Les deux triangles rectangles PVO, COF sont semblables comme ayant un angle aigu commun. On a

$$\frac{PO}{OV} = \frac{FO}{CO};$$

d'où

$$PO = \frac{OV.FO}{CO}.$$

Or, dans le triangle rectangle FOE, comme EV est perpendiculaire sur l'hypoténuse, on a

$$OV . FO = OE^2 \text{ ou } R^2;$$

donc

$$PO = \frac{R^2}{CO},$$

donc PO est constant; c'est une troisième proportionnelle qu'il est aisé de construire: les droites DE passent donc toutes par le point P ainsi détourné.

5° La surface de DCE *est maximum quand le triangle est rectangle en* A.

En effet, la surface de DCE est

$$S = \frac{1}{2} DC . CE \sin DCE.$$

Or on a

$$DC . CE = DC . D'C = AC . CB = R^2 - CO^2;$$

donc

$$S = \frac{1}{2} (R^2 - CO^2) \sin DCE.$$

$R^2 - CO^2$ étant constant, la surface sera maximum quand sin DCE sera maximum, c'est-à-dire pour DCE $= 90°$.

6° Lieu des points de rencontre de AD *et* BE.

On a vu que $PO . CO = R^2$

ou

$$\frac{R}{CO} = \frac{PO}{R};$$

on a

$$\frac{R - CO}{R + CO} = \frac{PO - R}{PO + R}$$

ou

$$\frac{CA}{BC} = \frac{PA}{PB}.$$

Dans le triangle DCE les deux bissectrices CH, CP donnent aussi les relations

$$\frac{DH}{HE} = \frac{PD}{PE}.$$

Or on a $$\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PE},$$

donc $$\frac{CA}{BC} = \frac{DH}{HE}.$$

Ceci posé, par E je mène la droite XY parallèle à AB.

Les triangles XDH, HEY sont semblables; en effet ils ont deux angles égaux comme opposés par le sommet, et EYH = XDH comme ayant même mesure : en effet, XDH a pour mesure la moitié de ADE et EYX = EBA qui a aussi pour mesure la moitié de l'arc ADE.

De la similitude de ces deux triangles il résulte que

$$\frac{DH}{HE} = \frac{XH}{HY}.$$

Mais alors $$\frac{XH}{HY} = \frac{AC}{CB}$$

et par suite les trois droites AD, CH, BE sont concourantes ; donc le lieu du point de rencontre de AD avec BE est la droite CH.

Remarque. — Le lieu véritable n'est que la partie de la droite CZ extérieure au cercle; mais si on considère en même temps le lieu du point de rencontre de BD avec AE, le lieu complet est la droite CZ tout entière.

Conséquences de ces diverses propriétés.

I. — Le premier cas nous conduit à la remarque suivante: Étant donnés deux points D et E, si on va de D en E en touchant une droite AB en C, le chemin DCE' étant minimum, la circonférence passant par les points D, C, E coupe la droite AB en un second point qui est équidistant de D et E.

II. — Le quatrième cas étant démontré, on peut proposer sur la figure tous les problèmes relatifs aux droites qui passent par un point fixe. Ainsi, le lieu du pied de la hauteur issue de C dans le triangle CDE est un cercle de diamètre PA; le lieu du pied de la médiane issue de A est un cercle de diamètre PO; d'une façon plus générale le lieu du pied d'une

droite issue de C et faisant avec DE un angle constant α, est un segment capable de cet angle α décrit sur PC.

Il en serait de même pour certains points remarquables des droites CD, CE qui passent par le point fixe C. En particulier le lieu des projections de O sur ces deux droites est un cercle de diamètre CO.

III. — Le cinquième cas, si on suppose que le point C soit en O, conduit à la proposition suivante : Etant donné un point fixe P dans le plan d'un cercle, on mène une sécante PDE. Le triangle DOE sera maximum quand la sécante coupera la courbe sous un angle de 45°. — On le vérifie aisément.

IV. — On peut faire sur la figure proposée beaucoup d'autres remarques dont voici quelques-unes :

1° Le lieu du point de rencontre des bissectrices du triangle ODE est évidemment la droite OZ.

2° Le lieu du point de rencontre des médianes de ce même triangle est un cercle. En effet, on a vu que le lieu du pied de la médiane CV est un cercle de diamètre PO. Si par le point N situé aux $\frac{2}{3}$ de CV à partir de C, je mène des parallèles à VO et VP, elles coupent en G et J le diamètre AB; leur angle est évidemment droit; donc le lieu de N est un cercle de diamètre GJ. Les points G et J divisent respectivement PC et CO dans le rapport $\frac{1}{2}$.

3° Le lieu géométrique du point de rencontre de la droite OF avec une droite symétrique de la hauteur issue de C par rapport à CZ, n'est autre que le lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère CDEF, c'est-à-dire la droite RT.

Ceci résulte en effet de la propriété qu'ont la hauteur d'un triangle et la droite qui joint le sommet considéré au centre du cercle circonscrit d'être symétriques par rapport à la bissectrice issue au même sommet.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Fiévet, à Lille; Pigeaud, à Châteauroux; Kœhl, à Grenoble; Simeray, à Lons-le-Saulnier; Baron, à Sainte-Barbe.

M. Baron a remarqué en outre que, si l'on supposait le cercle projeté sur un plan passant par le diamètre AB, les droites CD, CE se projettent suivant

des droites également inclinées sur le grand axe, et que les propriétés 2, 4, 6 sont projectives; le centre du cercle circonscrit au quadrilatère CDEF se projette suivant le centre d'une ellipse homothétique à l'ellipse donnée, et passant par les cinq points A, C, E_1, D_1, F_1; et le centre de cette ellipse décrit une droite perpendiculaire au grand axe et passant par le milieu de AC.

QUESTION 390

Solution par M. J. de Lotnes, élève de l'École Albert-le-Grand.

Dans un parallélogramme ABCD, *on mène, par un sommet* A, *une sécante qui coupe* BC *en* E *et* DC *en* F. *Démontrer que, quelle que soit la direction de la sécante, on a*

$$BE \times DF = \text{const.}$$

Joignons AC. Cette ligne AC coupe BC et DC au même point C. Donc, si l'on forme dans ce cas le produit des deux segments déterminés sur BC et sur DC par la sécante AC, ce produit BC $\times$ DC sera le produit de deux côtés consécutifs du parallélogramme. Considérons maintenant les deux triangles ABE, AFD. Ils sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun; savoir : les angles ABE, ADF, comme angles opposés du parallélogramme ABCD; les angles BAE, DFA, comme alternes-internes par rapport aux deux parallèles AB, DC coupées par la sécante AN. Donc
$$\frac{BE}{AD} = \frac{AB}{DF};$$
d'où
$$BE \times DF = AD \times AB.$$
Par suite le produit BE $\times$ DF est constant, puisqu'il est égal au produit de deux côtés consécutifs du parallélogramme.

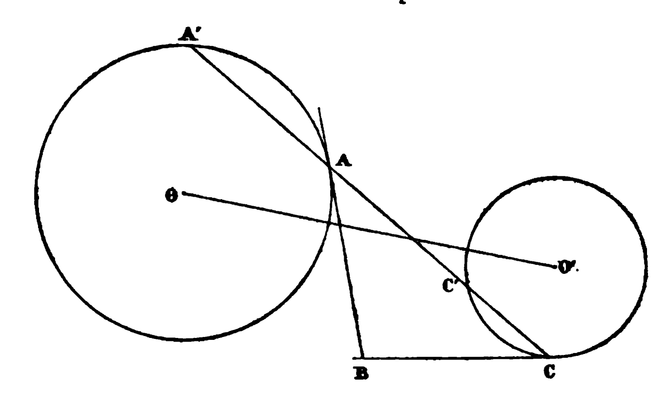
Nota. — La même question a été résolue par MM. Fiévet, à Lille; Pagillon, au collège Stanislas; Blessel, à Paris; Tietard, Pigeaud, à Châteauroux; Dupuis, à Lons-le Saulnier; Costeux, à Saint-Omer; Baron, à Sainte-Barbe; Dupré, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Broutin, Verdier, à Passy; Lestic, à Saint-Brieuc.

QUESTION 392

Solution par M. G. Pigeaud, élève au Lycée de Châteauroux.

Deux cercles étant donnés et ω étant un centre de similitude inverse, une droite AC *tourne autour de* ω. *On mène les tangentes en* A *et en* C *qui ne sont pas des points homologues, trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.*

Prenons AC dans l'une de ses positions et soit ABC le



triangle formé par les tangentes et cette droite. L'angle A de ce triangle a pour mesure la moitié de l'arc AA', l'angle C a pour mesure la moitié de l'arc CC', et comme ces deux arcs sont égaux, on a A = C et le triangle BAC est isoscèle : donc BA = BC. Le point B est donc tel que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient constamment égales entre elles. Or on sait que le lieu des points qui jouissent de cette propriété est l'axe radical des deux cercles, B est donc constamment sur cet axe, et cet axe est le lieu de B.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Dupin, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Pagillon, au collège Stanislas; Lestic, à Saint-Brieuc.

QUESTIONS PROPOSÉES

8. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît deux côtés et la ligne qui joint le sommet de l'angle compris au centre du cercle inscrit. *(Hallowell.)*

9. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base et la hauteur, sachant en outre qu'un des angles à la base est double de l'autre. *(Hallowell.)*

10. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base, un angle à la base et la somme du côté opposé à cet angle et de la hauteur du triangle. *(Hallowell.)*

11. — Construire géométriquement un triangle connaissant un angle, l'un des côtés adjacents et l'angle qui fait le côté opposé à l'angle donné avec la médiane correspondante. *(Hallowel.)*

12. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base, la différence des angles à la base, et la somme des deux autres côtés. *(Hallowell.)*

13. — Construire géométriquement un triangle, connaissant la base, un angle à la base, et le point de la base par lequel passe le diamètre du cercle circonscrit mené par le troisième sommet. *(Hallowell.)*

14. — Par un point pris sur la perpendiculaire abaissée dans un triangle rectangle du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, mener une droite telle que la portion comprise entre les deux côtés de l'angle droit ait son milieu sur l'hypoténuse. *(Hallowell.)*

15. — Construire géométriquement un triangle connaissant un angle, la bissectrice et la différence entre les côtés qui comprennent l'angle donné. *(Hallowell.)*

16. — On considère un cercle D; soient AB un diamètre, AC la tangente au point A; par le centre O de D, on mène une infinité de cercles Δ tangents à AC; soit M un des

points communs à D et Δ ; la tangente en M au cercle D rencontre Δ en un point I dont on demande le lieu géométrique.

(G. L.)

17. — On considère un cercle Δ, et deux diamètres rectangulaires AA′, BB′ ; par le point A, on mène une transversale δ, qui rencontre la tangente en A′ au point D, et le diamètre BB′ au point E. Par le point D on peut mener au cercle une seconde tangente DK, touchant le cercle au point K; la droite AK rencontre BB′ en un point F. Trouver l'intersection de δ et de A′F quand δ tourne autour de A.

(G. L.)

18. — Si trois nombres entiers ont une somme égale à zéro, la somme de leurs cubes est égale à leur triple produit, et la somme de leurs cinquièmes puissances est divisible par cinq fois leur produit. *(G. L.)*

19. — On considère un cercle du centre O, et un diamètre AA′. Soit M un point mobile sur la circonférence; on fait passer par MOA un cercle Δ, par MOA′ un autre cercle Δ′. Démontrer :

1° Que ces cercles se coupent orthogonalement ;

2° Que r et r' étant leurs rayons, R le rayon du cercle donné, on a,

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{4}{R^2} ;$$

3° Que la projection de la tangente commune sur la ligne des centres a une longueur constante, égale à R. *(G. L.)*

20. — On considère un cercle de centre O, un diamètre AB et la tangente Δ à l'extrémité B de ce diamètre. La tangente en un point quelconque M de la circonférence rencontre Δ en un point C, par lequel on mène une parallèle à AB jusqu'à sa rencontre avec le rayon OM. Soit I ce point de rencontre; trouver le lieu du point I quand M parcourt la circonférence proposée. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 3520-2

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir pages 3 et 25.)

DEUXIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur la droite de Simson.

16. — On sait que *si d'un point* M *pris sur une circonférence* O *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle, triangle dont les sommets* 1, 2, 3 *sont situés sur* O, *les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur une droite* Δ_{123}.

Ce théorème est dû à Simson. Nous appellerons *droite de Simson* cette droite Δ_{123}, et pour rappeler qu'elle est obtenue au moyen de trois points pris sur la circonférence (abstraction faite du point M), nous dirons qu'elle est d'ordre trois et qu'elle correspond au point M. Enfin pour mieux distinguer ce point M, nous le nommerons *point fondamental.*

Prenons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4 sur la circonférence O. Si nous faisons successivement abstraction de l'un de ces points, nous obtiendrons quatre triangles : à chacun d'eux, et au point M, correspond une droite de Simson d'ordre trois, ces quatre droites sont liées les unes aux autres par des propriétés que nous allons établir.

17. — **Théorème.** — *Le triangle formé par trois quelconques des droites de Simson d'ordre trois*

$$\Delta_{123} \quad \Delta_{234} \quad \Delta_{341} \quad \Delta_{412} ;$$

droites qui correspondent aux quatre points 1,2,3,4 *de la circonférence* O, *est semblable au triangle que l'on obtient en supprimant aux trois indices considérés le numéro qui leur est commun.*

Considérons en effet la droite de Simson Δ_{123}, qui correspond au point M. Les angles marqués α et β sur la figure sont égaux, puisque le quadrilatère 3.M.H_{13}.H_{23} est inscriptible. D'autre part l'angle β est complémentaire de l'angle M.3.H_{23},

angle qui est égal à M.1.2 (*fig. 1*). Cette remarque conduit d'abord à la propriété suivante : *une droite de Simson d'ordre trois* Δ_{123} *est inclinée sur l'un des côtés du triangle, sur le côté* 1.3, *par exemple, d'un angle aigu qui est égal au complément de celui sous lequel la corde* 2.M *est vue d'un point quelconque de la circonférence* O.

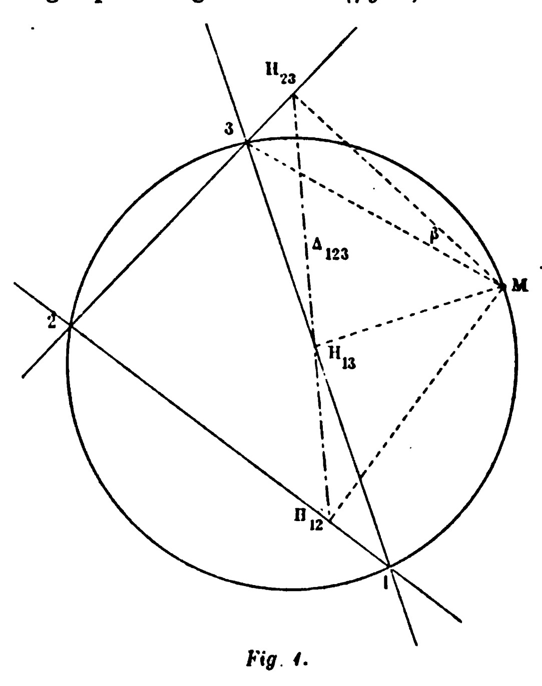


Fig. 1.

Considérons maintenant quatre points 1, 2, 3, 4; sur la circonférence O, et les deux droites Δ_{123}, Δ_{124} qui correspondent au point M et aux deux triangles 123, 124. Ces deux droites, conformément à leur définition même, ont pour point commun H_{12}, projection du point M sur le côté 1.2. Ces droites Δ_{123}, Δ_{124} sont, d'après la remarque que nous venons de faire, inclinées sur le côté 1.2 d'angles qui sont respectivement égaux à ceux sous lesquels on voit les cordes 3.M et 4.M d'un point quelconque de O. On conclut de là que le système des deux droites Δ_{123} Δ_{124} est superposable au faisceau des deux droites 3.M et 4.M (*fig. 2*).

On peut, d'après cela, énoncer cette seconde propriété : *Si l'on considère quatre points* 1, 2, 3, 4 *sur une circonférence* O *et deux droites* Δ, *de Simson d'ordre trois, correspondant à ces points, ces deux droites forment un faisceau qui est superposable à celui des droites qui joignent le point fondamental* M

aux deux points dont les indices ne sont pas communs aux deux droites Δ *considérées.*

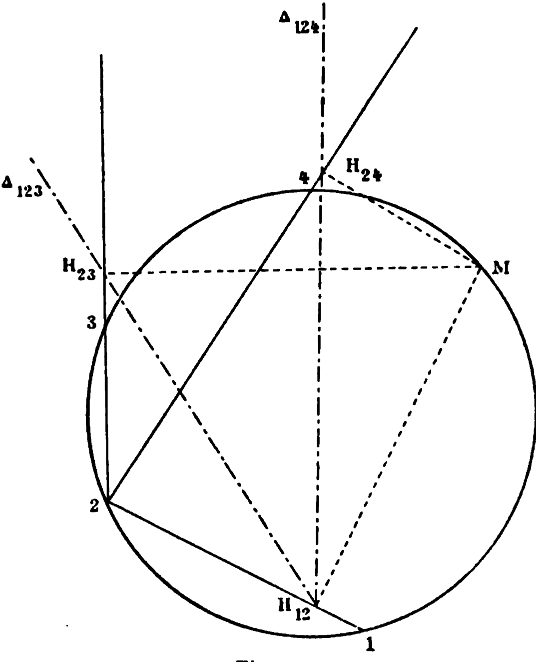
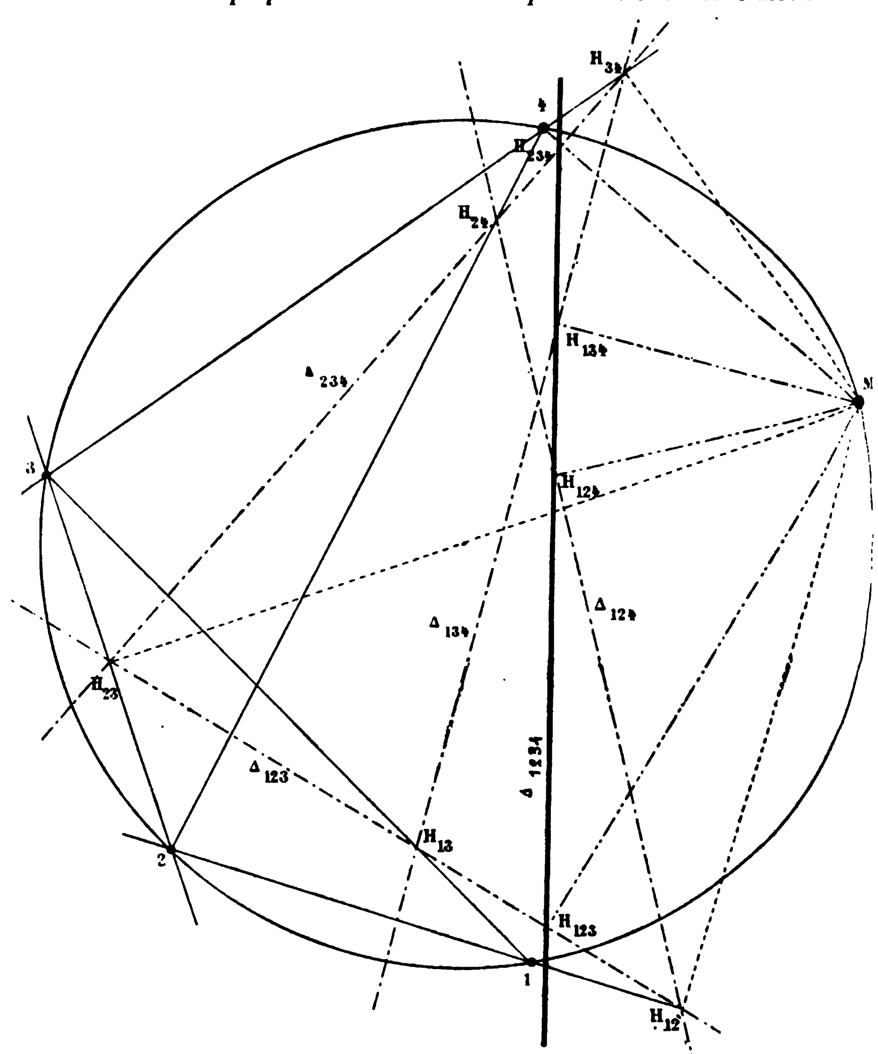


Fig. 2.

Considérons maintenant trois droites de Simson d'ordre trois : Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} ; elles forment un triangle dont les angles sont égaux à ceux qu'on obtient en joignant le point M aux points 2, 3 et 4 ou sont supplémentaires de ceux-ci. On peut donc dire que les angles du triangle Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} sont deux à deux égaux à ceux du triangle 234, ou sont supplémentaires de ces angles. Mais on sait que deux triangles dont les angles sont égaux ou supplémentaires ont nécessairement les angles égaux et, par suite, sont semblables. Nous pouvons donc conclure que les deux triangles Δ_{123} Δ_{124} Δ_{134} et 2. 3. 4 sont semblables. Le théorème énoncé se trouve donc démontré, et il conduit immédiatement à la droite de Simson d'ordre quatre, droite définie comme nous allons le dire.

18. — Théorème. — *Si du point fondamental* M *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre droites de Simson*



d'ordre trois qui correspondent aux points 1, 2, 3, 4, *les quatre points ainsi obtenus sont situés sur une droite : nous nommerons*

cette droite droite de Simson d'ordre quatre, et nous la désignerons par Δ_{1234}.

Considérons en effet les trois points

$$H_{12}, \quad H_{13}, \quad H_{14},$$

projections respectives du point fondamental sur les cordes 1.2, 1.3, 1.4. Le triangle formé par ces trois points est, justement, celui des droites que nous désignerons par

$$\Delta_{123}, \ \Delta_{124}, \ \Delta_{134},$$

D'après ce que nous venons de voir, ce triangle est semblable au triangle 2 3 4 ; on a donc en particulier

$$\Delta_{123}\Delta_{134}\Delta_{124} = 3.1.4 \qquad (1)$$

D'ailleurs les droites MH_{13}, MH_{14} sont perpendiculaires respectivement sur les droites 1.3 et 1.4 : on a donc (*fig.* 3)

$$H_{13}MH_{14} = 3.1.4. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on voit que le quadrilatère M H_{12} H_{13} H_{14} est inscriptible; propriété qui est d'ailleurs évidente, ces quatre points appartenant au cercle décrit sur la droite 1.M comme diamètre.

Cette remarque étant faite, si l'on applique le théorème de Simson au point M et au triangle H_{12} H_{13} H_{14}, on obtient, en projetant ce point M sur les côtés de ce triangle, trois points H_{123} H_{124} H_{134} qui sont situés en ligne droite. Du moment que parmi les quatre points H_{123} H_{124} H_{134} H_{234} trois sont en ligne droite, il est évident que ces quatre points sont situés sur une même droite. Nous convenons de dire que cette droite est une droite de Simson d'ordre quatre et nous la désignerons par Δ_{1234}.

19.— Pour poursuivre l'étude de ces droites de Simson, il faudrait, du moins en obéissant aux idées générales que nous avons précédemment exposées, chercher la loi géométrique qui lie la droite de Simson d'ordre quatre avec les droites de Simson d'ordre trois. On reconnaît ainsi, et sans difficulté, que *la droite* Δ_{1234} *fait avec* Δ_{123} *un angle égal au complément de l'angle inscrit à la circonférence* O *et dont l'un des côtés passe par le point* M, *tandis que l'autre passe par le point 4.*

Mais il se présente, dans cette question, une condition

particulière qui permet de reconnaître immédiatement le théorème général.

Prenons sur la circonférence O, cinq points 1, 2, 3, 4, 5; et considérons trois droites de Simson d'ordre 4,

$$\Delta_{1234},\ \Delta_{1245},\ \Delta_{1235}.$$

Ces droites peuvent être obtenues de la façon suivante. Imaginons le point H_{12} et les trois droites de Simson d'ordre trois qui partent de ce point

$$\Delta_{123},\ \Delta_{124},\ \Delta_{125}.$$

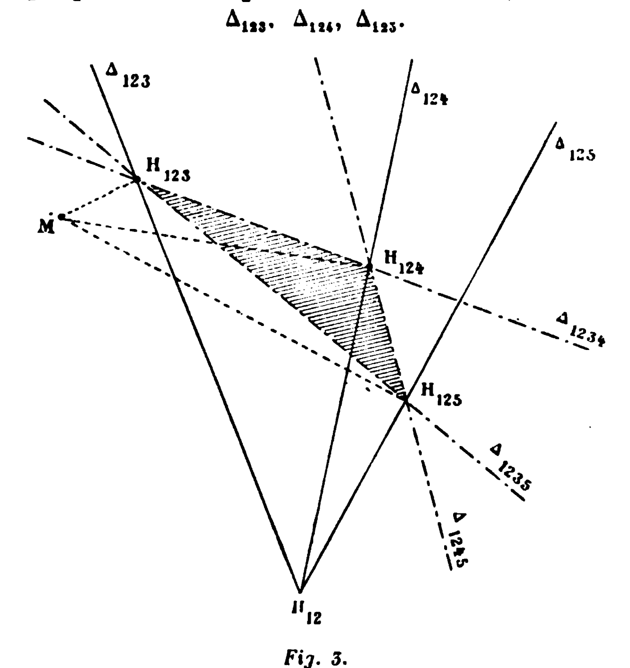


Fig. 3.

Si nous projetons le point M sur ces droites, on obtient les points H_{123} H_{124} H_{125} et la droite H_{123} H_{124}, par exemple, n'est autre chose, d'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, que la droite de Simson d'ordre quatre Δ_{1234}. Ainsi le triangle H_{123} H_{124} H_{125} est justement le triangle des droites Δ_{1234} Δ_{1245} Δ_{1235}.

Ceci posé, le cercle décrit sur $H_{12}M$, comme diamètre, passe évidemment par les points H_{123} H_{124} H_{125}; le théorème de

Simson prouve donc que les pieds H_{1234} H_{1245} H_{1235} des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés de ce triangle sont trois points en ligne droite.

Aux cinq points considérés 1, 2, 3, 4, 5 correspondent cinq droites de Simson d'ordre quatre, et nous venons de reconnaître que si l'on projette le point M sur trois de ces droites, on obtenait trois points en ligne droite. De là il résulte nécessairement que les cinq points sont en ligne droite. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés cinq points* 1,2,3,4,5 *sur une circonférence* O *on considère les cinq droites* Δ *de Simson d'ordre quatre, droites précédemment définies et qui correspondent à un certain point* M *de* O ; *les projections du point* M *sur les droites* Δ *sont cinq points situés en ligne droite. Cette droite désignée par la notation* Δ_{12345} *est dite droite de Simson d'ordre cinq.*

20. — On voit maintenant comment on peut établir par un procédé calqué, pour ainsi dire, sur la démonstration précédente, le théorème général relatif aux droites de Simson.

Nous admettons la conception et les propriétés des droites de Simson d'ordre inférieur à n et nous voulons démontrer l'existence de la droite de Simson d'ordre n. A cet effet, nous imaginerons le point $H_{1.2\ldots(n-3)}$ et les droites de Simson d'ordre $(n-2)$.

$$\Delta_{1.2\ldots(n-3)(n-2)} \quad \Delta_{12\ldots(n-3)(n-1)} \quad \Delta_{12\ldots(n-3)n}$$

droites qui, nécessairement, et d'après leur définition même, passent par ce point. Du point fondamental M on abaisse des perpendiculaires sur ces droites et en obtient trois points

$$H_{12\ldots(n-3)(n-2)}, \quad H_{12\ldots(n-3)(n-1)}, \quad H_{12\ldots(n-3)n}$$

qui, joints deux à deux, donnent trois droites de Simson d'ordre $(n-1)$

$$\Delta_{12\ldots(n-3)(n-2)(n-1)}. \quad \Delta_{12\ldots(n-2)(n3-n)}, \quad \Delta_{12\ldots(n-3)(n-1)n}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle décrit sur la droite $MH_{12\ldots(n-3)}$ comme diamètre est circonscrit au triangle formé par ces trois droites, on voit que les projections du point fondamental sur *trois* droites de Simson d'ordre $(n-1)$ sont en ligne droite. Mais alors les n projections

sont en ligne droite et nous résumerons ces propriétés sur la droite de Simson dans l'énoncé suivant :

Théorème général. — *Étant donnés* n *points sur une circonférence, si l'on fait successivement abstraction de l'un d'entre eux, on obtient* (n — 1) *points auxquels correspond une droite de Simson d'ordre* (n — 1) ; *droite définie précédemment, correspondant à un point* M *de la circonférence* O. *Si du point* M *on abaisse des perpendiculaires sur ces* n *droites, les* n *points ainsi obtenus sont situés sur une droite. Cette droite désignée par la notation* $\Delta_{12 \ldots n}$ *est dite droite de Simson d'ordre* n.

21. — C'est cette propriété que nous visions plus particulièrement dans cette étude et, dans le but d'abréger la démonstration, nous avons, à un certain moment, comme on a pu le remarquer, abandonné l'étude des positions respectives des droites de Simson des différents ordres. Mais si l'on avait voulu poursuivre, par la méthode normale, l'étude des droites de Simson, on aurait facilement démontré la propriété suivante :

Théorème. — *Le triangle formé par trois droites de Simson d'ordre* (n — 1) *est semblable au triangle dont les numéros s'obtiennent en supprimant, aux indices considérés, les numéros qui leur sont communs;*

Et aussi celle-ci :

Théorème. — *La droite de Simson d'ordre* n, Δ_α, *fait avec une droite de Simson d'ordre* (n — 1), Δ_β *un angle égal au complément de l'angle inscrit à la circonférence donnée, angle dont les côtés passent : l'un par le point fondamental* M, *l'autre par le point dont le numéro n'est pas commun aux indices* α *et* β.

(A suivre.)

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. E. Catalan.

(*Suite*, voir page 37.)

10. — *Circonférence des neuf points* (fig. 4). — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle FGH. La circonférence O devient *la circonférence des neuf points* (milieux des côtés, pieds des hauteurs, milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs), relative à ce triangle. D'après le théorème (6), *cette circonférence contient les centres* α, β, γ *des cercles inscrits aux annexes de* ABC; *et ces centres sont diamétralement opposés à* A, B, C. (*)

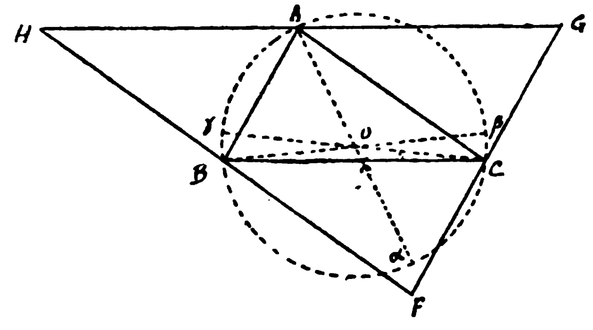


Fig. 4.

Voilà donc *trois* points ajoutés aux *neuf* (**) que l'on connaissait (***).

11. — *Cercles ex-inscrits aux annexes* (fig. 5). — A'A est la bissectrice de l'angle A' (6). Le côté BA, perpendiculaire à

(*) En outre, *les quadrilatères* AC'EO, EB'DO, DA'CO, CE'BO, BD'AO *sont inscriptibles.*

(**) Ou plutôt aux *quinze. (Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6me édit., p. 177.)

(***) Je fais abstraction, bien entendu, des points remarquables, *en nombre indéfini*, où la circonférence O touche certains cercles. *Loc. Cit.*, p. 181.

la bissectrice $B\alpha$ de $A'BC$, est bissecteur de l'angle *extérieur* $A'Bx$. Pour la même raison, CA est la bissectrice de $A'Cy$.

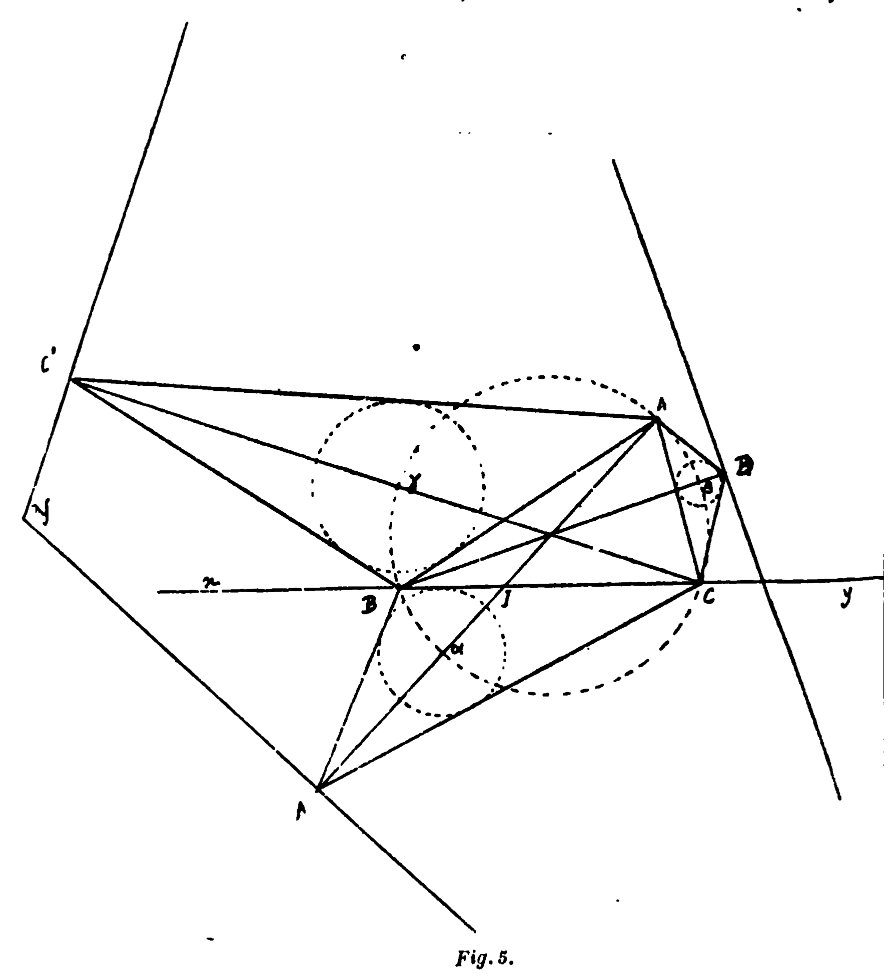


Fig. 5.

Donc A *est le centre du cercle ex-inscrit à l'annexe* BCA', *tangent au côté* BC. *Le rayon de ce cercle est la hauteur* AH.

Considérons les deux autres cercles ex-inscrits à BCA'. Le centre de l'un est l'intersection de AB avec la droite YZ, menée par A', perpendiculairement à A'A; le centre de

l'autre est l'intersection de cette même droite YZ avec AC. Par conséquent :

Les centres des cercles ex-inscrits aux trois annexes sont :

1° *Les sommets du triangle* ABC;

2° *Les intersections des côtés de ce triangle avec les droites* YZ, ZX, ZY, *menées par* A′, B′, C′, *perpendiculairement à* A′A, B′B, C′C.

12. — Remarque. — Ces droites sont parallèles aux tangentes, en A, B, C, au cercle O.

13. — Lemme (fig. 6). — *Soit* ABC *un triangle isoscèle, inscrit à un cercle* O. *Si l'on trace la corde* AD, *coupant en* E *la base du triangle, on a*

$$AD.AE = \overline{AB}^2.$$

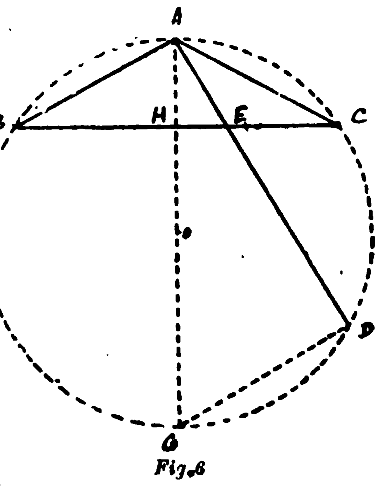


Fig. 6

Menons le diamètre AOG et la corde GD. Le quadrilatère DEHG, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible(*). Donc

$$AD.AE = AG.AH.$$

D'après un théorème connu, le second membre égale $AB.AC = \overline{AB}^2$; donc la proposition est démontrée.

14. — *Relation métrique.* — Le lemme précédent, appliqué à la figure 5, donne

$$OA' = \frac{OB.OC}{OI} = \frac{R^2}{OI},$$

puis

$$AA' = R\frac{AI}{OI},$$

ou

$$\frac{R}{AA'} = \frac{OI}{AI}.$$

(*) Autrement dit, les triangles ABG, AHE sont semblables.

De même $\frac{R}{BB'} = \frac{OK}{BK'}, \frac{R}{CC'} = \frac{OL}{CL}.$

Par conséquent

$$\frac{R}{AA'} + \frac{R}{BB'} + \frac{R}{CC'} = \frac{OI}{AI} + \frac{OK}{BK} + \frac{OL}{CC}.$$

Mais il est connu (et évident) que la somme des trois derniers rapports se réduit à l'unité (*). Donc enfin

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{R};$$

relation semblable à celle qui existe entre les rayons des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (**). Par suite, on peut *construire un triangle dans lequel ces quatre rayons soient égaux à* R, AA', BB', CC' (***).

15. — Théorème. — *Si un triangle inscrit* ABC (fig. 5) *a un sommet fixe* A, *et que le côté* BC *passe par un point fixe* I, *appartenant au diamètre* Aα, *le sommet* A' *de l'annexe est invariable.*

En effet, on vient de voir que

$$OA' = \frac{R^2}{OI}.$$

16. — Remarques. — I. La réciproque est vraie : *Si le sommet* A' *est fixe, toutes les cordes* BC *passent par un point fixe, situé sur* AA'.

II. La propriété qui vient d'être démontrée complète l'une de celles qui l'ont été ci-dessus (7, 11).

III. Les points I, A' sont réciproques (****). Donc *la polaire du point* I *est la droite* YZ (II). De même ZX et XY sont les polaires des points L, K.

17. — *Hexagone de Brianchon* (fig. 7). — Les diagonales

(*) De là résulte que, *dans tout triangle rectiligne,*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Cette proposition, également connue, est facile à vérifier directement.

(**) *Théorèmes et Problèmes...*, p. 198.

(***) *Id.*, p. 116.

(****) *Éléments de Géométrie*, p. 114.

de l'hexagone A'CB'AC'B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique.*

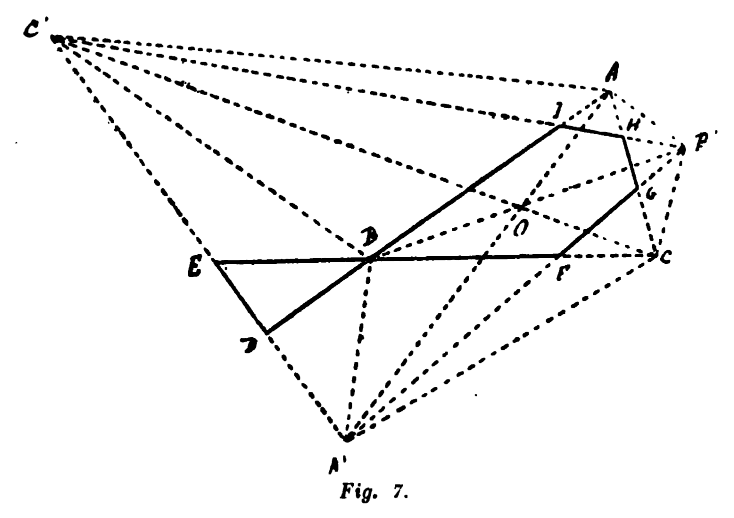


Fig. 7.

18. — *Hexagone de Pascal.* — En 1848, nous avons fait connaître un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon, sont les côtés d'un hexagone de Pascal (*).

On vient de voir que C'BA'CB'A est un hexagone de Brianchon. Donc les droites C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal. *Cet hexagone est* DEFGHI. Autrement dit, *les points* D, E, F, G, H, I *sont situés sur une conique.*

19. — *Circonférence des neuf points.* — Supposons, comme précédemment (10), que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle T (**). Soit O la circonférence des neuf points relative à T, et soient ABC', BCA', CAB' les annexes de ABC. Les dernières remarques donnent lieu à la proposition suivante :

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, p. 173 ; *Bulletins de l'Académie*, déc. 1878 ; etc.

(**) Non représenté sur la figure.

1° *L'hexagone* AC'BA'CB *est circonscrit à une conique ;*

2° *L'hexagone* DEFGHI, *formé par les intersections successives des droites* AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB, *est inscrit à une conique.*

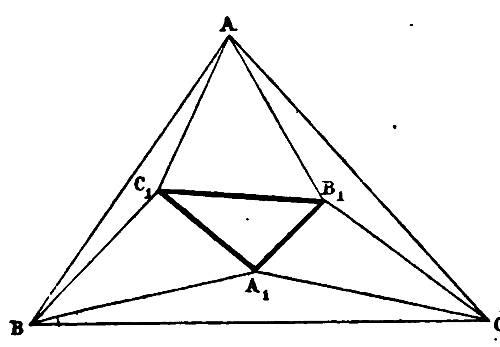
19. — Remarque. — Si, comme au n° 9, on remplaçait le triangle ABC par un polygone convenablement choisi, on pourrait généraliser les dernières propriétés. Mais en voilà assez sur ce sujet.

ÉTUDE SUR LE CERCLE DE BROCARD

Par M. **A. Morel.**

(*Suite*, voir pages 10 et 33.)

8. — Si, sur les côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on construit des triangles isoscèles semblables ABC_1, CBA_1, CAB_1, les trois points A_1, B_1, C_1, sont les sommets d'un nouveau triangle. Nous allons chercher quelle est la valeur qu'il faut donner à l'angle φ à la base des triangles isoscèles pour que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC.



Appelons φ la valeur commune des angles à la base des triangles isoscèles AB_1C, BC_1A, CA_1B ; nous avons évidemment dans le triangle AC_1B_1 :

$$C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1AB_1 \cos(A - 2\varphi);$$

nous obtiendrons des valeurs analogues pour les deux autres côtés ; puis, en remplaçant AC_1, AB_1 par leurs valeurs en fonction des côtés du triangle primitif et de l'angle φ, nous aurons

$$C_1B_1^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos(A - 2\varphi)}{4\cos^2\varphi}.$$

Cela posé, nous allons chercher si nous pouvons déterminer l'angle φ de façon que le triangle $A_1B_1C_1$ soit semblable au triangle ABC, les sommets homologues étant A et A_1, B et B_1, C et C_1. On devra donc avoir, en remplaçant chacun des côtés du triangle donné par sa valeur en fonction des autres côtés :

$$\frac{b^2+c^2-2bc\cos(A-2\varphi)}{b^2+c^2-2bc\cos A}=\frac{c^2+a^2-2ca\cos(B-2\varphi)}{c^2+a^2-2ca\cos B}$$
$$=\frac{a^2+b^2-2ab\cos(C-2\varphi)}{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

Sous cette forme. on voit immédiatement une première solution évidente, qui est $\varphi=0$; nous allons retrouver cette solution dans le calcul même.

En comparant les deux premiers rapports, on trouve facilement, après des transformations très simples, l'équation

$$b(c^2+a^2)\sin(A-\varphi)\sin\varphi-a(b^2+c^2)\sin(B-\varphi)\sin\varphi$$
$$-abc\sin(A-B)\sin 2\varphi=0,$$

ou

$$\sin\varphi\,[b(c^2+a^2)\sin(A-\varphi)-a(b^2+c^2)\sin(B-\varphi)$$
$$-2abc\sin(A-B)\cos\varphi]=0,$$

ce qui donne d'abord la solution

$$\sin\varphi=0.$$

L'autre facteur donne

$$\text{cotg}\,\varphi=\frac{b(c^2+a^2)\cos A-a(b^2+c^2)\cos B}{b(c^2+a^2)\sin A-a(b^2+c^2)\sin B-2abc\sin(A-B)}$$

Le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$b^3\sin A-a^3\sin B,$$

et le numérateur sous la forme

$$b^3\cos A-a^3\cos B.$$

en remplaçant c^2+a^2 par $b^2+2ac\cos B$, et b^2+c^2 par $a^2+2bc\cos A$.

Donc on a

$$\text{cotg}\,\varphi=\frac{b^3\cos A-a^3\cos B}{b^3\sin A-a^3\sin B}.$$

Si, maintenant, je remplace les côtés par les sinus, qui leur sont proportionnels, il vient

$$\text{cotg}\,\varphi=\frac{\sin^3 B\cos A-\sin^3\cos B}{\sin^3 B\sin A-\sin^3 A\sin B},$$

ce qui devient

$$\text{cotg } \varphi = \frac{\sin (B - A) [1 + \cos A \cos B \cos C]}{\sin A \sin B \sin C \sin (B - A)}.$$

En supprimant le facteur commun *sin* (B — A), nous trouvons

$$\text{cotg } \varphi = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}.$$

De cette valeur nous tirons

$$\text{cotg } \varphi = \text{cotg } A + \text{cotg } B + \text{cotg } C.$$

Ainsi l'angle φ, que nous obtenons ainsi, n'est pas autre chose que l'angle que nous avons précédemment désigné par α ; de plus, la symétrie de la formule qui donne cotg φ nous montre que, si nous égalions le premier rapport au troisième, nous obtiendrions encore le même angle.

Donc les lignes qui joignent les points de Brocard aux sommets du triangle se coupent en trois points A_1, B_1, C_1, qui sont les sommets d'un triangle semblable au triangle ABC.

La solution $\varphi = 0$, que nous avons trouvée, donne une seconde position du triangle semblable au triangle ABC : comme les sommets des triangles isoscèles tels que ABC_1 sont toujours sur les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle ABC en leurs milieux, il en résulte que le triangle correspondant à la solution $\varphi = 0$ a pour sommets les milieux de ABC ; il est évident que ce triangle est semblable au triangle ABC.

9. — Le rapport de similitude des deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ est facile à déterminer; en effet, ce rapport est égal à

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\alpha)}}{2a \cos \alpha}.$$

Or, nous avons vu précédemment que, δ désignant la distance des points ω et ω', on avait

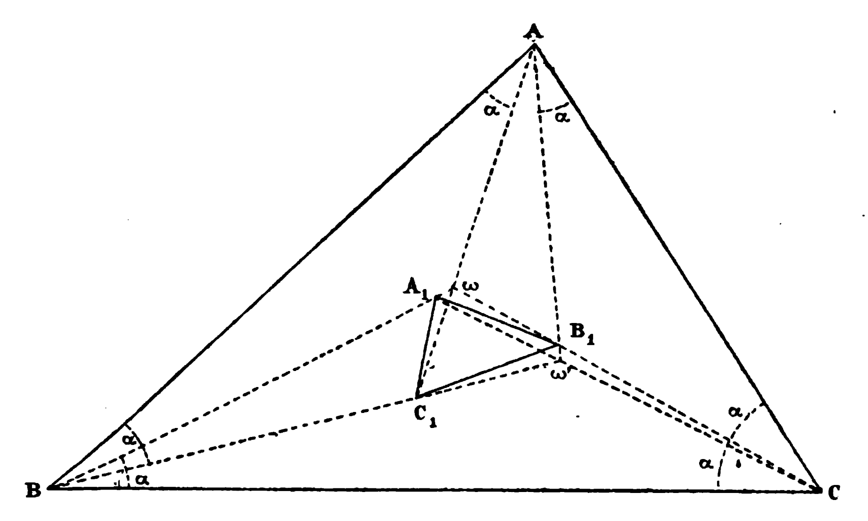
$$\frac{\delta \sin A}{\sin \alpha} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos (A - 2\alpha)};$$

donc le rapport de similitude cherché est, en remplaçant $\dfrac{\delta \sin A}{a}$ par sa valeur précédemment indiquée,

$$\sin \alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha} :$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

10. — Considérons le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$; d'après ce que nous venons de dire, le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable au triangle ABC, le sommet A_1 étant l'homologue du sommet A, et de même pour les autres sommets. Il en résulte que l'angle A_1 est égal à l'angle A. Mais, d'après la manière dont est déterminé le point ω,



l'angle $A\omega C$ est le supplément de l'angle A du triangle ABC; par conséquent l'angle $C_1\omega B_1$ est égal à l'angle A.

On verrait de même que l'angle $A_1\omega'C_1$ est égal à l'angle B, et par suite à l'angle B_1; donc les points ω et ω' sont sur le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$.

De même, il est facile de voir que si l'on joint les points A_1 et B_1 au centre O (*) du cercle circonscrit au triangle ABC, les lignes ainsi menées, d'après la construction même des points A_1, B_1, C_1, sont les perpendiculaires respectivement aux côtés BC et AC; de plus, la ligne A_1O est bissectrice de l'angle BA_1C; par suite elle passe par le milieu de l'arc $\omega A_1C_1\omega'$. De même la ligne B_1O est bissectrice de l'angle $\omega B_1\omega'$; elle passe donc aussi par le milieu de l'arc $\omega A_1C_1\omega'$.

(*) Le point O n'est pas marqué sur la figure; le lecteur est donc prié de faire les constructions qui concernent ce point.

Donc le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ passe par le centre du cercle circonscrit à ABC.

On voit ainsi que

Les droites qui joignent les sommets du triangle ABC *aux points de Brocard relatifs à ce triangle se coupent en trois autres points* A_1, B_1, C_1, *qui sont les sommets d'un triangle semblable au triangle* ABC ; *et que la circonférence qui passe par les points* A_1, B_1, C_1, *passe aussi par les points de Brocard et par le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

C'est ce cercle que nous appelons le CERCLE DE BROCARD.

11. — *L'angle* $\omega O \omega'$ *est égal à* 2α; car il est égal à l'angle $\omega C_1 \omega'$, lequel, étant extérieur au triangle isoscèle AC_1B, est égal à la somme des angles à la base, c'est-à-dire à l'angle 2α.

12. — *Le triangle* $\omega O \omega'$ *est isoscèle.* En effet, l'angle $O\omega\omega'$ est égal à l'angle $OA_1\omega'$; mais celui-ci est égal au complément de α, dans le triangle isoscèle BA_1C; il en résulte que la bissectrice de l'angle en O du triangle $\omega O \omega'$ est perpendiculaire sur le côté opposé; donc le triangle est isoscèle.

13. — Le rayon du cercle de Brocard est facile à déterminer en fonction de l'angle α et du rayon du cercle circonscrit à ABC; on a en effet, en appelant R_1 le rayon de ce cercle, et R le rayon du cercle ABC :

$$\frac{R_1}{R} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

On retrouverait facilement cette formule, en s'appuyant sur le fait que le triangle $\omega O \omega'$ est isoscèle, et que l'angle en O est égal à 2α; on a alors

$$R_1 = \frac{\delta}{2\sin 2\alpha}.$$

Mais nous avons vu (7) que l'on a

$$\frac{\delta}{2\sin\alpha\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}} = 2R.$$

Donc $$R_1 = \frac{R\sqrt{1 - 4\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE MOBILE

Par M. **Deville**, à Lorient.

Déterminer l'enveloppe d'une droite qui intercepte sur deux axes rectangulaires des segments dont la somme est constante.

I. — *Détermination du point de contact.* — Soient deux axes rectangulaires et une droite AB se déplaçant entre ces deux axes de manière que $OA + OB = \text{constante} = l$. Soit A_1B_1 une position voisine *(fig. 1)* ; j'ai, en considérant le triangle OAB coupé par la transversale A_1CB_1,

$$\frac{OB_1}{BB_1} \cdot \frac{AA_1}{OA_1} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

or
$$OA + OB = OA_1 + OB_1$$
$$OA - OA_1 = OB_1 - OB$$
$$AA_1 = BB_1$$

donc on a
$$\frac{BC}{AC} = \frac{OA_1}{OB_1}.$$

Fig. 1.

Cette relation subsiste à la limite quand $A_1 B_1$ coïncide avec AB. Ainsi le point de contact C avec l'enveloppe est déterminé par la relation $\frac{BC}{AC} = \frac{OA}{OB}$.

II. — *Détermination du lieu.* — Si D est le point de concours des perpendiculaires menées en A et B aux axes, CD est la bissectrice de ADB d'après la relation obtenue. Le point D se meut sur la droite RS telle que $OR = OS = l$; je mène OF, OH, perpendiculaire et parallèle respectivement à RS; ce sont les bissectrices des axes OU, OY; je joins OD et je prolonge CD en H, j'ai $ID = IF$,
$$ID = IB;$$
donc le cercle ABD passe par les points F, A, O, H.

AFBH est un carré : car d'abord $FB = AH$ et ensuite comme $OH = HC$, $CB = BD = OA$, les deux triangles OAH, BCH sont égaux, et $AH = BH$. De ce que AFBH est un carré,

je conclus que AB est perpendiculaire sur FH, que par suite CH = CF.

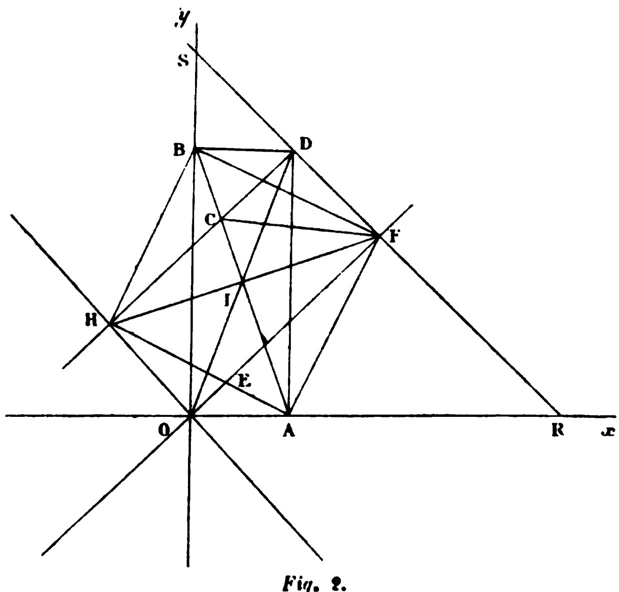


Fig. 2.

Le lieu cherché est donc une parabole ayant pour directrice la deuxième bissectrice et pour foyer le point de la première bissectrice qui est distant des axes de la longueur $\frac{l}{2}$.

QUESTION 6

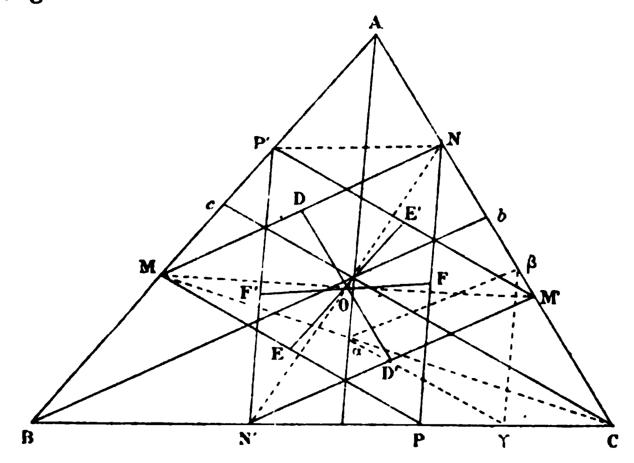
Solution par M. Paul Godefroy, à Lyon.

A tout triangle ABC *ont peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés parallèles aux bissectrices de* ABC. *Ces triangles ont le même cercle des neuf points.*

Soient Aa, Bb, Cc, les bissectrices du triangle ABC. Pour obtenir l'un des triangles inscrits dont les côtés sont parallèles aux bissectrices, traçons dans l'angle c une parallèle $\beta\gamma$

à Aa, puis des points β et γ des parallèles $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$ aux bissectrices Bb, Cc. On formera ainsi un triangle $\alpha\beta\gamma$ homothétique du triangle cherché, et le point C sera pour ces deux triangles un centre de similitude directe : la droite $C\alpha$ coupera AB en un point M qui sera l'un des sommets du triangle cherché, il ne restera plus qu'à mener de ce point des parallèles MN, MP à Bb, Cc et à joindre NP.

En répétant la même construction dans l'angle B et dans l'angle A, on obtient le second triangle dont les côtés sont parallèles aux bissectrices. Soit M'N'P' ce second triangle.



Les deux triangles MNP, M'N'P', ayant leurs côtés parallèles deux à deux, sont homologiques : il s'ensuit que les droites MM', NN', PP' qui joignent les sommets opposés aux côtés correspondants sont concourantes en un point O. De ce que ces droites sont concourantes on conclut que les triangles MNP', M'N'P sont aussi homologiques; les côtés respectivement opposés aux sommets P et P', M' et M, N' et N doivent donc se rencontrer deux à deux en trois points en ligne droite; or les côtés MN, M'N' sont parallèles, il en est donc de même des côtés P'N et PN', P'M et PM'; on verrait de même que MN' et NM' sont parallèles.

Les deux triangles MNP, M'N'P' auront le même cercle des

neuf points, si les milieux des trois côtés de chaque triangle sont six points sur une même circonférence. Soient D,E,F les milieux des côtés du premier triangle, D'E'F' les milieux des côtés du second. Joignons DD', EE', FF'. Les figures MNM'N', MPM'P', NPN'P' étant, comme on l'a vu, des parallélogrammes, les droites DD',EE',FF' qui joignent les milieux de côtés parallèles sont respectivement parallèles et égales à NM', MP', PN'; de plus elles passent toutes trois par O, point de concours commun des diagonales des trois parallélogrammes, et sont divisées en deux parties égales par ce point. Tout revient donc à prouver que DD' = EE' = FF'.

Le triangle PN'M' est isoscèle. On a en effet

angle M'N'P = angle bBN'

angle N'M'P = angle P'MN = angle P'Bb.

Mais Bb étant bissectrice de B, on a bBN' = P'Bb. Donc enfin le triangle PN'M' est isoscèle ; il s'ensuit que PN' = PM; mais PN' = FF' et PM' = EE' : donc EE' = FF'; on prouverait de même que DD' = EE = FF'.

Ces droites, étant égales et étant divisées en deux parties égales par le point O, sont des diamètres du cercle des neuf points commun aux deux triangles considérés. Ce cercle a pour centre le point O.

Nota. — La même question a été résolue par M. Prémorant, élève au collège de Cherbourg.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX
DE L'ÉCOLE NAVALE

a et b étant des angles moindres que 90°, on a

$$\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos^2 \frac{a+b}{2}} < 1.$$

— On a les relations

$$a' = \frac{r+a}{2}; \quad r' = \sqrt{ra'};$$

trouver la limite du rapport $\frac{r'-a'}{r-a}$ quand a tend vers r.

— On donne deux sphères dont la distance des centres est d; trouver sur la ligne des centres un point tel que la somme des deux zones vues de ce point soit minima.

— Trouver la limite de l'expression $y = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, lorsque a et b tendent vers l'infini; sachant que, dans ces conditions, $\frac{b^2}{a}$ tend vers une limite m.

— On donne l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Trouver la limite de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

sachant que x', y'; x'', y'' sont racines de l'équation donnée.

— De l'équation $(1 + e \cos \theta)(1 - e \cos u) = 1 - e^2$, déduire l'équation $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$.

— Démontrer géométriquement la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

— On donne un cylindre circonscrit à une sphère. Par deux points A et A', pris sur l'axe du cylindre et symétriques par rapport au centre de la sphère, on circonscrit deux cônes à la sphère. Ces cônes coupent le cylindre suivant les cercles BC et B'C'. Trouver le minimum de la surface totale formée des surfaces latérales des deux cônes et de la surface cylindrique comprise entre les cônes.

— Quelles relations doivent exister entre a, a', b, b', pour que les équations

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0,$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha},$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a'^2 \sin^2 \alpha' + b'^2 \cos^2 \alpha'}$$

soient satisfaites, quels que soient α et α'.

— On mène les tangentes aux extrémités du grand axe AB d'une ellipse et une tangente quelconque qui rencontre en C et D les tangentes AC et BD. Démontrer que la tangente DC est vue des foyers sous un angle droit et que $AC \times BD$ est constant.

— Si dans une parabole on mène par le foyer F une corde AFB quelconque et que l'on abaisse les perpendiculaires AA', BB' des points d'intersection sur l'axe, on a, bS étant le sommet de la courbe, $SF^2 = SA' \times SB'$.

— On donne un trapèze non isoscèle ABCD et la diagonale BD. Par un point I quelconque sur la hauteur BH, on mène une parallèle EON à la base, rencontrant les côtés en E et N, et la diagonale en O. Trouver le point I pour lequel $EO^2 + ON^2$ est maximum.

— Trouver la valeur que prend, pour x infini, l'expression

$$y = \sqrt{4x^2 - 3x + 2} - \sqrt{4x^2 + 3}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

77. — Construire un triangle connaissant les deux côtés AB, AC et la longueur de la partie de la bissectrice de l'angle BAC comprise entre les deux hauteurs partant de B et de C.

(E. Lemoine.)

78. — Trouver les côtés d'un triangle connaissant une hauteur, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

79. — Mener dans un triangle une transversale tangente au cercle inscrit au triangle et détachant un triangle de surface donnée. *(Reidt.)*

80. — Étant données les équations

$$\cos x + \cos y = 2\rho \cos \alpha$$
$$\sin x + \sin y = 2\rho \sin \alpha,$$

trouver l'équation qui admet pour racines $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} y$.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 5234-3.

LA GÉOMÉTRIE RÉCURRENTE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir pages 3, 25 et 49.)

TROISIÈME APPLICATION

Étude de géométrie récurrente sur les centres de gravité.

22. — Le point de concours des médianes d'un triangle se prête particulièrement bien à une étude de géométrie récurrente, parce qu'il jouit d'une propriété particulière qui permet de faire cette étude par des considérations empruntées à la mécanique, et qui conduisent au point d'ordre n, d'une façon, pour ainsi dire, intuitive.

Considérons quatre points dans l'espace 1, 2, 3, 4, et l'un d'entre eux en particulier, le point 4. Si l'on joint ce point au point de concours des médianes du triangle 1,2,3, au point que nous désignerons par G_{123}, nous obtenons une droite Δ_4. Les quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ainsi obtenues, concourent en un même point G_{1234}, et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 3.

23. — *Généralement:* imaginons n points 1, 2,...n dans l'espace et considérons l'un d'eux en particulier, le point n. Si l'on joint ce point au point $G_{1,2,\ldots(n-1)}$, précédemment défini, on obtient une droite Δ_n. Les n droites ainsi obtenues concourent en un même point $G_{1,2\ldots n}$ et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à n.

Cette propriété peut s'établir par des considérations purement géométriques et en prenant pour base et pour point de départ la définition géométrique du point G_{123}. Mais on sait, et nous n'avons pas à rappeler ici comment on démontre immédiatement cette propriété en imaginant n masses égales appliquées aux points 1, 2...n, et en cherchant le centre de gravité de ces n masses.

24.— Nous dirons maintenant quelques mots très rapides

sur les points que nous avons imaginés autrefois (*) et que nous avons nommés *centres de gravité dans les polygones complets*. Ces points remarquables ont été trouvés par un procédé très différent de celui que nous allons exposer et beaucoup moins simple.

Imaginons d'abord la figure formée par quatre droites indéfinies 1, 2, 3, 4, situées dans un plan : faisons abstraction de l'une d'elles, de la droite 4. par exemple, il reste un triangle 1, 2, 3 auquel correspond un point G_{123}. D'autre part, les côtés de ce triangle rencontrent la droite 4 en trois points 4,1 ; 4,2 ; 4,3 ; que l'on peut considérer comme formant les sommets d'un triangle aplati. A un pareil triangle correspond un point γ_4. Ce point γ_4 est le centre de gravité de trois masses égales appliquées aux points 4,1 ; 4,2 ; 4,3 : si l'on veut rester dans le domaine purement géométrique, on peut dire alors que γ_4 est le point limite du point de concours des médianes d'un triangle qui s'aplatit, les trois sommets ayant des positions limites bien déterminées

On obtient ainsi une droite Δ_4, en joignant le point G_{123} à γ_4 : les quatre droites qu'on peut ainsi obtenir concourent au même point et s'y partagent mutuellement en deux parties égales.

On reconnaît immédiatement cette propriété en appliquant des masses égales aux six sommets du quadrilatère complet formé par les droites données. On peut imaginer que l'on cherche le centre de gravité de ces six masses en cherchant d'abord le point d'application de la résultante des masses

1,2 ; 1,3 ; 2,3 ;

point qui est précisément G_{123} ; puis le centre de gravité des masses 4,1 ; 4,2 ; 4,3 ;

ce second point est γ_4. Le point d'application de la résultante des six masses que nous avons imaginées est donc placé au milieu de $\gamma_4 G_{123}$. Ceci prouve, tout à la fois : 1° que les quatre droites analogues à $\gamma_4 G_{123}$ concourent au même point ; 2° qu'elles se partagent en ce point, que nous désignerons par G_{1234}, en deux parties égales.

(*) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, t. III.

25. — Prenons maintenant le polygone complet défini par n droites, deux à deux concourantes. Ce polygone admet $\frac{n(n-1)}{2}$ sommets; si nous plaçons des masses égales à chacun de ces points, le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure, appliqué à cette figure générale, conduit au théorème suivant qui, comme l'a remarqué M. Catalan (*), rappelle un beau théorème de Coriolis (**).

Soit 1,2...n, n *droites deux à deux concourantes, faisons abstraction de l'une d'elles, de la droite* n *par exemple; il reste un polygone complet défini par les droites* 1,2... (n — 1); *et à ce polygone correspond un point* $G_{1,2\ldots(n-1)}$, *point défini par la loi même que nous énonçons en ce moment. Si l'on joint ce point au point* $\gamma_{1,2\ldots(n-1)}$, *centre de gravité des* (n — 1) *points communs à la droite* n *et aux droites* 1,2... (n — 1), *les* n *droites ainsi obtenues concourent en un même point et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 2 *à* (n — 2).

C'est le point de concours des n droites analogues à $G_{1,2,\ldots(n-1)}$, $\gamma_{1,2\ldots(n-1)}$ qui constitue le point $G_{12\ldots n}$.

26. — Nous abrégeons, le plus qu'il nous est possible, cette exposition de la géométrie récurrente ; mais nous ne pouvons pas quitter cette étude des centres de gravité sans montrer, par un nouvel exemple, comment on peut varier à l'infini la découverte de ces théorèmes successifs qui, prenant pour point de départ une propriété élémentaire, conduisent, de proche en proche, à un théorème général, qui est leur conclusion naturelle.

Imaginons encore quatre droites deux à deux concourantes et à chacun des sommets plaçons maintenant *deux* masses égales. Nous obtenons ainsi douze forces F égales et parallèles que l'on peut composer, comme nous allons l'expliquer.

Considérons les trois points

$$4,1\ ;\ 4,2\ ;\ 4,3\ ;$$

(*) *Nouvelle correspondance mathématique* t. III, p. 346.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, 24e cahier, p. 135.

et prenons, à chacun de ces points, une des forces F. Ces trois forces ont une résultante 3F, appliquée au point G_{123}. Chaque sommet du quadrilatère complet que nous considérons appartenant à deux des triangles formés par ce quadrilatère, on obtient, en combinant les forces F, comme nous venons de le dire, quatre forces 3F, ayant pour points d'application G_{123}, G_{234}, G_{341}, G_{412}.

On peut maintenant combiner les trois forces 3F appliquées aux points G_{234}, G_{341}, G_{412};
et l'on obtient une force 9F, appliquée au centre de gravité γ'_4 du triangle G_{234}, G_{341}, G_{412}. La droite γ'_4 G_{123} et les droites analogues passent par le point que nous avons défini tout à l'heure (§ 24) s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 3.

De cette remarque on peut conclure le théorème suivant:

Théorème. — *Étant données quatre droites* 1, 2, 3, 4, *deux à deux concourantes; si l'on fait abstraction de l'une d'elles, de la droite* 4 *par exemple, on obtient un triangle auquel correspond un centre de gravité* G_{123} ; *si l'on joint ce point au centre de gravité du triangle formé par les trois autres points* G : *1° les quatre droites* Δ *ainsi obtenues concourent au même point* G_{1234}; *2° ce point est le centre de gravité du quadrilatère complet, c'est-à-dire le centre de gravité des six sommets de cette figure; 3° les droites* Δ *se partagent mutuellement dans le rapport de* 1 *à* 3.

27. — Prenons maintenant un pentagone complet et à chacun des sommets appliquons *six* masses égales, produisant chacune une force égale à F. Faisons abstraction de l'une des droites, de la droite 5 par exemple, et considérons le quadrilatère complet 1, 2, 3, 4. Aux sommets de ce quadrilatère sont appliquées six forces; prenons deux d'entre elles et raisonnons comme nous l'avons fait au paragraphe précédent. Nous obtenons une force 12F appliquée au point G_{1234}. Chaque sommet du pentagone proposé appartient à *trois* quadrilatères complets. Par exemple le point 1, 2, est un sommet dans chacun des polygones

1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 5; 1, 2, 4, 5.

Comme il y a six forces F à chaque point, sommet du pentagone proposé, au point 1, 2 en particulier, on pourra diviser ces forces en trois couples égaux à 2F et nous obtiendrons finalement, par cette composition des forces F, 5 forces égales à 12F et appliquées aux centres de gravité des quadrilatères complets 1,2,3,4; 1,2,3,5, etc., points définis comme on l'a vu plus haut.

Si nous combinons maintenant les 4 forces 5F qui sont appliquées aux points G_{1235} etc., nous obtenons une force 4, 12 F appliquée en un point γ'_5, centre de gravité des quatre points G_{1235}, etc. Les cinq droites $G_{1234}\,\gamma'_5$ vont passer par le point d'application de la résultante des 60 forces F considérées, et, pour des raisons connues, se partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 4.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Imaginons cinq droites* 1,2,3,4,5, *qui définissent cinq quadrilatères complets, à chacun desquels correspond un centre de gravité, point défini précédemment. Si l'on joint l'un de ces points au centre de gravité des quatre autres points analogues, les cinq droites ainsi obtenues concourent au même point, centre de gravité du pentagone proposé, et se partagent mutuellement, en ce point, dans le rapport de* 1 *à* 4.

28. — On voit facilement, par les explications qui précèdent, quel est le théorème général auquel aboutissent les deux théorèmes précédents et comment on peut faire sa démonstration.

On imagine n droites, deux à deux concourantes, et à chacun des sommets S de ce polygone complet on place $1 . 2 . 3 \ldots (n - 2)$ masses égales. Chaque sommet S appartient à $(n - 2)$ polygones complets d'ordre $(n - 1)$, et l'on peut partager les $1 . 2 \ldots (n - 2)$ forces appliquées en S en $(n - 2)$ groupes de $1 . 2 \ldots (n - 3)$ forces F. En combinant ces $1 . 2 \ldots (n - 3)$ forces appliquées aux sommets du polygone $1, 2, \ldots (n - 1)$, on obtient un point $G_{1 . 2 \ldots n-1}$ précédemment défini. Si l'on joint ce point au centre de gravité γ'_n des $(n - 1)$ autres points analogues,

on sait que les n droites ainsi obtenues concourent et se partagent mutuellement dans le rapport de 1 à $(n - 1)$. Le théorème général qui résulte de ces considérations peut donc s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Considérons* n *droites, deux à deux concourantes ; elles définissent* n *polygones complets d'ordre* (n — 1) *obtenus en faisant successivement abstraction de l'une d'elles, et, à chacun de ces polygones correspond un centre de gravité, point défini précédemment. Si l'on joint l'un de ces points au centre de gravité des* (n — 1) *autres points analogues, les* n *droites ainsi obtenues concourent au même point, centre de gravité du polygone complet proposé, et s'y partagent mutuellement dans le rapport de* 1 *à* n. *(A suivre.)*

SUR UN POINT DE LA DISCUSSION

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **P. Barrieu**, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

La plupart des traités d'algèbre élémentaire donnent la démonstration des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si deux nombres* α *et* β*, substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs de signes contraires,* α *et* β *comprennent entre eux une racine et n'en comprennent qu'une.*

Théorème II. — *Si les deux nombres* α *et* β*, substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs de même signe,* α *et* β *comprennent entre eux les deux racines, ou n'en comprennent aucune.*

Nous nous proposons, dans le cas particulier où α et β sont des nombres égaux et de signes contraires, de compléter l'énoncé de ces deux théorèmes et d'en modifier la forme de manière à pouvoir les introduire utilement dans les discussions du second degré. Nous ferons remarquer que

le cas particulier dont il s'agit est assez fréquent; il se présente notamment dans un certain nombre de problèmes sur le cercle et la sphère, et dans les équations du second degré qui ont pour inconnue un sinus ou un cosinus.

Voici les deux théorèmes que nous proposons, et qui modifient légèrement ceux que nous avons rappelés :

Théorème I. — *Si deux nombres égaux et de signes contraires,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs dont le produit soit négatif,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$ *comprennent entre eux une racine et n'en comprennent qu'une;* la racine comprise est celle qui a la plus petite valeur absolue.

Théorème II. — *Si deux nombres égaux et de signes contraires,* $-\alpha$ *et* $+\alpha$, *substitués à* x *dans l'équation du second degré, donnent au premier membre des valeurs dont le produit soit positif,* et si, de plus, le produit des carrés des racines est moindre que α^4, *les deux racines, si elles sont réelles sont comprises entre* $-\alpha$ *et* $+\alpha$.

Démonstration. — Soit P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement x par $-\alpha$ et $+\alpha$ dans le premier membre de l'équation du second degré :

$$P = (a\alpha^2 - b\alpha + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c),$$

nous aurons deux cas à distinguer :

1° $P < 0$. Les deux facteurs de P sont de signes contraires, donc $-\alpha$ et $+\alpha$ comprennent entre eux une racine.

La racine comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est en valeur absolue moindre que α, la racine extérieure est au contraire en valeur absolue plus grande que α; donc la racine comprise est celle qui a la plus petite valeur absolue, et le théorème I est démontré.

2° $P > 0$. Les deux facteurs de P sont de même signe; donc $-\alpha$ et $+\alpha$ comprennent entre eux les deux racines ou n'en comprennent aucune.

Si les deux racines sont comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, chacune d'elles est en valeur absolue moindre que α, et le produit de leurs carrés est moindre que α^4.

Si, au contraire, les deux racines sont extérieures α et $+\alpha$, chacune d'elles est en valeur absolue plus grande que α, et le produit de leurs carrés est plus grand que α^4.

Donc, pour que les deux racines soient comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, il faut et il suffit que l'on ait en même temps :

$$\begin{cases} P > 0 \\ x'^2x''^2 < \alpha^4 \end{cases}$$

La deuxième condition peut s'écrire

$$\frac{c^2}{a^2} < \alpha^4$$

ou $$(c - a\alpha^2)(c + a\alpha^2) < 0.$$

Pour le cas particulier où $\alpha = 1$ cette condition devient

$$(c - a)(c + a) < 0.$$

Nous allons maintenant appliquer ces théorèmes à la discussion des problèmes du second degré.

Problème I. — *Discuter l'équation du second degré en* sin x.

$$(m - 1) \sin^2 x - 2(m + 1) \sin x + 2m - 1 = 0.$$

(Rebière, *Trigonométrie*, p. 75.)

Pour simplifier l'écriture, nous poserons $\sin x = y$. L'équation devient alors

$$(m - 1) y^2 - 2(m + 1) y + 2m - 1 = 0; \qquad (1)$$

Discussion. — Les racines doivent être réelles et comprises entre -1 et $+1$.

La condition de réalité est

$$(m + 1)^2 - (m - 1)(2m - 1) \geq 0$$

d'où $$-m^2 + 5m \geq$$
$$m(m - 5) \leq 0$$
$$0 < m < 5. \qquad (2)$$

Soit P le produit des facteurs obtenus en remplaçant successivement y par -1 et $+1$ dans le premier membre de l'équation (1), nous avons

$$P = \{m - 1 + 2(m + 1) + 2m - 1\}\{m - 1 - 2(m + 1) + 2m - 1\}$$
$$= 5m(m - 4).$$

Donc P est négatif pour toutes les valeurs de m comprises entre 0 et 4, positif pour toutes les autres.

La condition $y'^2y''^2 < 1$ devient

$$(c - a)(c + a) < 0 \qquad \text{(Th. II.)}$$

ou, en remplaçant a et c par leurs valeurs,

$$m(3m - 2) < 0,$$

d'où

$$0 < m < \frac{2}{3}, \qquad (3)$$

Le produit des racines est de même signe que

$$(m - 1)(2m - 1) = 2(m - 1)\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

Les racines seront donc de signes contraires pour toutes les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, de même signe pour toutes les autres.

La somme des racines est de même signe que

$$(m + 1)(m - 1).$$

Elle est donc négative pour toutes les valeurs de m comprises entre -1 et $+1$, positive pour toutes les autres.

Nous pouvons résumer tous ces résultats dans les deux tableaux suivants :

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3} \ldots 1 \ldots 4}^{P < 0}\overbrace{\ldots 5}^{P > 0} \\ \underbrace{0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3}}_{y'^2 y''^2 < 1}\underbrace{\ldots 1 \ldots 4 \ldots 5}_{y'^2 y''^2 > 1} \end{array} \right.$$

$$\text{var. de } m \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{0 \ldots \frac{1}{2}}^{y'y'' > 0}\overbrace{\ldots \frac{2}{3} \ldots 1}^{y'y'' < 0}\overbrace{\ldots 4 \ldots 5.}^{y'y'' > 0} \\ \underbrace{0 \ldots \frac{1}{2} \ldots \frac{2}{3} \ldots 1}_{y' + y'' < 0}\underbrace{\ldots 4 \ldots 5.}_{y' + y'' > 0} \end{array} \right.$$

Il est inutile de considérer les valeurs de m autres que celles comprises entre 0 et 5, puisque les racines correspondantes seraient imaginaires.

Cela posé, nous avons deux cas à considérer :

Premier cas. $0 < m < 4.$

On a $P < 0$. Une seule racine est comprise entre -1 et $+1$. (Th. I.) Il y a donc une seule solution. Pour distinguer la racine qui convient, il suffit de rechercher au deuxième tableau celle qui a la plus petite valeur absolue. (Th. I.)

1°. $0 < m < \frac{1}{2}$. Les deux racines sont négatives. Il faudra donc prendre celle qui a la plus petite valeur absolue, c'est-à-dire la plus grande racine en valeur relative. Donc : *une solution négative.*

2°. $\frac{1}{2} < m < 1$. Les deux racines sont de signes contraires et la racine positive est la plus petite en valeur absolue. Donc : *une solution positive.*

3°. $1 < m < 4$. Les deux racines sont positives; on prendra la plus petite. Donc : *une solution positive.*

Deuxième cas. $4 < m < 5$.

On a : $P > 0$ et $y'^2 y''^2 > 1$. Il n'y a donc aucune racine comprise entre -1 et $+1$. (Th. II.) Donc : *pas de solution.*

(A suivre.)

EXAMENS ORAUX POUR SAINT-CYR

Algèbre.

Étudier les variations du trinôme $3x^2 + 2x - 1$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— On donne l'équation $x^2 + px + q = 0$, former l'équation admettant les racines $x' + \frac{1}{x'}$ et $x'' + \frac{1}{x''}$.

— $x^m - a^m$ est-il toujours divisible par $x^2 - a^2$.

— Résoudre $x^8 - 1 = 0$. Combien cette équation a-t-elle de solutions ?

— Étudier la fonction $y = x^4 - 5x^2 + 7$.

— Étudier la fonction $y = \frac{1}{x^2 - 2h}$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Courbe représentative.

— Étudier la fonction $y = x^2 - 2x + 7$; courbe.

— Discuter les racines de l'équation

$$mx^2 - (2m + 1)x + 3m - 1 = 0,$$

quand m prend toutes les valeurs possibles. Condition de réalité des racines. Que faut-il pour que les racines soient positives ?

— Variations de la fonction $y = 3x^2 - 5x + 4$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Que faut-il pour que les racines de $ax^2 + bx + c - 2a = 0$ étant réelles soient toutes deux plus grandes que 2.

— Résoudre $\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} > 0$.

— Résoudre $x^2 - 12x + 35 > 0$.

— Maximum et minimum de $\frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 5x + 6}$.

— Résoudre $3x + 2\sqrt{x} = a$.

— Résoudre $x + y = a$;
$x^3 + y^3 = b^3$.

— Étudier les variations de la fonction $y = x^4 - 8x^2$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Résoudre $\frac{ax}{x - a} + x = b$.

Discuter. Que faut-il pour que les deux racines soient supérieures à $10\,a$?

— Variation du trinôme $8x^2 - 5x + 2$.

— Résoudre $\frac{a^2}{x^2 - b^2} - \frac{b^2}{x^2 - a^2} = A$.

— Résoudre $xy = \mu$;
$(x + a)^2 + (y + a)^2 = m^2$.

Trigonométrie.

— Résoudre $\cos x = m \operatorname{tg} x$. Discuter.

— Résoudre $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

— Résoudre $3 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{cotg} x = 4$.

— Résoudre $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c$. Condition de réalité. Rendre calculable par log. la valeur de $\operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\sin 2x - \cos^2 x = m$. Discuter.

— Trouver la valeur de $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$ quand x tend vers 45.

— Résoudre $\cot g\, x + \sec 2x = m$. Discuter.

— Résoudre $\dfrac{\operatorname{tg}(45 + x)}{\operatorname{tg} x} = k$.

— Résoudre $\sin x + \sin(60 - x) = n$.

— Résoudre $\dfrac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} = m$.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x = m^2$.

— Résoudre

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 2(\operatorname{tg}^2 x + \cot g^2 x).$$

— Résoudre $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$.

— Résoudre $\cos 2x = \sin 3x$.

— Résoudre $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 1$.

— Résoudre et discuter

$$(m - 1)\operatorname{tg}^2 x - 2(m - 2)\operatorname{tg} x + 3(m - 3) = 0.$$

— Voir ce que devient la fraction $\dfrac{\sin(x - 30)}{1 - 2\sin x}$ quand x tend vers 30°.

— Résoudre et discuter

$$\operatorname{tg}^2 x - (m - 1)\operatorname{tg} x + (m - 2) = 0,$$

x devant varier entre 0 et 90°.

— Résoudre et discuter

$$m \operatorname{tg}^4 x - 2(m - 1)\operatorname{tg}^2 x + m - 2 = 0.$$

— Résoudre et discuter

$$3\sin^2 x + b = \sin x \cos \alpha.$$

— Résoudre $2\sin x + \cos 2x = m$.

— Résoudre

$$m \sin^2 x - (m - 2)\sin x + 3 = 0.$$

Applications diverses.

On donne un cercle. On mène la corde AC et la corde symétrique AD; on joint CD; mener AC tel que $AC^2 + AD^2 + CD^2 = 4m^2$.

— On donne un demi-cercle AB. Mener une corde PQ perpendiculaire à AB telle qu'on ait $AP + PQ = m$; discuter.

— On donne une circonférence O et un point A sur le diamètre BC prolongé. Mener une sécante APQ telle que l'angle QOP soit quadruple de l'angle PAO.

— Calculer les diagonales d'un quadrilatère inscriptible en fonction des côtés. Expression de la surface.

— Étant donné un demi-cercle AB, trouver sur AB un point C tel que si de ce point on mène une perpendiculaire jusqu'à la rencontre d'une droite indéfinie menée par le point A et faisant avec AB un angle α, on ait $CF^2 + CD^2 = m^2$. Cas où $\alpha > 45°$; $\alpha < 45°$. Conditions de possibilité du problème.

— On donne un cercle et un diamètre AB. Mener une corde CD perpendiculaire à AB et telle qu'on ait $AC^2 + CD^2 = m^2$.

— Couper une sphère par un plan tel que le cône qui a pour base la section et pour sommet le centre de la sphère ait une surface égale à celle de la calotte qui a pour base la section.

— On donne une sphère. On la coupe par un plan de manière à en détacher un segment à une base. Mener ce plan de façon que $\frac{\text{vol. segment BAM}}{\text{v. secteur BOM}} = K$.

— On donne un demi-cercle AB et une corde AC. Déterminer sur le demi-cercle un point M tel que si de ce point on abaisse MP perpendiculaire sur AB et du pied P de cette perpendiculaire une perpendiculaire PQ sur AC, on ait

$$MP^2 + PQ^2 = m^2.$$

— Somme des carrés des diagonales dans un trapèze.

— On donne un demi-cercle AB et on même une tangente en B. Placer une corde PQ telle que le rapport des volumes engendrés par le demi-cercle et le triangle PBQ soit égal à m.

Mécanique.

Un nageur voudrait aller de A en C pour traverser une rivière dont les bords sont supposés rectilignes et parallèles et qui coule dans un sens déterminé. Dans quelle direction doit-il nager? On connaît la vitesse v de la rivière, celle du nageur h, et on suppose que les deux mouvements sont uniformes. — Discussion.

— La barre AB du poids de 200 kil., de longueur $1^m,20$, supporte en A et en B des poids de 60 et 80 kil. Où doit être placé le point O d'appui pour qu'il y ait équilibre?

— Un pendule pesant 25 gr. est écarté de la position ver-

ticale d'un angle de 60°. Trouver la valeur de la force horizontale (une source d'électricité) qui maintient le pendule en B'.

— Quelles sont les valeurs de deux forces f et f' à appliquer en A et B extrémités d'une barre AB pour qu'elles soient composantes d'une force verticale de 60 k. appliquée en C tel que AC = 15 c. m. et BC = 25 c. m.

— Si d'un point M de la résultante R de deux forces concourantes P et Q on abaisse deux perpendiculaires MN, MI, démontrer qu'on a la relation $\frac{MI}{MN} = \frac{P}{Q}$.

— Aux points A et B d'une droite rigide AB sont appliquées deux forces F et P faisant avec AB des angles de 120° et 150° et telles que P = 2F. Démontrer qu'il y a une résultante ; en trouver la valeur et le point d'application sur AB.

— Une poutre AB pesant 400 k. repose en AB sur deux points fixes et supporte au tiers de sa longueur un poids de 500 k. Trouver la pression sur les points d'appui.

— On suppose matérielles et pesantes les lignes de la figure dite pont-aux-ânes et si la figure peut tourner autour de l'axe perpendiculaire à son plan par le point M, milieu de BC, il y a équilibre.

— Dans un triangle on donne un point quelconque O intérieur ; on le joint aux trois sommets ; on suppose que trois forces sont dirigées suivant OA, OB, OC ; on demande leur résultante. Prouver qu'elle passe par le centre de gravité G du triangle. Valeur de la résultante par rapport à OG.

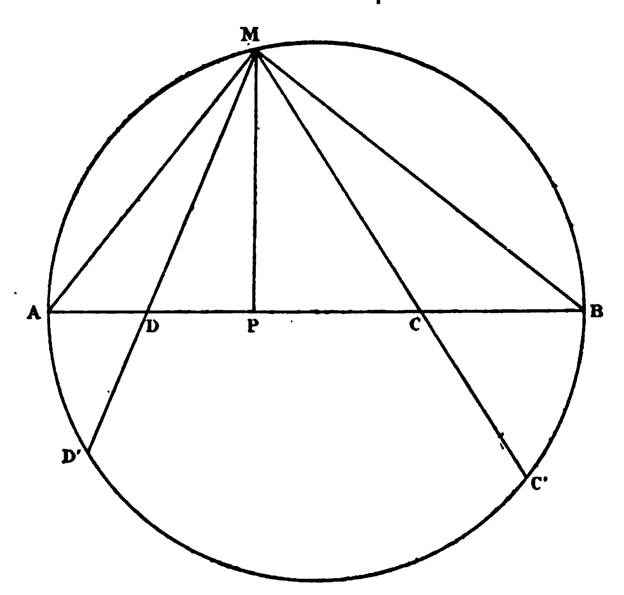
— Une barre AB de $1^{m},50$ de long pèse 80 k. Quelle force faut-il appliquer en B pour que AB reste horizontale, la barre pouvant tourner librement autour du point C tel que AC = 0,80 ?

QUESTION 44

Solution par M. Georges BERTHELOT, ex-élève du Lycée de Châteauroux, Répétiteur au Lycée de Bourges.

On considère un cercle et un diamètre AB; *d'un point* M *pris sur la circonférence, on abaisse une perpendiculaire* MP *sur* AB. *Soit* C *le milieu de* PB. *Prenons enfin entre* A *et* B *un point* D *tel que* $AD = \frac{PB}{4}$. *Les droites* MC *et* MD *rencontrent le cercle en des points* C′ *et* D′. *Démontrer que l'on a*

$$\text{arc } MB = 2BC' + AD'.$$



Je vais d'abord démontrer que MD = DC.

En effet, dans le triangle DMC, on a

$$\overline{MD}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{DC}^2 - 2DC \times PC.$$

Or dans le triangle MPC on a

$$\overline{MC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2.$$

Et dans le triangle rectangle AMB on a

$$\overline{MP}^2 = AP \times PB = \left(\frac{PC}{2} + DP\right) 2PC = \overline{PC}^2 + 2PC \times DP.$$

Donc $\overline{MD}^2 = 2\overline{PC}^2 + \overline{DC}^2 + 2PC \times DP - 2DC \times PC.$

Et comme $DC = DP + PC$, on a

$$\overline{MD}^2 = \overline{DC}^2;$$

d'où $MD = DC$

et par suite angle DCM = angle DMC.

De plus on a

$$AM + MB = BC' + D'C' + AD'$$

$$MB = BC' + D'C' + AD' - AM$$

Or, $D'C' = AM + BC'$.

donc $MB = BC' + AM + BC' + AD' - AM$

$$MB = 2BC' + AD'.$$

Nota. — La même question à été résolue par MM. Puig, à Montpellier; Deville, à Lorient.

QUESTION 46

Solution par M. E. Mosnat, à Thiers.

On donne l'axe Ox, *le sommet* O, *et un point* M *d'une parabole; on propose de construire cette courbe point par point au moyen d'une équerre.* (G.L.)

Joignons OM; menons par le point O e perpendiculaire à OM et par le point M une parallèle à Ox; ces deux droites se coupent en un point I; de ce point, abaissons une perpendiculaire sur Ox; soit A le pied de cette perpendiculaire et B le pied de l'ordonnée du point M.

Les deux triangles rectangles OMB, IAO sont semblables

et donnent $$\frac{MB}{OB} = \frac{AO}{IA}$$

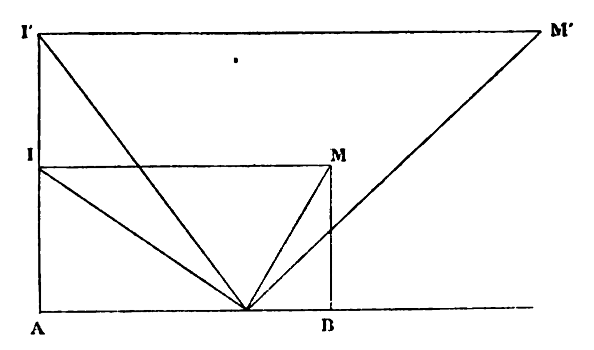
ou comme $IA = MB$; $MB^2 = OB \cdot AO$;

mais quelle que soit la position du point M sur la parabole.

on a $$\frac{MB^2}{OB} = \text{const.}$$

Donc $AO = \text{const.}$

ce qui prouve que le lieu du point I, quand on fait varier la position du point M sur la parabole, est une perpendiculaire



à l'axe Ox de la parabole menée, à une distance du sommet égale au rapport $\frac{MB^2}{OB}$, c'est-à-dire au double du paramètre.

Il est alors facile de construire la parabole; puisqu'on connaît un point M, on peut déterminer la perpendiculaire IA.

On mènera alors, par le point O, une droite qui coupera la perpendiculaire IA en I', et une perpendiculaire OM' à cette droite. Par le point I' on mènera une parallèle à Ox qui coupera la perpendiculaire OM' en M', le point M' appartient à la parabole.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Vail, à Arcueil; La Chesnais, au lycée Saint-Louis, à Paris; Besson, à Nantes; Deville, à Lorient; H. Bourget, à Aix.

QUESTION 50

Solution par M. DEVILLE, brigadier d'artillerie de Marine, à Lorient.

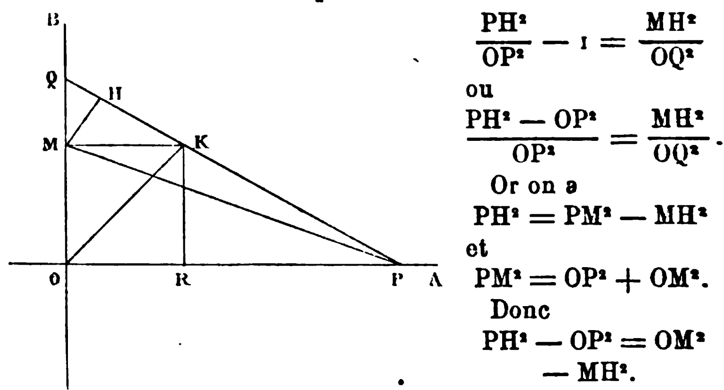
On considère un angle droit AOB, *et sur* OB *un point fixe* M. *On trace une droite rencontrant* OB *au point* Q, OA *au point* P *et telle que si du point* M *on abaisse une perpendiculaire* MH *sur*

PQ, *on ait toujours la relation*

$$\frac{PH^2}{OP^2} - \frac{MH^2}{OQ^2} = 1.$$

Démontrer que la droite PQ *passe par un point fixe.*

La relation considérée peut s'écrire



$$\frac{PH^2}{OP^2} - 1 = \frac{MH^2}{OQ^2}$$

ou

$$\frac{PH^2 - OP^2}{OP^2} = \frac{MH^2}{OQ^2}.$$

Or on a

$$PH^2 = PM^2 - MH^2$$

et

$$PM^2 = OP^2 + OM^2.$$

Donc

$$PH^2 - OP^2 = OM^2 - MH^2.$$

Par suite, la relation peut s'écrire

$$\frac{OM^2 - MH^2}{OP^2} = \frac{MH^2}{OQ^2} = \frac{OM^2}{OP^2 + OQ^2} = \frac{OM^2}{PQ^2}.$$

On tire de là

$$OM = \frac{MH.PQ}{OQ}.$$

Menons MK, parallèle à OP, et rencontrant PQ en K; nous aurons, par la similitude des triangles MHK, OPQ :

$$MK = \frac{MH.PQ}{OQ}.$$

Donc $MK = OM.$

Par suite, le point K est le sommet du carré construit sur les axes OA et OB, avec OM comme côté. Donc la droite PQ passe par un point fixe K.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Mosnat, à Thiers.

QUESTION 53

On considère l'expression

$$U = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}\,,$$

et on propose de la transformer en un produit de deux facteurs de la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. *Démontrer que la transformation n'est possible que si* $a^2d = bc$, *et qu'elle n'est avantageuse que si* $a^2 - b$ *et* $a^2 - c$ *sont des carrés parfaits.*

L'égalité

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})\,(\sqrt{u} + \sqrt{v})$$

donne, en élevant au carré

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = (x + y + 2\sqrt{xy})\,(u + v + 2\sqrt{uv}).$$

On satisfait à cette égalité en posant

$$a = (x + y)\,(u + v)$$
$$b = 4\,(x + y)^2 uv$$
$$c = 4\,(u + v)^2 xy$$
$$d = 16\,xyuv.$$

Ces équations sont incompatibles, si l'on n'a pas $a^2d = bc$. Lorsque cette condition est remplie, le système est indéterminé; en effet, on a, quel que soit γ, l'identité

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})\,(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = (\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda y})$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda}} + \sqrt{\frac{v}{\lambda}}\right).$$

On peut profiter de cette indétermination pour prendre entre deux des quantités une relation quelconque. Posons par exemple $x + y = 1$,

On déterminera alors facilement u et v, puis x et y. On tire, en effet, des deux premières équations

$$u = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b};$$

$$v = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}\,.$$

En portant ces valeurs dans la troisième, on a xy, et

d'après la relation qui donne $x + y$, on trouve

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c};$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c},$$

On voit que si $a^2 - b$ et $a^2 - c$ sont des carrés parfaits, x et y sont rationnels, et que, par conséquent, la formule est avantageuse, puisque l'on a un produit de facteurs qui sont des sommes de radicaux simples.

Soit par exemple

$$U = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

On a ici :

$$a = 1\,; \quad b = \frac{3}{4}; \quad c = \frac{8}{9}; \quad d = \frac{6}{9};$$

la condition $a^2d = bc$ est remplie et l'on a

$$a^2 - b = \frac{1}{4}$$

$$a^2 - c = \frac{1}{9}.$$

Donc

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

puis

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$v = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$U = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + 3)}{6}.$$

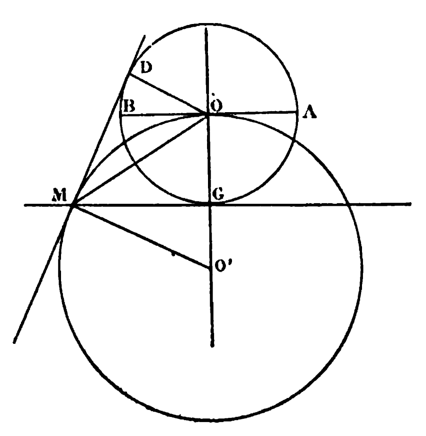
QUESTION 56

Solution par M. Sagols, élève au Lycée de Toulouse.

On considère un cercle C *de centre* O; *soit* AB *un diamètre fixe de ce cercle ; par le point* O. *on mène une circonférence* C' *tangente à* AB; *puis on mène une tangente commune aux cercles*

C *et* C′ ; *on propose de trouver le lieu des points de contact de cette dernière droite avec* C′.

Soit MD la tangente commune, D étant le point de contact avec C, et M le point de contact avec la circonférence C′ de centre O′. Menons MO′, DO et joignons M au point G où OO′ rencontre C. Les angles O′MO et O′OM sont égaux, de même O′MO et MOD′ puisque OD, O′M sont parallèles, donc O′OM = MOD. Les triangles MOG, MOD sont donc égaux, et l'angle MGO étant droit, le point M est sur la tangente au point G au cercle C.



Réciproquement tout point M de la droite appartient au lieu; en effet, menons par M la tangente à C autre que GM, joignons O à D et menons en M la parallèle à DO qui coupe OG en O′. Menons MO qui est la bissectrice de DOG. Les angles OMO′ et DOM sont égaux, donc OMO′ = MOO′; par suite O′O = O′M et le cercle de centre O et de rayon OO′ est tangent à AB en O, et à MD au point M.

Le lieu du point M se compose donc des deux tangentes à C parallèles à AB.

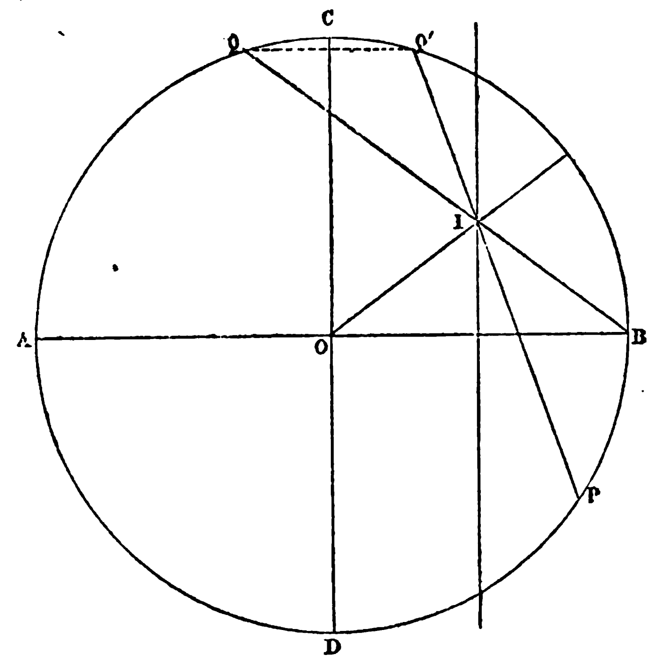
QUESTION 62

Solution par M. Mascart, élève au Lycée Henri IV.

On donne un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD. *A partir de* A, *on prend un arc* AQ *et dans l'autre sens un arc* AP *tel que* arc AP = 2 . arc AQ.

Soit Q′ *le symétrique de* Q *par rapport à* CD. *On demande*

le lieu géométrique décrit par le point I, *commun aux droites* PQ′ *et* BQ. (G. L.)



Les arcs QQ′ et BP, égaux à 180° — 2AQ, sont égaux, d'où il résulte arc QQ′B = arc Q′BP et QB = Q′P. Donc OI est bissectrice de l'angle de ces cordes et passe par le milieu de l'arc Q′B. Alors IOB = IBO comme ayant même mesure $\frac{AQ}{2}$. Le point I est sur la perpendiculaire au milieu de OB.

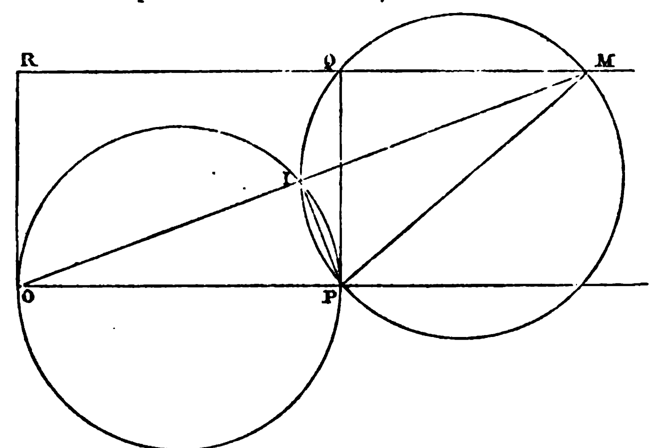
Le point Q décrivant la circonférence O, la droite BQ passera par tous les points de la perpendiculaire considérée : donc celle-ci est le lieu cherché.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Corne, à Nice; Tresselle, à Angers; Guignard, à Angoulême; H. S., à Toulouse; Savonnet, à Salins; Zuloaga, à Paris; Desplanques, à Condé; Bablon, à Épinal.

QUESTION 67

Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Charleville.

On considère un rectangle dont les sommets sont les points O,P,Q,R. *Par les points* PQ *on fait passer une infinité de cercles; soit* Δ *l'un d'entre eux. Ce cercle* Δ *coupe* QR *en un point* M *et la droite* OM *coupe à son tour le cercle* Δ *en un point* I; *démontrer que le lieu du point* I *est une circonférence.*



Tirons IP et PM, qui passe évidemment par le centre du cercle Δ. L'angle PIM étant droit, il en sera de même de l'angle OIP. Le lieu du point I est donc la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Vialard, à Cluny; Chapron à Vincennes; Bougarel, à Toulon; Taratte, à Evreux; Bordier, à Blanzac; de, Kerdrel, à Keruzoret.

QUESTIONS PROPOSÉES

81. — Dans un triangle on connaît la base et l'angle au sommet. Trouver le lieu du centre du cercle des neuf points.

82. — Dans un triangle on connaît la bissectrice de l'angle au sommet, le rectangle des deux côtés qui comprennent cet angle et la différence des angles à la base ; on demande de construire ce triangle.

83. — Trois nombres entiers sont en proportion géométrique ; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique ; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les trois nombres.

84. — Démontrer géométriquement que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{p}{q} + \text{arc tg}\,\frac{q-p}{p+q}.$$

85. — Par un point pris sur la bissectrice d'un angle mener une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

86. — On considère deux droites rectangulaires Δ et Δ', et sur Δ on prend un point fixe P. Par ce point P on fait passer une transversale mobile δ, qui forme avec Δ et Δ' un triangle rectangle. Imaginons maintenant le cercle inscrit, et soit A le point de contact de ce cercle avec Δ, et B son point de contact avec δ. Démontrer que la droite AB passe par un point fixe. *(G. L.)*

87. — On considère une parabole P, et une droite Δ perpendiculaire à l'axe de cette parabole et située à une distance du sommet S égale au double du paramètre ; une parallèle à l'axe rencontre P au point A et Δ au point B. Trouver le lieu du centre des cercles circonscrits au triangle SAB quand cette parallèle se déplace. On suppose, pour bien fixer la position de la droite Δ, que cette droite rencontre réellement la parabole. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7254-3.

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. LAUVERNAY, professeur au collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 73.)

LEÇON II

DU QUADRILATÈRE GAUCHE

Théorème I. — *Deux droites quelconques sont coupées par trois plans parallèles en segments proportionnels* (fig. 9).

Soient A, B, C les points de rencontre de la première droite avec chacun des trois plans; D, E, F ceux de la seconde droite

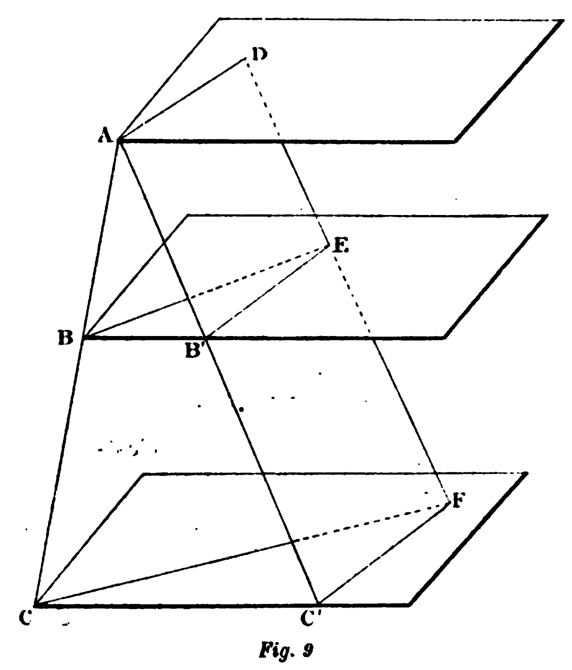


Fig. 9

avec ces mêmes plans; menons par A la parallèle AB'C' à la droite DEF. Les intersections du plan CAC' avec les

plans parallèles BB′E, CC′F étant parallèles, on a :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}.$$

Or AB′ = DE et B′C′ = EF, comme parallèles comprises entre plans parallèles ; donc à l'égalité précédente on peut substituer la suivante : $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Définition. — On appelle *quadrilatère gauche* tout quadrilatère ADFC dont les quatre côtés ne sont pas dans un même plan. Si l'on remarque que, dans le théorème précédent, le plan BB′E est parallèle aux deux côtés opposés AD, CF du quadrilatère gauche, ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, partage proportionnellement les deux autres côtés.

Réciproquement. — *Toute droite* BE *qui divise proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, est dans un plan parallèle à la fois aux deux autres côtés.*

En effet, par AD menons le plan parallèle à CF, et par CF menons le plan parallèle à AD ; ces deux plans sont parallèles entre eux, et si par le point B on mène le plan parallèle à ceux-ci, il rencontre DF en un point E′ tel que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE'}{E'F};$$

or par hypothèse $$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

et par comparaison $$\frac{DE'}{E'F} = \frac{DE}{EF},$$

donc les deux points E, E′ coïncident, c'est-à-dire que BE est dans un plan parallèle aux deux côtés opposés AD, CF.

Théorème II. — *Si une droite* BE *est assujettie à rencontrer deux droites fixes* ABC, DEF *en restant constamment parallèle à un plan donné, le lieu du point* M *de cette droite divisant le segment* BE *dans un rapport constant* K, *est une droite située dans un plan parallèle aux deux droites fixes* (fig. 10).

Soient AD, CF deux positions de la droite mobile et μ, μ' les points de ces droites tels que

$$\frac{A\mu}{D\mu} = \frac{C\mu'}{F\mu'} = K;$$

la droite $\mu\mu'$, qui, d'après la réciproque précédente, est dans un plan parallèle aux deux côtés opposés AC, DF, est le lieu de M.

En effet, BE, étant parallèle à un plan fixe, qui lui-même est parallèle aux deux droites AD, CF, divise les côtés opposés AC, DF en segments proportionnels, c'est-à-dire que

$$\frac{BC}{BA} = \frac{EF}{ED}.$$

Soit H le point de rencontre des droites $B\mu$, CD ; d'après le théorème des transversales on a

$$\frac{A\mu . DH . BC}{D\mu . CH . BA} = 1.$$

relation qui peut être remplacée par la suivante :

$$\frac{C\mu' . DH . EF}{F\mu' . CH . ED} = 1$$

d'après les égalités précédentes ; donc les trois points μ', E, H sont en ligne droite ; les deux droites $B\mu$, $E\mu'$ étant dans un même plan, les deux autres droites $\mu\mu'$, BE de ce plan se rencontrent en un point M, et qui est tel que

$$\frac{BM}{ME} = \frac{A\mu}{\mu D} = K.$$

Fig. 10.

Donc le lieu de M est la droite $\mu\mu'$.

Corollaire I. — *Si une première droite $\mu\mu'$ partage proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche et qu'une seconde droite* BE *partage aussi proportionnellement les deux autres côtés opposés, ces deux droites sont dans un même plan et chacune d'elles est partagée par l'autre en deux segments proportionnels aux segments des côtés qu'elle ne rencontre pas.*

Corollaire II. — *Dans tout quadrilatère gauche, les trois droites joignant les points milieux des côtés opposés et les milieux des deux diagonales concourent en un point qui est le milieu de chacune d'elles.*

LEÇON III

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

Définition. — Imaginons deux droites M, N dans l'espace, et sur chacune d'elles une direction adoptée comme *direction positive* ; si par un point O arbitrairement choisi dans l'espace on mène à ces deux directions deux demi-droites parallèles OM', ON', on peut rabattre la demi-droite OM' sur ON' par deux rotations, et ces rotations sont mesurées par deux angles dont la somme est égale à 4 droits. L'un d'eux α est donc plus petit que deux droits, et c'est cet angle α, unique et bien déterminé, qu'on nomme l'*angle des deux directions données*. On a vu, en effet, que tous les angles M'ON' qu'on pouvait ainsi former étaient égaux. Si α est égal à zéro ou à π, les deux droites sont parallèles; parallèles et de même direction si $\alpha = 0$; parallèles et de directions opposées si $\alpha = \pi$; enfin si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les directions données sont dites *rectangulaires*.

On nomme *faisceau de plans* la figure formée par plusieurs plans passant par une *même droite*, qu'on appelle *axe* du faisceau.

Lemme. — *Si l'on fait tourner un faisceau autour de l'axe de façon que l'un des plans se superpose à son prolongement, chacun des autres plans se superposera à son prolongement.*

Il suffit de démontrer cette proposition pour un faisceau de deux plans P et Q *(fig. 11)*.

Menons dans chacun de ces plans OA,. OB perpendiculaires à l'axe OS, et soit M le plan de ces deux droites ; faisons tourner le faisceau autour de l'axe OS de façon que la portion de plan SOA vienne sur son prolongement: la droite OA, située dans le plan P et perpendiculaire à OS, coïncidera avec OA′ perpendiculaire à OS, c'est-à-dire avec son prolongement, et OB avec OB′; car si la portion SOB du plan Q ne venait pas sur son prolongement, elle viendrait en SOB_1 tel que l'angle BOB_1 égale deux droits, puisque cet angle est dans les mêmes conditions que l'angle AOA′ qui vaut deux droits, et on aurait deux droites OB_1, OB′, prolongements de la même droite OB, ce qui est impossible.

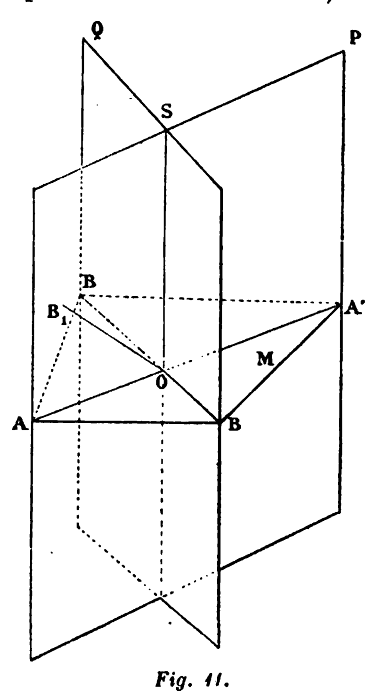


Fig. 11.

Théorème I. — *Le lieu des perpendiculaires menées d'un point* O *d'une droite* OS *sur cette droite est un plan* (fig. 12).

Par la droite OS menons deux plans quelconques, et dans chacun d'eux élevons les perpendiculaires AOA′, BOB′ sur OS; soit P le plan de ces deux perpendiculaires. Par OS menons arbitrairement un troisième plan Q, qui rencontre le plan P suivant la droite COC′; dans le plan Q il existe une seule droite perpendiculaire à OS et passant par O, qui est COC′.

En effet, faisons tourner le faisceau des trois plans, passant par OS, jusqu'à ce que la portion SOA du premier plan s'applique sur son prolongement; la droite OA de ce plan viendra sur son prolongement OA′; de même OB coïncidera avec OB′; par conséquent, après la rotation, le plan P des

deux droites OA, OB est superposé à lui-même; donc la droite OC située dans le plan P sera encore dans ce plan, et comme elle est en même temps sur le prolongement du plan Q, elle coïncidera avec OC′; or OC′ est le prolongement de OC; par suite, les angles adjacents SOC, SOC′ coïncidents sont égaux, et leurs côtés non communs étant en ligne droite, SO est perpendiculaire sur COC′.

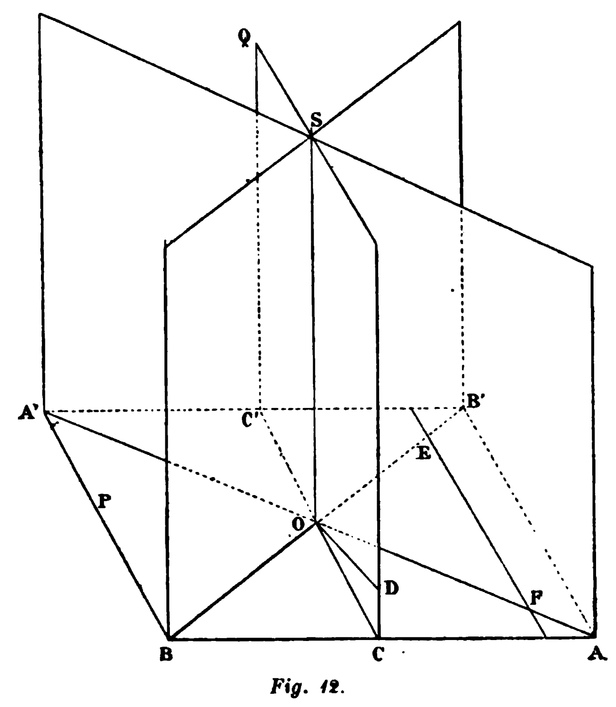


Fig. 12.

D'autre part, toute droite OD, extérieure au plan P, ne peut être perpendiculaire à SO, car le plan SOD rencontrant le plan P suivant une droite OC perpendiculaire à SO, on aurait dans un même plan SOD deux perpendiculaires passant par le point O sur une même droite OS. Donc le plan P constitue à lui seul le lieu de toutes les perpendiculaires menées par O sur la droite OS.

Corollaire I. — *Toute droite* OS *perpendiculaire à deux*

droites OA, OB *d'un plan est perpendiculaire à une droite quelconque* EF *de ce plan.*

Car, si par le point O on mène la parallèle OC à EF, cette droite située dans le plan P est perpendiculaire à SO.

Définition. — Une droite et un plan sont dits *perpendiculaires*, lorsque cette droite est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.

Corollaire II. — *Par un point d'une droite on peut mener un plan perpendiculaire à celle-ci et un seul.*

Corollaire III. — *Le lieu des points équidistants des extrémités d'une droite est le plan élevé perpendiculairement à cette droite par son milieu.*

Théorème II. — *Le lieu des perpendiculaires menées d'un point* E *extérieur à une droite* S_1O_1 *sur cette droite est un plan.*

Menons par le point O de la droite SO le plan P perpendiculaire à celle-ci, et transportons cette figure de manière que la droite SO coïncide avec la direction S_1O_1 et faisons-la glisser, SO restant en coïncidence avec S_1O_1, jusqu'à ce que le plan P passe par le point E ; ce plan occupe alors une position P_1 qui est perpendiculaire à la droite S_1O_1; d'après le corollaire I, toute droite EF menée dans ce plan P_1 est perpendiculaire à S_1O_1 ; d'autre part toute droite ED extérieure à ce plan est oblique par rapport à S_1O_1: car sa parallèle O_1D_1, qui est également intérieure à ce plan, est oblique par rapport à S_1O_1. Donc ce plan P_1 constitue à lui seul le lieu de toutes les perpendiculaires que l'on peut mener par le point E sur S_1O_1.

Corollaire I. — *Par un point* E, *extérieur à une droite, on peut mener un plan perpendiculaire à cette droite et un seul.*

Corollaire II. — *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles* et réciproquement.

Corollaire III. — *Toute droite* OS *perpendiculaire à deux droites quelconques* EF, EG *qui se coupent dans un plan est perpendiculaire à ce plan* (*).

(*) Pour abréger ce travail, nous omettrons les démonstrations de quelques propositions très simples et auxquelles ne touche pas particulièrement l'exposition que nous faisons ici des théorèmes du Ve livre.

Si les deux droites étaient parallèles, la propriété précédente n'aurait généralement pas lieu.

Il résulte de ce corollaire que pour démontrer la perpendicularité entre une droite et un plan, il suffit d'établir que la droite est perpendiculaire à deux droites qui se coupent situées dans ce plan, ou encore qu'elle est perpendiculaire à une droite *quelconque* de ce plan.

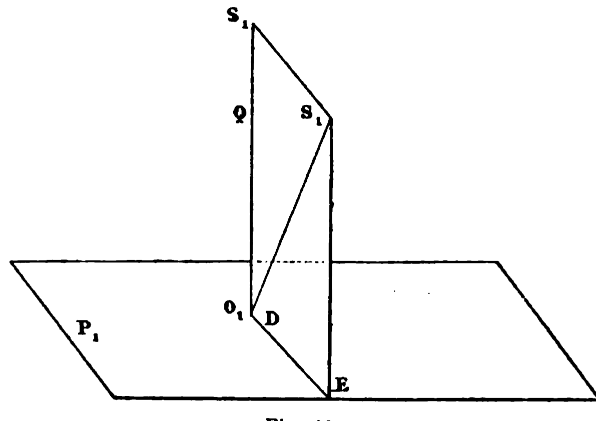


Fig. 13.

Théorème III. — *Par un point donné* O_1 *on peut mener*

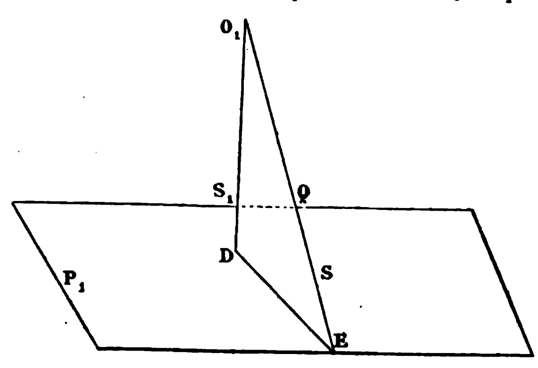


Fig. 14.

une droite perpendiculaire à un plan P_1 *et une seule* (fig. 13 et 14).

Comme précédemment, construisons le plan P perpendiculaire à la droite SO; transportons cette figure de façon que les deux plans P et P_1 coïncident, et faisons glisser P sur P_1 jusqu'à ce que SO passe par le point O_1; cette droite SO occupe alors une position S_1O_1 perpendiculaire au plan P_1 et c'est la seule; car s'il en existait une seconde O_1S', le plan Q de ces deux droites rencontrerait P_1 suivant une droite DE, à laquelle on pourrait mener dans ce même plan Q d'un même point O_1 deux perpendiculaires ce qui est impossible.

Définition. — Toute droite non perpendiculaire et non parallèle à un plan est dite *oblique* à ce plan.

Théorème IV. — *Le lieu des points équidistants de trois autres est une droite perpendiculaire au plan de ces trois points.*

Soit O le point du plan P des trois points A, B, C (*fig. 15*) également distant de ceux-ci; par O élevons la perpendiculaire OS au plan P; tout point S de cette droite appartient au lieu, car les triangles rectangles SOA, SOB, SOC sont égaux, comme ayant les côtés de l'angle droit égaux; donc SA = SB = SC. D'ailleurs tout point M extérieur à cette droite ne peut faire partie du lieu, car si l'on avait

$$MA = MB = MC,$$

le plan MOS serait à la fois perpendiculaire sur les trois droites AB, BC, CA et en leurs milieux (corollaire III du théorème I), ce qui est impossible.

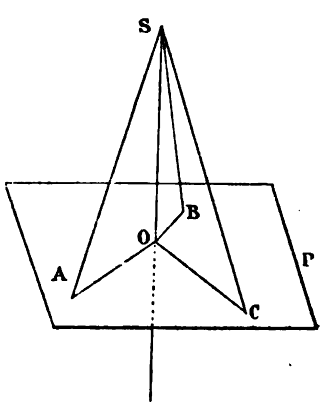


Fig. 15.

Théorème V. — *Si l'on a trois obliques égales* SA, SB, SC *s'écartant également d'une droite* SO, *la droite* SO *est perpendiculaire au plan* ABC.

Soit O le point de rencontre du plan ABC avec SO, les trois triangles OSA, OSB, OSC, ayant un angle égal (savoir les

angles en S) compris entre un côté commun SO et les côtés égaux SA, SB, SC par hypothèse, sont égaux ; donc

$$OA = OB = OC.$$

Les deux points S et O étant également distants des trois points A, B, C, la droite qui les joint est le lieu des points également distants de A, B et C ; donc, d'après le théorème précédent, cette droite SO est perpendiculaire au plan des trois points A, B, C.

Corollaire. — *Le lieu des points d'un plan situés à égale distance d'un point* S *est une circonférence ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.*

THÉORÈME DES TROIS PERPENDICULAIRES.

Théorème VI. — *Si du pied* O *de la perpendiculaire à un plan* P, *on abaisse la perpendiculaire* OA *sur une droite quelconque* AB *du plan toute droite joignant le pied* A *de cette seconde perpendiculaire à un point* S *de la première est perpendiculaire sur la droite* AB *du plan* (fig. 16).

En effet, la droite AB, étant située dans le plan P perpendiculaire à SO, est perpendiculaire sur SO et sur OA par hypothèse, par suite au plan SOA de ces deux droites et par conséquent sur la droite AS de ce plan.

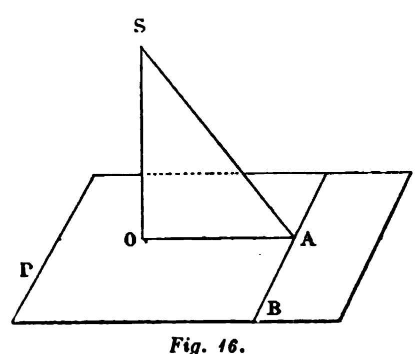


Fig. 16.

Corollaire. — *Si d'un point* S *extérieur à un plan, on abaisse la perpendiculaire* SA *sur une droite quelconque* AB *de ce plan, la droite qui joint le pied* A *au pied* O *de la perpendiculaire abaissée de* S *sur le plan est perpendiculaire sur la droite* AB *du plan.*

Théorème VII. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle* L *à ce plan est perpendiculaire à la droite, et* RÉCIPROQUEMENT *toute perpendiculaire à cette droite est parallèle au plan.*

Par le pied O de la perpendiculaire OS au plan, menons la parallèle OC à la droite L; cette droite OC est située dans le plan, puisque celui-ci est parallèle à L ; donc OC étant perpendiculaire sur OS, sa parallèle L est aussi perpendiculaire sur OS. Réciproquement, soit la droite L perpendiculaire à OS; menons le plan passant par L et le pied O, il coupe le premier suivant une droite OC perpendiculaire à OS; donc les deux droites L et OC, situées dans un même plan différent du premier et perpendiculaires sur la même droite OS sont parallèles ; donc L est parallèle au premier plan.

Théorème VIII. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan, et* RÉCIPROQUEMENT *deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Soit OS perpendiculaire au plan P, par conséquent à une droite quelconque EF de ce plan (*fig. 17*), sa parallèle O'S' est aussi perpendiculaire à EF, par conséquent au plan P.

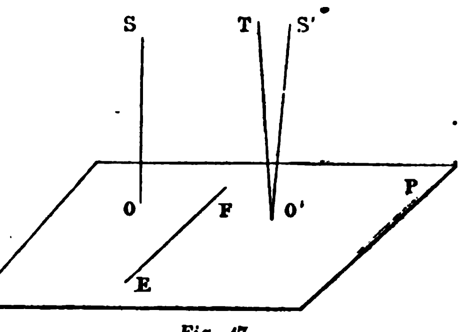


Fig. 17.

Réciproquement, les deux droites OS, O'S' perpendiculaires au même plan P sont parallèles: car s'il en était autrement, soit O'T la parallèle à OS, d'après le théorème direct, O'T serait perpendiculaire au plan P, et on aurait au point O' deux perpendiculaires O'S', O'T à un même plan P, ce qui est impossible.

(A suivre.)

NOTE

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SYMÉTRIQUES

Par M. P. Barrieu, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

On sait que, si l'on désigne par S_1, S_2, S_3 ... les sommes des puissances semblables des racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$S_1 = -p$$
$$S_2 = p^2 - 2q$$
$$S_3 = -p^3 + 3pq$$
$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2$$
$$S_5 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2.$$

Dans ses *Questions d'algèbre* M. Desboves a appliqué ces formules à la résolution des systèmes de la forme

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^m + y^m = b \end{cases}$$

Nous nous proposons d'étendre cette méthode à des cas autres que ceux traités dans cet excellent ouvrage, et de montrer par quelques exemples l'emploi qu'on en peut faire pour la résolution des équations symétriques.

M. Lauvernay, dans son *Traité d'algèbre*, a bien indiqué, d'une manière générale, la solution d'un système de deux équations symétriques dont l'une donne S_1, et l'autre S_m; il a prouvé qu'on pouvait traiter élémentairement la question, dans le cas où m ne dépasse pas 5. Nous nous proposons en outre de montrer comment on peut arriver à résoudre des systèmes de trois équations symétriques au moyen de cette méthode.

I. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + mx^2y + mxy^2 + y^3 = b \end{cases}$$

(Vacquant, *Leçons d'Algèbre*, p. 330).

Le système peut s'écrire

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 + mxy\,(x + y) = b \end{cases}$$

Il est évident que x et y peuvent être considérés comme racines de l'équation

$$X^2 + pX + q = 0, \qquad (1)$$

à la condition de déterminer p et q de telle sorte que ces racines satisfassent aux relations

$$\begin{cases} S_1 = a & (2) \\ S_3 + mqS_1 = b & (3) \end{cases}$$

On aura donc, pour déterminer p et q, les relations

$$\begin{cases} -p = a & (4) \\ -p^3 + 3pq - mpq = b & (5) \end{cases}$$

L'équation (4) donne

$$p = -a \qquad (6)$$

et en portant cette valeur dans l'équation (5) on a

$$a^3 - 3aq + maq = b;$$

d'où
$$q = \frac{a^3 - b}{a(3 - m)}. \qquad (7)$$

On a donc pour déterminer x et y l'équation

$$X^2 - aX + \frac{a^3 - b}{a(3 - m)} = 0.$$

II. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = mz \\ x^2 + y^2 = nz^2 \\ x^3 + y^3 = a^3 - z^3 \end{cases}$$

(Baccalauréat ès sciences. Montpellier 1880.)

En considérant x et y comme racines de l'équation

$$X^2 + pX + q = 0, \qquad (1)$$

on a, pour déterminer p, q et z, les trois relations

$$\begin{cases} -p = mz \\ p^2 - 2q = nz^2 \\ -p^3 + 3pq = a^3 - z^3. \end{cases}$$

Les deux premières donnent

$$p = -mz, \qquad (2)$$

$$m^2z^2 - 2q = nz^2,$$

d'où
$$q = \frac{(m^2 - n)\, z^2}{2}, \qquad (3)$$

et en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$m^3z^3 - \frac{3m(m^2 - n)}{2} z^3 = a^3 - z^3,$$

d'où $$(2 + 3mn - m^3)z^3 = 2a^3. \qquad (4)$$
z étant fourni par cette équation, on aura x et y par l'équation $$X^2 - mzX + \frac{(m^2 - n)z^2}{2} = 0.$$

III. — *Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant son périmètre* 2p, *et sachant que la somme des surfaces engendrées par les deux côtés de l'angle droit en tournant autour de l'hypoténuse est équivalente à l'aire d'un cercle de rayon* a.

(Bos, *Éléments d'Algèbre*, p. 312.)

Les équations du problème sont
$$\begin{cases} xy\,(x + y) = a^2z \\ x + y + z = 2p \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$
En considérant x et y comme racines de l'équation :
$$X^2 + PX + Q = 0, \qquad (1)$$
nous aurons pour déterminer P, Q et z les relations
$$\begin{cases} -PQ = a^2z & (2) \\ -P + z = 2p & (3) \\ P^2 - 2Q = z^2 & (4) \end{cases}$$
L'équation (3) donne
$$P = z - 2p. \qquad (5)$$
Cette valeur portée dans l'équation (4) donne
$$(z - 2p)^2 - 2Q = z^2,$$
d'où $$Q = \frac{(z - 2p)^2 - z^2}{2} = 2p\,(p - z). \qquad (6)$$

Enfin en portant ces valeurs de P et Q dans l'équation (2) on a, pour déterminer z,
$$2p\,(2p - z)\,(p - z) = a^2z,$$
d'où $$2pz^2 - (6p^2 + a^2)\,z + 4p^3 = 0; \qquad (7)$$
z étant ainsi déterminé par l'équation (7), on aura, pour déterminer x et y, l'équation
$$X^2 + (z - 2p)X + 2p(p - z) = 0.$$

IV. — *Résoudre le système*
$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 21 \\ xy + xz + yz &= -2 \end{aligned}$$
(Lauvernay, *Algèbre*, p. 217.)

En considérant y et z comme les racines de l'équation

$$U^2 + pU + q = 0,$$

les coefficients p et q devront satisfaire aux équations

$$x - p = 7,$$
$$x^2 + p^2 - 2q = 21,$$
$$px + q = 2.$$

En éliminant p et q entre ces trois équations, nous déterminerons x; or nous éliminons immédiatement q en doublant la troisième équation et l'ajoutant à la seconde; nous avons ainsi $(x + p)^2 = 25,$

d'où $px + p = \pm 5;$

d'autre part $x - p = 7.$

Donc nous avons les deux systèmes de valeurs

$$x = 6, \quad p = -1;$$
$$x = 1, \quad p = -6.$$

Nous en tirons toujours

$$q = 8.$$

Donc y et z seront les racines de l'une ou l'autre des équations

$$U^2 - U + 8 = 0,$$
$$U^2 - 6U + 8 = 0.$$

La première donne des valeurs imaginaires pour y et z; la seconde donne les valeurs 4 et 2, qui seules sont acceptables.

V. — *Éliminer* x *entre*

$$\sin x + \cos x = m, \qquad (1)$$
$$\sin^3 x + \cos^3 x = n. \qquad (2)$$

Nous joindrons à ces deux relations la relation

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (3)$$

Cela étant, si l'on considère sin x et cos x comme racines de l'équation $X^2 + pX + q = 0, \qquad (4)$

on aura, entre $p, q, m, n,$ les trois relations

$$\left\{\begin{aligned} -p &= m \\ p^2 - 2q &= 1 \\ -p^3 + 3pq &= n \end{aligned}\right.$$

Les deux premières donnent

$$p = -m,$$
$$q = \frac{m^2 - 1}{2}$$

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$m^3 - \frac{3m(m^2 - 1)}{2} = n;$$

d'où
$$m^3 - 3m + 2n = 0.$$

C'est la relation demandée.

Ces exemples suffiront à bien faire comprendre la méthode. Elle consiste dans la substitution des inconnues p et q aux inconnues x et y. Son principal avantage réside dans l'abaissement immédiat du degré par rapport à q, ce qui simplifie notablement les équations et permet d'éviter les artifices de calcul exigés par la méthode ordinaire.

QUESTION 2

Solution par M. L. Germain, élève au Collège ecclésiastique de Belley.

Démontrer que le polynôme

$$A = nx^{n+1} - (1 + np)\,x^n + (p - 1)\,x^{n-1}$$
$$+ (p - 1)\,x^{n-2} + \ldots + (p - 1)\,x + p$$

est exactement divisible par $x^2 - (p + 1)\,x + p$.

(G. de Longchamps.)

Je remarque d'abord que le polynôme donné peut se mettre sous forme finie. En effet, on peut écrire

$$A = (nx^{n+1} - (1 + np)\,x^n + (p - 1)\,x\,(x^{n-2} + x^{n-3}$$
$$+ \ldots + 1) + p. \qquad (1)$$

Or $(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1)$ n'étant autre chose que le quotient de $x^{n-1} - 1$ par $x - 1$, l'égalité ci-dessus devient

$$A = nx^{n+1} - (1 + np)\,x^n + (p - 1)\,x\,\frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} + p. \qquad (2)$$

Je remarque, en second lieu, que le diviseur donné $x^2 - (p + 1)\,x + p$ est le produit de $(x - p)$ par $(x - 1)$, p et 1 étant les racines du trinôme $x^2 - (p + 1)\,x + p$ égalé à zéro.

Ceci posé, le polynôme A, mis sous la forme (2), est divisible par $x - p$, puisqu'il s'annule pour $x = p$. Remplaçant en effet x par p, on a

$$A = np^{n+1} - (1 + np)\,p^n + \frac{(p-1)\,p\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1} + p$$

ou $A = np^{n+1} - np^{n+1} - p^n + p^n - p + p = 0.$

Le polynôme A, mis sous la forme (1), est divisible par $x - 1$, puisqu'il s'annule pour $x = 1$.

Remplaçant en effet x par 1, on a

$$A = n - 1 - np + (p - 1)\,(n - 1) + p = 0.$$

Le polynôme A, étant divisible par $x - p$ et $x - 1$, est divisible par leur produit $(x - p)\,(x - 1)$, c'est-à-dire par le trinôme $x^2 - (p + 1)\,x + p$:

c. q. f. d.

Nota. — **La même question a été résolue par MM. Bourget, à Aix; Masserand, à Passy; Blessel, à Paris; Godefroy, à Lyon; Euverte, au lycée Louis-le-Grand, à Paris; Berthelot, à Châteauroux.**

QUESTION 4

Solution par M. Sarrazin, à l'Institution Sainte-Marie, à Besançon

Démontrer que si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a ses racines réelles, l'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

a aussi ses racines réelles, quel que soit a.

L'équation $x^2 + px + q = 0$

donne $$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Puisque les racines de cette équation sont réelles, on a

$$p^2 \geq 4q, \qquad (m)$$

L'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p)$$

donne $$x = \frac{-(p + a) \pm \sqrt{p^2 - ap + a^2 - 3q}}{3}.$$

équation qui donnera pour x des valeurs réelles si

$$p^2 - ap + a^2 - 3q \geq 0. \qquad (n)$$

De l'inégalité (m) on tire pour valeur maximum de q :

$q = \frac{p^2}{4}$, valeur essentiellement positive ; si donc, en remplaçant q par $\frac{p^2}{4}$ dans l'inégalité (n), cette inégalité est satisfaite, il sera *a fortiori* vrai de dire, quelle que soit d'ailleurs la valeur de q, que

$$p^2 - ap + a^2 - 3q \geq 0,$$

c'est-à-dire que l'équation proposée a ses valeurs réelles

En remplaçant q par $\frac{p^2}{4}$ dans l'inégalité (n) elle devient

$$p^2 - 4ap + 4a^2 \geq 0$$

ou

$$(p - 2a)^2 \geq 0,$$

inégalité qui est toujours satisfaite, puisqu'un carré est toujours positif.

Par suite l'inégalité

$$p^2 - ap + a^2 - 3q \geq 0$$

est toujours satisfaite; donc l'équation proposée a ses racines réelles, quelle que soit la valeur de a.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Millischer (Institution Sainte-Marie), à Besançon ; Puig, à Montpellier ; Savey, à Belley ; Godefroy, à Lyon ; Bourget à Aix ; Fiévet à Lille ; Euverte, au lycée Louis-le-Grand, à Paris ; Vazon, au collège Rollin.

QUESTION 9

Solution par M. PUIG, élève au Lycée de Montpellier.

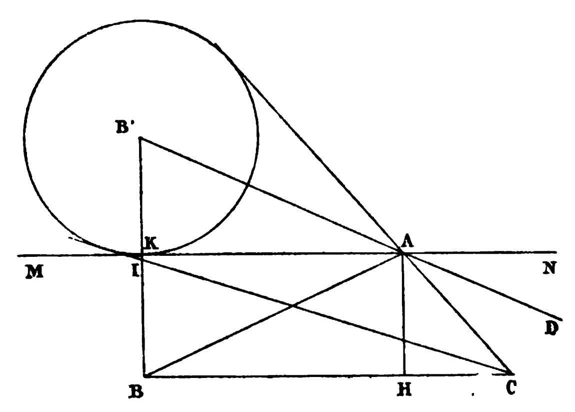
Construire géométriquement un triangle dont on connait la base, la hauteur, et sachant que l'un des angles à la base est double de l'autre.

Supposons] le problème résolu, et soit ABC le triangle dont on connait la base BC, la hauteur AH, et dont l'angle ACB est double de l'angle ABC.

Le sommet A du triangle est situé sur une parallèle MN à BC, menée à une distance AH; l'angle NAC est égal au double de l'angle MAB; donc le problème est ramené au problème connu suivant :

Étant donnés une droite MN *et deux points* B C *du même côté, trouver sur cette droite un point* A *tel que l'angle* NAC *soit le double de l'angle* MAB.

Pour cela, on prend le point B′ symétrique du point B par rapport à MN; et de ce point comme centre, avec BK



comme rayon, on décrit une circonférence à laquelle on mène une tangente par le point C; le point A où elle coupe MN est le point qui répond à la question.

Donc en joignant les points B et C au point A on a le triangle ABC.

Par le point C on peut mener une autre tangente qui coupe MN au point I; le point I répond aussi à la question proposée dans le problème auxiliaire, mais ne répond pas à la condition exigée par le triangle.

Il n'y a donc qu'une solution.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Deville, à Lorient.

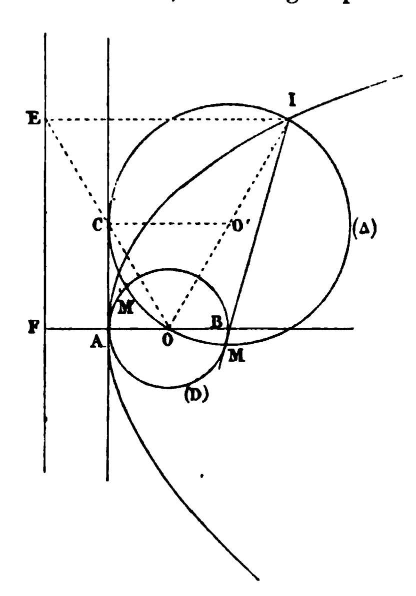
QUESTION 16

Solution par M. H. BOURGET, à Aix.

On considère un cercle D; *soient* AB *un diamètre,* AC *la tangente au point* A; *par le centre* O *de* D, *on mène une infinité de cercles* Δ *tangents à* AC; *soit* M *un des points communs à*

D *et* Δ; *la tangente en* M *au cercle* D *rencontre* Δ *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

Tirons OI; cette ligne passe évidemment au point O', puisque le triangle OIM est rectangle; des points O' et I abaissons sur AC des perpendiculaires; soit C le pied de la perpendiculaire abaissée du point O'. Menons OC et prolongeons cette ligne jusqu'en F à la rencontre de la perpendiculaire abaissée du point I.



Il est aisé de voir que les triangles OO'C, OIE sont semblables : or

$$O'C = OO';$$

donc $OI = EI = 2OO'$.

Par suite le lieu géométrique du point I est une parabole ayant pour directrice une parallèle à AC menée par E et pour foyer le point O.

On voit que le sommet est en A et que le demi-paramètre $FO = 2AO$.

Remarques. — 1° Le lieu du centre O' est une parabole confocale à la première.

2° Si, au lieu de M, on avait pris M', le second point d'intersection, le lieu eût été la même parabole.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Finat, à Moulins; Germain, à Belley; R. et P. Godefroy, à Lyon; Puig, à Montpellier; Pigeaud, à Châteauroux; Quintard, à Arbois.

DIPLOME D'ÉTUDES DES REALSCHÜLEN

1. La somme des termes d'une proportion continue est 39; la somme de leurs carrés est 741. Quelle est la proportion ?

2. De quel point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle faut-il abaisser des perpendiculaires sur les deux autres côtés pour que le rectangle ainsi formé donne, en tournant autour d'un des côtés du triangle, le cylindre du plus grand volume possible?

3. Dans une ellipse $a^2 = 3b^2$; deux diamètres conjugués se rencontrent sous un angle de 120°. Quels angles forment-ils avec le grand axe?

4. Quelle est l'inclinaison d'un plan, si une sphère met quatre fois plus de temps à le parcourir qu'elle n'en mettrait à tomber de sa hauteur h?

(Berlin, 1876.)

— 1. Partager le nombre 23 en trois parties, de telle façon que 3 fois la première, 8 fois la deuxième et 11 fois la troisième fassent une somme égale à 200.

2. Circonscrire à un cône droit ayant le rayon r, et la hauteur h, un autre cône, de telle façon que le sommet du premier soit le centre de la base du deuxième, la base du premier une section circulaire du deuxième, et le volume du second un minimum. Quel est ce volume?

3. Une pyramide régulière à base hexagonale a un volume $v = 2400$; l'arête latérale $s = 22$; calculer la hauteur et l'arête de base.

4. Résoudre le système

$$x + y = 9u$$
$$x^2 + y^2 = 82u$$
$$x^3 + y^3 = 378u$$

5. Trouver le centre de gravité d'un segment de cercle, également pesant en tous ses points, dont le rayon et l'angle au centre sont respectivement

$$r = 12, \quad \alpha = 60°.$$

6. Résoudre les équations

$$x + y = 4;\ u + v = 10;\ x^2 + u^2 = 130;\ y^2v^2 = 34.$$

7. La surface d'un triangle isoscèle est 42; le rayon du cercle inscrit est $\frac{14}{3}$; calculer la valeur de chaque côté.

8. On donne un triangle isoscèle. Une parabole est située dans son plan de telle façon que son axe est sur la médiane relative à la base, qu'elle passe par les extrémités de la base, et qu'elle partage le triangle en deux parties égales. Où se trouve le sommet, et quel est le paramètre de cette courbe? Quelle est l'équation d'une tangente à la courbe passant par un sommet du triangle?

9. Une pyramide régulière à base carrée est circonscrite à une sphère de rayon r; la hauteur de la pyramide est égale à la circonférence d'un grand cercle de la sphère. Trouver le volume et la surface de la pyramide, ainsi que l'angle dièdre de deux faces latérales.

10. On superpose les plans de deux ellipses égales, de façon que le centre de chacune d'elles tombe sur l'un des foyers de l'autre. Déterminer l'angle sous lequel elles se coupent. Appliquer la formule à deux cercles.

11. De combien de minutes le dernier rayon du soleil couchant sous la latitude géographique φ disparaît-il plus tard au sommet d'une montagne dont l'altitude est h, qu'il ne le fait au pied de cette montagne sur le rivage et au niveau de la mer? On supposera que le jour de l'expérience la déclinaison du soleil est d et son rayon apparent ρ. Appliquer la formule trouvée au cas où $h = 3710$ m., $\varphi = 28° 7'$, $\delta = 23° 27'$, $\rho = 34' 54''$.

12. Quel doit être, dans un ellipsoïde de révolution, le rapport de l'axe au diamètre équatorial, pour que le cylindre inscrit dont la section méridienne est un carré, soit la plus grande partie possible du volume de l'ellipsoïde.

13. La spirale d'Archimède est engendrée par un point qui pendant que le rayon r tourne d'une vitesse angulaire uniforme, s'avance uniformément sur ce rayon, en partant du centre, de sorte que le premier tour achevé, il arrive à l'extrémité de r, et continue ensuite à s'avancer uniformément sur le prolongement de ce rayon.

1° Quelle est l'étendue de la surface comprise entre la première spire et la position primitive du rayon r?

2° Quelle est l'étendue de la surface qui s'ajoute au second tour?

3° Quelle est la longueur de la $(k+1)^e$ spire?

14. Un corps parcourt un plan incliné d'une longueur $a = 0^m,8$ et d'une inclinaison $\alpha = 10°$, puis il parcourt encore une distance $s = 1^m,52$, sur un plan horizontal de même matière et de même nature, jusqu'à ce que le frottement arrête son mouvement. Déterminer le coefficient de frottement.

(Berlin, 1880.)

ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE

1881.

Énoncer et démontrer la règle à suivre pour extraire la racine m^e d'un polynôme.

Application. — Extraction de la racine cubique de

$$8a^3 - 48a^5b + 120a^4b^2 - 160a^3b^3 + 120a^2b^4 - 48ab^5 + 8b^6.$$

— Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre $2p$ et la surface m^2.

— Les quotients d'un nombre N par a, b, c, sont premiers entre eux: démontrer que N est le plus petit commun multiple de a, b, c.

— Déterminer l'angle C d'un triangle sphérique à l'aide des formules.

$$\text{cotg}\, a \sin b = \frac{\sin (C + \varphi)}{\cos \varphi} \text{cotg}\, A;$$

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{\cos b}{\text{cotg}\, A}$$

si $a = 50° 48' 20''$, $b = 116° 44' 48''$, $A = 59° 51' 22''$.

— Dans le plan d'une hyperbole donnée se meut une droite qui reste à une distante constante du centre. — Des points d'intersection de la droite et de la courbe on mène à cette courbe des tangentes qui se coupent en M. Lieu des points M.

— Résoudre $\sin x + \sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.

1882.

Deux trains vont en sens inverse l'un de l'autre, le premier avec une vitesse de 18 kilom. à l'heure, l'autre avec une vitesse de 24 kilom. Un voyageur placé dans le premier observe qu'il a fallu 13″ au second pour passer. Quelle était la longueur du train.

— Deux courriers partent d'un même point: le premier qui a a jours d'avance marche avec une vitesse V, l'autre marche avec une vitesse V′ le premier jour, V′ — r le second jour, V′ — $2r$ le troisième jour ... Après combien de temps vont-ils se rencontrer? Discussion.

— Trouver les arcs satisfaisant à

$$\text{tg}\, x \cot g\, 2x = \text{tg}\, 7x \cot g\, x.$$

— Mesure de la surface d'un triangle, d'un polygone sphérique.

— On donne un cercle dans lequel on mène deux cordes parallèles AB, CD: l'une AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit, l'autre CD égale au côté de l'hexagone. Exprimer la surface de cercle comprise entre ces droites AB, CD.

QUESTIONS PROPOSÉES

33. — Trouver les côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; que si l'on augmente chaque côté de 50 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 17 mètres, et que si chaque côté croît de 60 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 20 mètres. *(The Educat. Times.)*

34. — Par un point P, pris sur le prolongement de la base BC d'un triangle ABC, mener une sécante rencontrant AC en Q et AB en R, de telle façon que le produit AR × CQ soit minimum. *(The Educat. Times.)*

35. — Soit K le point de rencontre des hauteurs d'un triangle, P un point du cercle circonscrit; la ligne PK rencontre en Q la droite de Simson relative au point P; démontrer que si le point P se déplace sur la circonférence, le lieu du point Q est le cercle des neufs points du triangle. *(The Educat. Times.)*

36. — On considère deux droites rectangulaires AB, AC, et au point A on mène un cercle Δ tangent à la droite AB. Soit D le second point de rencontre de Δ avec AC; si, par un point fixe P de AB, on mène une tangente à Δ, cette

droite rencontre la parallèle à AB, menée par le point D, en un point I dont on demande le lieu géométrique quand on fait varier le cercle Δ. (*G. L.*)

37. — On considère une droite AB, et par deux points fixes A et B pris sur cette droite, on mène des cercles tangents à cette droite et tangents entre eux. A ces cercles, on mène une tangente commune extérieure; trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de cette tangente commune. (*G. L.*)

38. — On considère un cercle de centre O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD; soit Δ la tangente au point A et M un point quelconque de Δ, supposé mobile sur cette droite; de ce point M on peut mener au cercle proposé une seconde tangente MQ. Ayant projeté le point M en P sur le diamètre CD, on joint P au point de contact Q, et d'un point fixe S, pris dans l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur PQ. Démontrer que le lieu des pieds de ces perpendiculaires est un cercle. (*G. L.*)

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que la solution de chaque question doit être mise sur une feuille à part portant le numéro de la question, le nom de l'auteur de la solution, l'établissement auquel il appartient et l'énoncé complet de la question. Les figures, s'il y a lieu, doivent être faites à part, avec beaucoup de soin; enfin, nous prions nos correspondants de soigner la rédaction et l'écriture de leurs solutions.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 9320-2.

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. **Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 97.)

DES PROJECTIONS — PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES

Définition. — On appelle *projection* d'un point A sur un plan le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan, et *distance* du point A au plan la longueur A*a* de

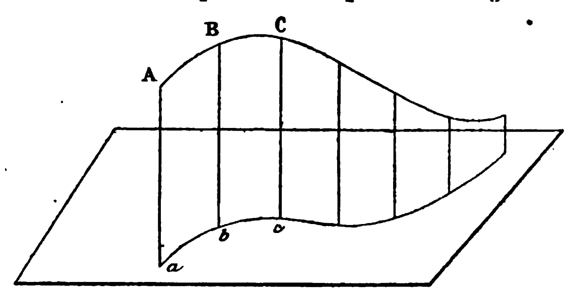


Fig. 18.

cette perpendiculaire. Cette distance est plus petite que toute longueur comptée à partir de A sur une droite quelconque limitée au plan.

On appelle *projection* d'une ligne quelconque ABC... sur un plan le lieu des projections *a, b, c*... des points de cette ligne *(fig. 18)*.

Théorème I. — *La projection d'une droite sur un plan est une droite.*

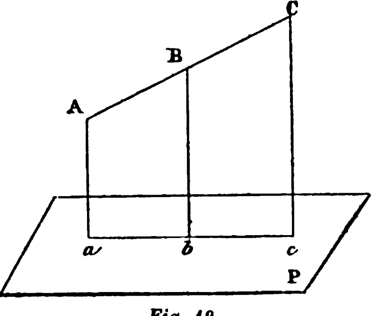


Fig. 19

Soient *a, b (fig. 19)* les projections de deux points A, B de la droite; menons la droite *ab*; si par C on mène la parallèle C*c* à B*b*, cette droite est située dans le plan des deux parallèles

A*a*, B*b* et est perpendiculaire au plan P comme parallèle à B*b*. Donc *c* est la projection de C.

Théorème II. — *Les projections des deux droites parallèles sur un même plan sont parallèles* (fig. 20).

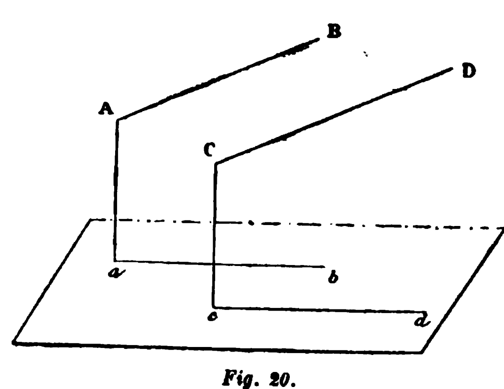


Fig. 20.

En effet, les angles BA*a*, DC*c* ayant leurs côtés parallèles, savoir AB et CD par hypothèse, et A*a*, B*b* comme perpendiculaires au même plan, ont leurs plans parallèles ; donc leurs intersections *ab*, *cd* avec un même plan sont parallèles.

La réciproque n'a pas lieu.

Théorème III. — *Si les projections de deux droites sur deux plans qui se coupent sont respectivement parallèles, ces deux droites sont parallèles* (fig. 21).

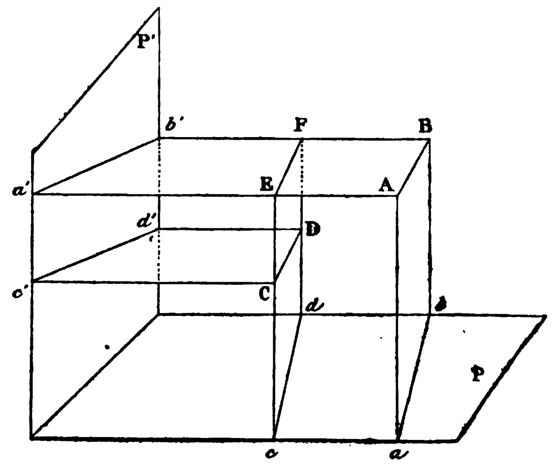


Fig. 21.

Soient *ab cd*, projections des deux droites AB, CD sur le plan P, parallèles entre elles, de même *a'b'*, *c'd'* parallèles; les deux angles *b'a'*A, *d'c'*C, ayant leurs côtés parallèles, ont leurs plans parallèles ; donc les droites d'intersection CD, EF de ces plans avec un troisième CD*dc* sont parallèles; on démontrerait de même que AB et EF sont parallèles : donc les deux droites AB, CB parallèles à une troisième EF sont parallèles entre elles.

Théorème IV — *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *sa projection* ab *sur un plan quelconque* Q *est perpendiculaire à l'intersection* CD *des deux plans* (fig 22).

En effet CD étant dans le plan P est perpendiculaire à AB; étant dans le plan Q, elle est aussi perpendiculaire à B*b*, projetante du point B; donc CD est perpendiculaire au plan AB*b* de ces deux droites, et par suite à la droite *ab* de ce plan.

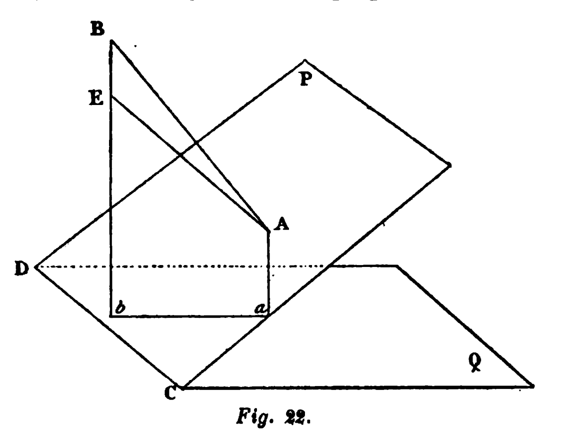


Fig. 22.

La réciproque n'a pas lieu, car toute droite telle que AE menée dans le plan AB*ba* a même projection *ab* que AB et ne saurait être perpendiculaire au plan P.

Théorème V. — *Si les projections d'une droite sur deux plans qui se coupent sont respectivement perpendiculaires aux intersections de ceux-ci avec un troisième plan, cette droite est perpendiculaire à ce troisième plan.*

Soit *ab*, projection de AB, perpendiculaire à CD, intersection du plan P avec le plan CDD' *(fig. 23)*, de même *a'b'* perpendiculaire à CD'; CD étant perpendiculaire sur *ab* par hypothèse et sur A*a* par construction, est perpendi-

culaire au plan Aab de ces deux droites, par conséquent sur AB qui est dans ce plan; ainsi AB est perpendiculaire sur CD; on démontrerait de même que AB est perpendiculaire à CD'; donc AB, perpendiculaire à deux droites CD, CD' d'un plan, est perpendiculaire à ce plan.

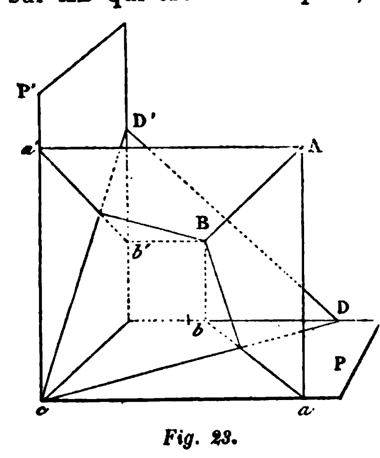


Fig. 23.

Théorème VI. — *Si une droite est oblique à un plan* P, *l'angle aigu qu'elle forme avec sa projection sur le plan est le plus petit des angles qu'elle fait avec toute autre droite passant par son pied dans le plan* (fig. 24).

En effet, soit Ba la projection de BA; prenons sur la droite quelconque BC, située dans le plan P, la longueur BC = Ba et menons AC; les deux triangles ABa, ABC ont deux côtés égaux et les troisièmes côtés inégaux; or la perpendiculaire Aa est moindre que l'oblique AC, donc l'angle ABa est moindre que l'angle ABC.

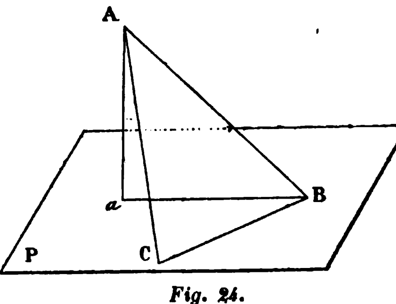


Fig. 24.

Définition. — Cet angle *minimum* que fait une droite avec sa projection sur un plan est appelé l'*angle de la droite et du plan.*

Théorème VII. — *La droite d'un plan qui fait le plus grand angle possible avec un second plan est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.*

Soit BC l'intersection de deux plans P et Q (*fig.* 25): menons dans le second plan AB perpendiculaire à l'intersection et une droite quelconque AC, puis la perpendiculaire Aa au plan P; aB est perpendiculaire sur BC, d'après le

corollaire du théorème des trois perpendiculaires; donc elle est moindre que l'oblique aC. Faisons tourner le triangle

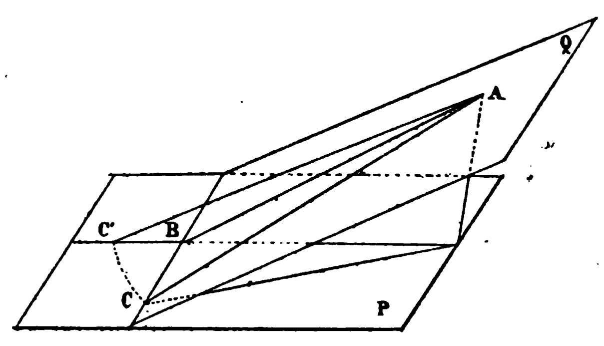


Fig. 25.

rectangle AaC autour de Aa pour l'amener dans le plan du triangle rectangle AaB; aC prendra la direction de aB et C viendra en un point C' situé au delà de B par rapport au point a, puisque $aC > aB$; or l'angle aBA extérieur au triangle ABC' est égal à la somme des deux angles BC'A, BAC'; donc l'angle a BAest supérieur à l'angle C' ou à son égal aCA.

Définition. — La droite AB perpendiculaire à BC, est appelée *ligne de plus grande pente du plan* Q *par rapport au plan* P.

Théorème VIII. — *Étant données deux droites* AB, CD *non situées dans le même plan, il existe une droite et une seule rencontrant chacune d'elles à angle droit et qui est la plus courte distance de ces deux droites* (fig. 26).

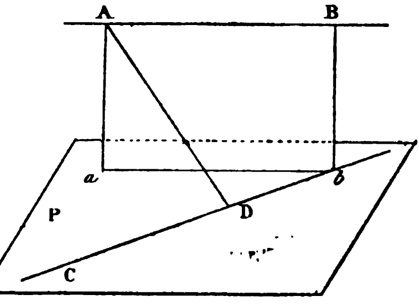


Fig. 26.

Par l'une des droites CD, menons le plan parallèle à AB; soit P ce plan; d'un point quelconque A de la première abais-

sons la perpendiculaire Aa sur ce plan et par a menons la parallèle ab à AB. Cette droite est située dans le plan P et rencontre CD en un point b, par lequel on mène la parallèle bB à aA. Cette droite bB, qui rencontre les deux premières, est en outre perpendiculaire à chacune d'elles, comme parallèle à aA perpendiculaire au plan P, par suite à CD et ab ou à sa parallèle AB. Toute autre droite AB rencontrant les deux premières ne peut être perpendiculaire au plan P, et par suite aux droites CD, AB, puisqu'elle est distincte de Bb ou de Aa; et d'autre part l'oblique AD est supérieure à Aa ou à son égale Bb.

Définition. — Cette droite Bb perpendiculaire à chacune des droites proposées, les rencontrant et qui est celle de longueur minima parmi toutes celles que l'on peut mener entre ces deux droites, est appelée la *perpendiculaire commune* aux deux droites, et sa longueur représente la plus courte distance des deux droites.

Corollaire. — *Lorsqu'une droite* AB *est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan* P *qui ne lui sont pas parallèles est constante et représentée par la distance* Aa *d'un point quelconque de cette droite au plan* P.

ANGLES DIÈDRES

Définitions.— On appelle *angle dièdre* la figure formée par deux plans limités à leur intersection OC; ces deux plans sont appelés les *faces* du dièdre et leur intersection OC *arête* de l'angle dièdre.

Pour désigner un dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; mais si plusieurs dièdres ont même arête, pour désigner chaque dièdre, on emploie au moins quatre lettres, savoir : une lettre pour chaque face et deux pour l'arête, en ayant soin d'énoncer ces dernières entre les deux autres.

On nomme *dièdres adjacents* deux angles dièdres tels que AOCD, BOCD qui ont même arête OC, une face commune COD et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune.

Deux dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre.

Théorème I. — *Par l'arête d'un dièdre, on peut mener un plan et un seul formant deux angles dièdres adjacents égaux* (fig. 27).

Soit le dièdre AOCB; imaginons un plan passant par l'arête OC qui, superposé d'abord à la face AOCA', tourne autour de OC dans le sens de la flèche jusqu'à ce qu'il se superpose à la face BOCB'; ce plan engendre ainsi deux séries de dièdres, tels que AOCD, BOCD; les dièdres de la première série vont constamment en croissant de zéro au

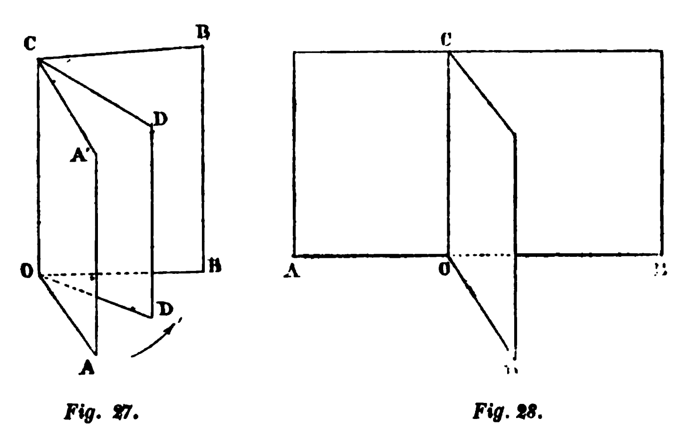


Fig. 27. *Fig. 28.*

dièdre AOCB, tandis que ceux de la seconde série vont constamment en décroissant du dièdre BOCA à zéro, par conséquent entre les mêmes limites; donc pour une certaine position de ce plan et une seule les deux dièdres adjacents formés avec les faces du premier sont égaux.

Définition. — Le plan qui, mené par l'arête d'un dièdre, divise celui-ci en deux autres égaux entre eux, est appelé *plan bissecteur* du dièdre.

Corollaire. — *Par une droite* OC *d'un plan on peut mener un plan et un seul formant deux angles dièdres adjacents* AOCD, BOCD *égaux* (fig. 28).

Définitions. — Un plan OCD est dit *perpendiculaire* sur

un autre ABC lorsque les deux angles adjacents AOCD, BOCD qu'il forme avec celui-ci sont égaux; si ces deux angles adjacents sont inégaux, les deux plans sont dits *obliques* l'un par rapport à l'autre.

On nomme *dièdre droit* tout dièdre AOCD dont une face est perpendiculaire sur l'autre. Un dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à un dièdre droit.

Deux dièdres dont la somme est un dièdre droit sont dits *complémentaires*, et deux dièdres dont la somme vaut deux dièdres droits sont dits *supplémentaires*.

Les théorèmes qui suivent, analogues à ceux de la géométrie plane, se démontrent de la même manière que ceux-ci.

Tous les angles dièdres droits sont égaux.

Tout plan qui en rencontre un autre forme avec celui-ci deux dièdres adjacents supplémentaires, et réciproquement, si deux dièdres adjacents sont supplémentaires, les faces non communes sont dans le prolongement l'une de l'autre.

Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux. Les plans bissecteurs de deux dièdres supplémentaires sont perpendiculaires entre eux.

Théorème II. — *Deux plans parallèles rencontrent un dièdre suivant des angles rectilignes égaux.*

En effet, ces angles rectilignes sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et de même sens, d'après ce théorème que les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.

Théorème III. — *L'angle déterminé par un plan perpendiculaire à l'arête d'un dièdre est le plus grand parmi tous angles rectilignes déterminés par les plans sécants rencontrant les deux faces du dièdre du même côté par rapport à ce plan perpendiculaire à l'arête.*

On distingue deux cas, suivant que le plan perpendiculaire à l'arête détermine un angle obtus ou aigu.

1° Soit aOb l'angle obtus déterminé dans le dièdre CO *(fig. 29)* par un plan perpendiculaire à l'arête, et AOB celui

déterminé par un plan quelconque tel que les deux intersections OA, OB soient situées du même côté par rapport au plan *aob*. Menons par un point quelconque A de OA le plan parallèle à *aob*, qui rencontre le côté OB en B, et menons les perpendiculaires A*a*, B*b* sur O*a*, O*b*; enfin de O abaissons la perpendiculaire O*d* sur *ab*, son pied *d* est nécessairement situé entre *a* et *b*, puisque l'angle *aob* est obtus; par *d* menons la parallèle *d*D à O*c*; *ab*, étant perpendiculaire à O*d* et *d*D (comme perpendiculaire à Oc), est perpendiculaire au plan de ces deux droites et par suite à OD, située dans ce plan; donc AB, parallèle à *ab*, est perpendiculaire à OD; or l'oblique OD par rapport à D*d* est supérieure à la perpendiculaire O*d*; alors si l'on transporte le triangle AOB dans le plan du triangle *aob*, de manière que les bases AB, *ab* coïncident, D s'appliquera sur *d* et le sommet O du triangle AOB sera l'extérieur du triangle *aob*; donc l'angle *aob* est supérieur à l'angle AOB.

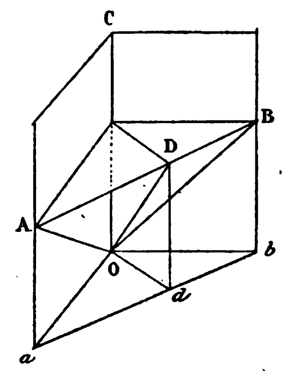


Fig. 29.

2° L'angle *a*O*b* est aigu; la démonstration précédente s'applique, si le pied de la perpendiculaire menée de O sur *ab* est entre *a* et *b*. S'il en est autrement, prenons OA = OB (*fig. 30*) et menons les parallèles A*a*, B*b*, jusqu'à leur rencontre avec le plan de l'angle *a*O*b* perpendiculaire à l'arête OC, l'angle OAS étant obtus, puisque le triangle AOB est isoscèle, on a

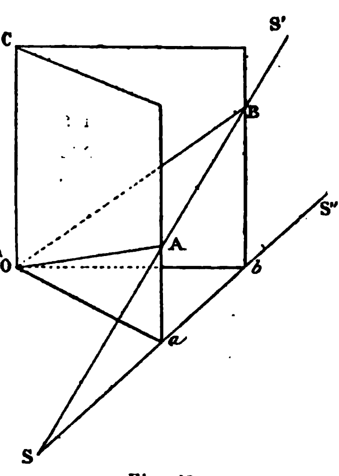


Fig. 30.

$$OAS < OaS \text{ ou } 90^\circ + \frac{AOB}{2} < 180^\circ - Oab,$$

de même

$$OBS' < ObS'' \text{ ou } 90^\circ + \frac{AOB}{2} < 180^\circ - Oba;$$

ajoutant, on a $\quad 180^\circ + AOB < 180^\circ + 180^\circ - (Oab + Oba)$

ou $\quad AOB < aOb.$

Remarques. — 1° Si AB était parallèle à ab, le pied de la perpendiculaire menée de O sur ab serait au milieu de cette droite; par conséquent d'après le premier cas, la propriété a encore lieu.

2° Le théorème a encore lieu, si OA coïncide avec Oa.

Corollaire. — *Si l'on mène un plan sécant de façon que les deux droites d'intersection avec les faces du dièdre soient de part et d'autre du plan* aOb, *l'angle ainsi déterminé est supérieur à l'angle* aOb.

Définition. — L'angle *maximum* déterminé dans un dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête parmi tous ceux déterminés par des plans sécants remplissant la condition indiquée par le théorème III, est appelé l'*angle plan correspondant au dièdre.* On sait d'ailleurs, d'après le théorème II, que la grandeur de cet angle est constante, quelle que soit la position du plan sécant, perpendiculaire à l'arête.

Pour construire cet angle plan, il suffit évidemment d'élever dans chacune des faces du dièdre, par un point quelconque O de son arête, les perpendiculaires à cette arête.

Théorème IV. — *Si deux dièdres sont égaux, leurs angles plans correspondants sont égaux, et réciproquement, si les angles plans correspondants à deux dièdres sont égaux, ceux-ci sont égaux.*

Théorème V. — *Le rapport de deux dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Soient D, D' deux dièdres; α, α' les angles plans correspondants; d'après le dernier théorème, on a l'égalité de rapports

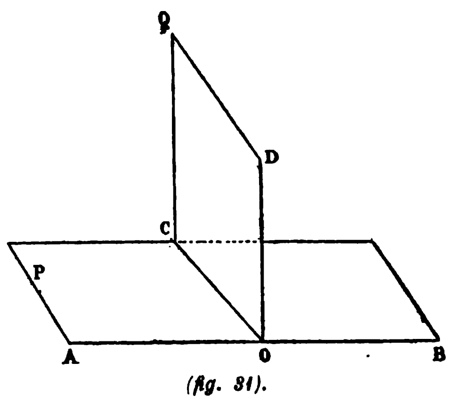
$$\frac{D}{D'} = \frac{\alpha}{\alpha'},$$

c'est-à-dire que si l'on prend pour unité d'angle dièdre le second dièdre D' et pour unité d'angle plan, l'angle α' correspondant à ce dièdre, le *nombre* $\frac{D}{D'}$ qui mesure le premier dièdre, est *le même* que le nombre $\frac{\alpha}{\alpha'}$ mesurant son angle plan correspondant; d'où le corollaire suivant servant à mesurer les dièdres :

Tout dièdre a même mesure que l'angle plan correspondant, en prenant pour unité d'angle dièdre celui auquel correspond l'angle plan choisi pour unité d'angle plan; ce qu'on énonce souvent ainsi d'une manière abrégée, mais incorrecte : *Tout dièdre a pour mesure son angle plan.*

On a pris pour unité d'angle plan l'angle droit, le dièdre correspondant est pris pour unité de dièdre, et est appelé *dièdre droit* d'après le théorème suivant, qui établit que la construction du dièdre formé par deux plans perpendiculaires entre eux donne lieu identiquement à la même figure que celle du dièdre déterminé par la condition que son angle plan correspondant soit droit.

Théorème VI. — *Le dièdre formé par deux plans perpendiculaires entre eux a son angle plan correspondant droit, et* RÉCIPROQUEMENT *si un dièdre a son angle plan correspondant droit, ses deux faces sont perpendiculaires entre elles.*



(*fig. 31*).

En effet, si les deux plans P et Q (*fig. 31*) sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire si les deux dièdres adjacents AOCD, BOCD sont égaux, les angles plans correspondants AOD, BOD, déterminés par le plan ABD perpendiculaire à l'arête OC, sont aussi égaux; or ces deux angles adjacents égaux ont leurs côtés non com-

muns OA, OB en ligne droite; donc ils sont droits, donc les deux dièdres correspondants sont droits.

RÉCIPROQUEMENT, soit le dièdre AOCD dont l'angle plan correspondant AOD est droit, prolongeons la face AOC au delà de l'arête, on formera un nouveau dièdre BOCD également droit; or, ces deux dièdres égaux sont adjacents et leurs faces non communes sont le prolongement l'une de l'autre; donc la face commune OCD est perpendiculaire au plan ABC.

Théorème VII. — *Si deux plans sont perpendiculaire entre eux, toute droite menée dans l'un perpendiculaire à leur intersection, est perpendiculaire à l'autre plan.*

Théorème VIII. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan qui passe par cette droite ou qui lui est parallèle, est perpendiculaire au premier, et* RÉCIPROQUEMENT *si deux plans sont perpendiculaires entre eux, toute droite perpendiculaire au premier est située dans l'autre ou lui est parallèle.*

Théorème IX. — *L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à ce troisième.*

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

Étant donnée la fraction du second degré

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + b},$$

dans laquelle a *et* b *sont supposés connus, on demande de déterminer* p *et* p' *de telle façon que cette fraction devienne maxima pour* $x = \alpha$, *et minima pour* $x = \beta$.

On sait que la recherche du maximum et du minimum de la fraction du second degré revient à la détermination des valeurs qu'il faut donner à l'indéterminée y dans l'équation

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + b} = y \qquad (1)$$

pour que cette équation ait deux racines égales; lorsque ces valeurs de y sont déterminées, on obtient les valeurs

de x correspondantes, par l'équation

$$x = -\frac{p - p'y}{2(1-y)},$$

dans laquelle on remplace y par l'une des valeurs précédemment trouvées.

Inversement, de l'équation que nous venons d'écrire, nous pouvons déduire pour y la valeur

$$y = \frac{2x + p}{2x + p'}. \qquad (2)$$

et, si nous remplaçons dans l'équation (1), ou dans l'équation (2), x par la valeur qui donne à la fraction ses valeurs limites, nous devons trouver pour y deux nombres égaux ; donc les valeurs de x qui font passer la fraction par un maximum ou un minimum sont les racines de l'équation obtenue en égalant les deux valeurs de y précédemment écrites, c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + b} = \frac{2x + p}{2x + p'} \qquad (3)$$

ou $\qquad x^2(p - p') + 2x(a - b) + ap' - bp = 0. \qquad (4)$

D'après l'énoncé, cette équation doit avoir pour racines α et β ; nous aurons donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{2(b-a)}{p-p'} &= \alpha + \beta; \\ \frac{ap' - bp}{p - p'} &= \alpha\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ces deux équations nous détermineront p et p'.

La seconde devient $\quad p'(a + \alpha\beta) = p(b + \alpha\beta)$,

ce qui donne $\quad \dfrac{p}{a + \alpha\beta} = \dfrac{p'}{b + \alpha\beta} = \dfrac{p - p'}{a - b}.$

Donc, en vertu de la première de ces équations, nous avon

$$p = \frac{-2(a + \alpha\beta)}{\alpha + \beta};$$

$$p' = \frac{-2(b + \alpha\beta)}{\alpha + \beta}.$$

Exemple. — Soit la fraction

$$\frac{x^2 + px + 5}{x^2 + p'x + 3};$$

cherchons les valeurs à donner à p et p' pour que les valeurs limites correspondent, l'une à $x = 2$, l'autre à $x = -3$; on trouve $\alpha + \beta = -1$; $\alpha\beta = -6$ et par suite $p = -2$; $p' = -6$;

la fraction est donc $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 6x + 3}$;

il est facile de vérifier que, effectivement, ses valeurs limites correspondent bien aux valeurs de x indiquées dans l'énoncé.

Dans le calcul précédent, nous avons admis que b était différent de a. Si nous examinons l'hypothèse de $a = b$, l'équation qui détermine x devient

$$(x^2 - a)(p - p') = 0.$$

Si alors les valeurs données pour x ne sont pas les racines de l'équation $x^2 - a = 0$, nous trouvons forcément $p = p'$; dans ce cas, la fraction devient

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + px + a},$$

et, comme elle a pour valeur l'unité, quel que soit x, nous n'avons donc pas une fonction véritable.

Si les valeurs correspondant aux limites sont précisément $+\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, nous trouvons pour p et p' des valeurs indéterminées; en effet, considérons la fraction

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + a} = y,$$

les valeurs du maximum et du minimum sont données par les racines de l'équation

$$(p - p'y)^2 - 4a(1 - y)^2 = 0;$$

la valeur correspondante de x est

$$x = -\frac{(p - p'y)}{2(1 - y)} = \pm\sqrt{a},$$

et cela, quels que soient p et p'. On comprend donc bien comment les formules que nous avons obtenues nous donnent des valeurs indéterminées pour ces deux inconnues.

Étant donnée la fraction

$$\frac{x^2 + px + q}{x^2 + p'x + q'};$$

déterminer p, q, p′, q′ *de façon que pour* x = α *la fraction prenne la valeur maxima* α′, *et que pour* x = β *elle prenne la valeur minima* β′.

Nous avons, comme précédemment, entre les coefficients, les deux équations $$\frac{2(q'-q)}{p-p'} = \alpha+\beta,$$
$$\frac{qp'-pq'}{p-p'} = \alpha\beta;$$
de plus, la valeur limite y correspondant à $x = \alpha$ devant être α', nous avons $\alpha' = \frac{2\alpha+p}{2\alpha+p'}$,

et de même $$\beta' = \frac{2\beta+p}{2\beta+p'}.$$

Ces deux dernières équations donneront facilement p et p'; en chassant les dénominateurs, nous obtenons en effet les deux équations très simples
$$p - p'\alpha' = 2\alpha(\alpha'-1),$$
$$p - p'\beta' = 2\beta(\beta'-1); \qquad (6)$$
lorsque p et p' sont ainsi déterminées, nous pourrons très facilement obtenir q et q'; en effet, en divisant membre à membre les deux premières relations, nous avons l'équation homogène $$\frac{2(q'-q)}{qp'-pq'} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta};$$
cette relation donne facilement
$$\frac{q}{2\alpha\beta+p'(\alpha+\beta)} = \frac{q'}{2\alpha\beta+p'(\alpha+\beta)} = \frac{q'-q}{(p'-p)(\alpha+\beta)} = -\frac{1}{2}$$
donc
$$q = -\frac{2\alpha\beta+p(\alpha+\beta)}{2}; \quad q' = -\frac{2\alpha\beta+p'(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (7)$$

Exemple. — Proposons-nous de déterminer les coefficients de la fraction $$\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$$
de façon que pour $x = 3$ elle atteigne un maximum 4, et que pour $x = 1$ elle atteigne un minimum 5; nous aurons ici $$\alpha = 3, \quad \alpha' = 4;$$
$$\beta = 1, \quad \beta' = 5;$$
et les équations (6) deviennent

$$p - 4p' = 18.$$
$$p - 5p' = 8;$$

nous en tirons facilement

$$p' = 10, \quad p = 58;$$

puis, les équations (7) nous donnent, tout calcul fait,

$$q = -119; \quad q' = -23,$$

et la fraction cherchée est

$$\frac{x^2 + 58x - 119}{x^2 + 10x - 23};$$

il sera facile de reconnaître que d'abord les valeurs x' et y' sont bien égales, respectivement à 4 et à 5, et que les valeurs correspondantes de x sont 3 et 1 ; la fraction répond donc bien à l'énoncé.

QUESTION 10

Construire un triangle dont on connaît la base, un angle à la base, et la somme du côté opposé et de la hauteur du triangle.

(Hallowell.)

Supposons le problème résolu ; soit ABC le triangle demandé, dans lequel nous connaissons la base BC, l'angle en B, et la somme de la hauteur AD du côté CA et opposé à l'angle B.

Prolongeons DA, au delà du point A, d'une longueur AE égale à AC ; alors DE est égal à la somme donnée. Par le point E, menons EF parallèle à BC, jusqu'au point F où EF rencontre BA.

Les triangles semblables AEF, ABD, donnent

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD},$$

et par suite

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{ED}.$$

Joignons le point F au point C, et par le point B menons BH parallèle à AC jusqu'à la rencontre en H avec FC ; les triangles semblables FAC, FBH donnent

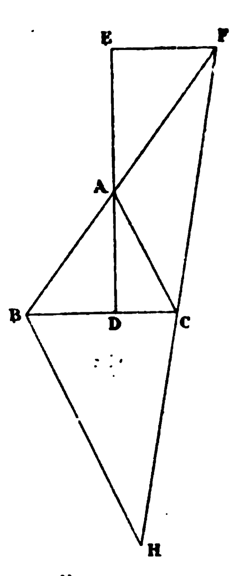
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BH};$$

donc
$$\frac{AC}{BH} = \frac{AE}{ED},$$

et comme AC = AE, il en résulte que BH = ED.

Nous en déduisons la construction suivante :

Nous menons une parallèle EF à BC, distante de BC d'une longueur égale à la somme donnée de la hauteur et du côté AC, jusqu'au point F où elle rencontre le côté BA, connu de direction. Nous joignons le point F au point C; de B comme centre avec un rayon égal à la somme donnée, nous décrivons un arc de cercle qui rencontre FC en un point H; par le point C nous menons une parallèle à BH; cette parallèle rencontre BF au point A; le triangle ABC est le triangle demandé.



Si, au lieu de la somme, on avait la différence, il suffirait de prendre la longueur AE au-dessus du point A; on continuerait la construction de la même manière.

NOTA. — La question a été résolue par MM. Paul Godefroy, à Lyon; Pigeaud, à Châteauroux.

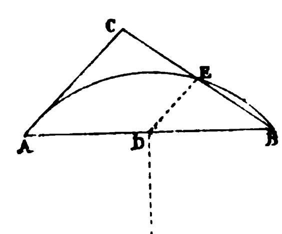
QUESTION 11

Solution par M. G. PIGEAUD, élève au Lycée de Châteauroux.

Construire géométriquement un triangle, connaissant un angle, l'un des côtés adjacents et l'angle que fait le côté opposé à l'angle donné avec la médiane.

Soit AB le côté donné. En A faisons un angle égal à l'angle donné du triangle. L'angle de la médiane et du

troisième côté ayant pour extrémités A et B, a son sommet sur le segment capable de cet angle décrit sur AB comme corde.



D'autre part, cet angle se trouve sur la parallèle à AC menée par le milieu D de AB. Il est en E. Joignant BE et prolongeant, on a en ABC le triangle cherché.

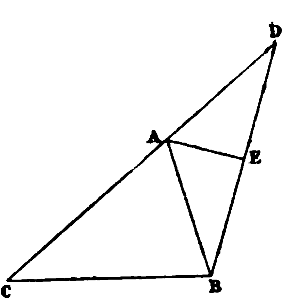
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Sarrazin, intitution Sainte-Marie, Besançon; Paul et René Godefroy, à Lyon; Deville, canonnier au régiment d'artillerie de marine à Lorient; G. Berthelot, au lycée de Châteauroux; Puig, au lycée de Montpellier; Masserand, Broutin, pensionnat de Passy. Vail, Lenoir, école Albert-le-Grand (Arcueil).

QUESTION 12

Solution par DEROME, élève au lycée de Valenciennes.

Construire un triangle dont on connaît la base, la différence des angles à la base et la somme des deux autres côtés.

Soit ABC le triangle cherché, BC la base, $B - C = \alpha$ la différence des angles à la base.



Prolongeons AC d'une longueur $AD = AB$; alors CD représente la somme des côtés AB et AC.

Le triangle ABD étant isoscèle, $ABD = ADB$. Or

$$A + B + C = 180^o$$

et $B - C = \alpha$; on en déduit

$$B + \frac{A}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2};$$

et comme CAB est extérieur au triangle ABD, on a

$$\frac{A}{2} = ABD.$$

Donc $$CBD = B + ABD = 90^o + \frac{\alpha}{2}.$$

De là la construction suivante : sur la base donnée, en B faire un angle égal à $1^d + \frac{\alpha}{2}$; de C comme centre avec la somme donnée décrire un arc de cercle qui coupera BD en D, et sur le milieu E de BD élever une perpendiculaire qui rencontre CD en A. ABC est le triangle cherché.

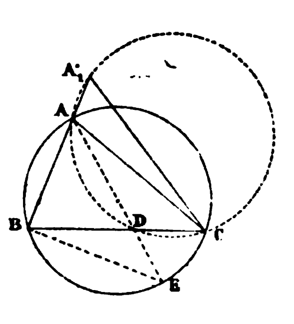
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Patrice Mahon ; Puig, au Lycée de Montpellier.

QUESTION 13

Solution par MM. Paul et René Godefroy, élèves au Lycée de Lyon.

Construire géométriquement un triangle connaissant la base, un angle à la base et le point de la base par lequel passe le diamètre du cercle circonscrit.

Soit ABC le triangle cherché, AE le diamètre du cercle circonscrit passant par le point donné D, BC la base donnée, B l'angle à la base également donné. Joignons BE. L'angle EBC est égal à l'angle CAD comme ayant même mesure, et cet angle étant complémentaire de l'angle donné est connu. Donc le sommet A se trouvera à l'intersection de la droite BA et du segment capable de 90 — B décrit sur CD comme corde.



Ce segment coupera généralement BA en deux points A et A' qui répondront à la question.

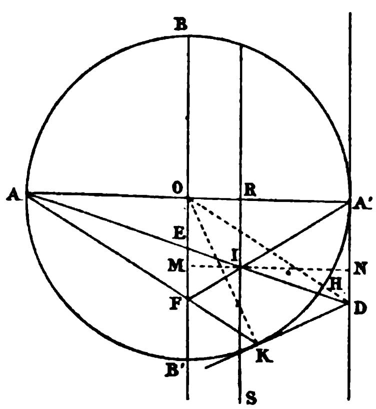
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Derome au lycée de Valenciennes ; Lenoir, Vail, école d'Arcueil.

QUESTION 17

Solution par M. L. Germain, élève au Collège ecclésiastique de Belley.

On considère un cercle Δ *et deux diamètres rectangulaires* AA′, BB′; *par le point* A, *on mène une transversale* δ, *qui rencontre la tangente en* A′ *au point* D, *et le diamètre* BB′ *au point* E. *Par le point* D *on peut mener au cercle une seconde tangente* DK, *touchant le cercle au point* K; *la droite* AK *rencontre* BB′ *en un point* F. *Trouver le lieu de l'intersection de* δ *et de* A′F *quand* δ *tourne autour de* A. (G. L.)

Soit I le point d'intersection. Je joins OD, OK; la droite OD bissectrice de l'angle A′OK divise l'arc A′K en deux parties A′H, HK égales; les triangles rectangles OA′D, AOF sont donc égaux, puisque AO = OA′ et que l'angle A′OD, qui a pour mesure A′H, égale l'angle OAF. qui a pour mesure la moitié de l'arc A′K; donc OF = A′D.



Mais les triangles semblables AOE, AA′D donnent

$$\frac{OE}{A'D} = \frac{AO}{AA'} = \frac{1}{2}, \text{ donc } EF = OE = \frac{A'D}{2}.$$

Les triangles semblables EIF, DIA′ donnent aussi

$$\frac{IM}{IN} = \frac{DF}{A'D} = \frac{1}{2}.$$

Le point I est donc à une distance du diamètre BB′ égale au tiers du rayon du cercle Δ.

Donc le lieu géométrique des points I est une droite RS,

menée parallèlement à BB′ et à une distance de ce diamètre égale au tiers du rayon du cercle.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Puig, à Montpellier; Deville, à Lorient; Chaillot, à Nantes;

QUESTION 19

Solution par M. PUIG, élève au Lycée de Montpellier.

On considère un cercle de centre O *et un diamètre* AA′; *soit* M *un point mobile sur la circonférence; on fait passer par* MOA *un cercle* Δ, *et par* MOA′ *un cercle* Δ′.

Démontrer :

1° *Que ces cercles se coupent orthogonalement;*

2° *Que* r, r′ *étant leurs rayons,* R *le rayon du cercle donné, on a*

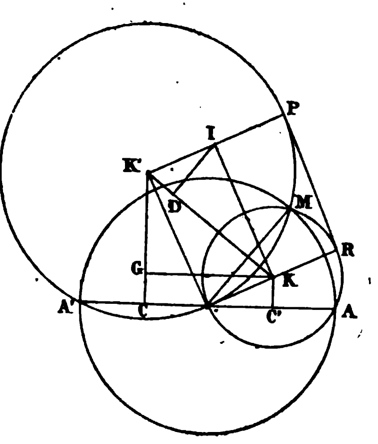
$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{4}{R^2};$$

3° *Que la projection de la tangente commune sur la ligne des centres a une longueur constante et égale à* R.

Soient K, K′ les centres des deux cercles MOA, MOA′.

1° Il faut prouver que l'angle K′MK est droit :

L'angle K′OK est droit comme formé par deux droites OK′, OK, bissectrices de deux angles supplémentaires. Or, les deux triangles MK′K, OK′K sont égaux comme ayant les trois côtés égaux; donc l'angle K′MK, égal à l'angle KOK′, est droit; et les deux cercles se coupent orthogonalement.



2°
$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{4}{R^2}:$$

Le triangle KMK′ étant rectangle, on a

$$r^2 + r'^2 = KK'^2.$$

Menons KG parallèle au diamètre AA′ :

Le triangle rectangle KGK′ donne

$$KK'^2 = KG^2 + K'G^2.$$

Or $$KG = OC' + OC = R\ ;$$

$$K'G = K'C' - KC = \sqrt{r'^2 - \frac{R^2}{4}} - \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}\ ;$$

donc on aura

$$r^2 + r'^2 + r'^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} + r^2 - \frac{R^2}{4} - 2\sqrt{\left(r'^2 - \frac{R^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{R^2}{4}\right)}\ :$$

d'où on a $$\frac{R^2}{2} = 2\sqrt{\left(r'^2 - \frac{R^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{R^2}{4}\right)},$$

et en élevant au carré

$$\frac{R^4}{4} = 4\left(r'^2 r^2 - \frac{R^2}{4}(r^2 + r'^2) + \frac{R^4}{16}\right]$$

ou $$4r'^2 r^2 = R^2(r^2 + r'^2)$$

et en divisant les deux membres par $R^2 r^2 r'^2$, on a

$$\frac{4}{R^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

3° Soit PR la tangente commune aux deux circonférences; sa projection sur la ligne des centres KK′ est KD.

Le triangle rectangle KIK′ donne

$$KD = \frac{KI^2}{KK'} = \frac{KK'^2 - K'I^2}{KK'} = \frac{r^2 + r'^2 - (r - r')^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{2rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

En élevant les deux membres de cette égalité au carré,

on aura $$KD^2 = \frac{4r^2 r'^2}{r^2 + r'^2}$$

ou $$\frac{4}{KD^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

Si on compare cette égalité à l'égalité

$$\frac{4}{R^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}$$

on voit que $$\frac{4}{KD^2} = \frac{4}{R^2}$$

ou $$KD = R.$$

Donc la projection de la tangente commune aux deux circonférences est constante et égale à R.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Depierres, à Pontarlier; Deville, à Lorient; Pigeaud, à Châteauroux; Vazon, au collège Rollin, Chaillot, à Nantes.

QUESTION 28

Solution par M. JACQUEMET, École d'Arcueil.

Déterminer x *et* y *d'après les équations*

$$x(1 + \sin^2\theta - \cos\theta) - y\sin\theta(1 + \cos\theta) = c(1 + \cos\theta)$$

$$y(1 + \cos^2\theta) - x\sin\theta\cos\theta = c\sin\theta$$

et éliminer θ *entre ces deux équations.* (Wolstenholme.)

La seconde équation donne

$$x = \frac{y(1 + \cos^2\theta) - c\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}. \qquad (A)$$

Substituant dans la première et réduisant, il vient

$$y(1 - \cos\theta) = c\sin\theta,$$

d'où

$$y = \frac{c\sin\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Portant cette valeur de y dans la relation (A) on a après réductions

$$x = c\,\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \cot^2\frac{\theta}{2}$$

et que

$$\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2},$$

on a

$$x = c\cot^2\frac{\theta}{2}$$

$$y = c\cot\frac{\theta}{2};$$

il suit de là que $y^2 - cx = 0$.

NOTA. — A résolu la même question : M. Varnier, élève au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

39. — On donne deux droites rectangulaires OA, OB, et deux autres droites Δ, Δ', parallèles à OA. Soit M un point pris sur Δ, et supposé mobile sur cette droite ; élevons au point M, à OM, une perpendiculaire qui rencontre OA au point A ; joignons celui-ci au point C, point de rencontre de Δ' et de OM, et sur cette droite AC abaissons de O une perpendiculaire OI. Démontrer que le lieu du point I est une circonférence. (G. L.)

40. — Trouver le lieu des points tels que si de ces points on mène des tangentes à une parabole, elles forment avec une droite fixe un triangle isoscèle. (G. L.)

41. — On considère une parabole P, et par un point M, pris sur cette courbe, on mène une normale qui rencontre l'axe au point Q. Sur MQ comme diamètre, on décrit un cercle C, et l'on demande le lieu géométrique décrit par le point de concours de la normale MQ avec la polaire du sommet de la parabole par rapport à C. (G. L.)

42. — On considère une parabole P; d'un point M, mobile sur cette courbe, on abaisse une perpendiculaire MA sur son axe. O étant le sommet de la courbe, on imagine une ellipse ayant pour axes, en grandeur et en position, OA et MA. Trouver le lieu des foyers de cette ellipse. (G. L.)

43. — Trouver le maximum du produit $x^m y^n$, sachant que les variables positives x et y sont liées par la relation

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'} = K.$$

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 13734-2.

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. **Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite et fin*, voir p. 121.)

ANGLES POLYÈDRES

Définitions. — On appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans passant par un même point S et limités à leurs intersections successives SA, SB, ... (*fig. 32*). Le point S est le *sommet*, les droites SA, SB, ... sont les *arêtes*, les angles ASB, BSC, ... formés par deux arêtes consécutives, sont appelées *faces* et les plans de deux faces consécutives forment les *dièdres de l'angle polyèdre*. — Le plus simple des angles polyèdres est celui formé par trois plans ; on l'appelle *angle trièdre*. Un trièdre est dit *rectangle*, *birectangle* ou *trirectangle* selon qu'il a un, deux ou trois dièdres droits.

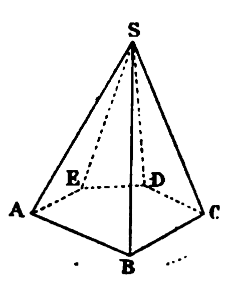


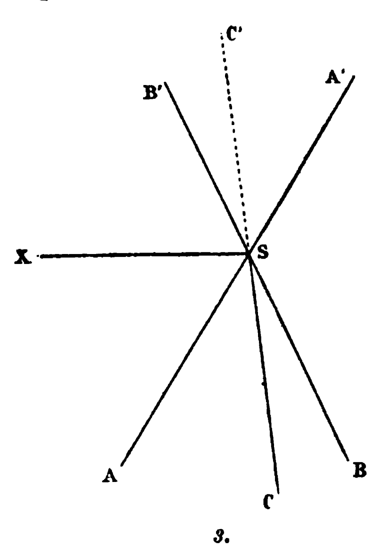
Fig. 32.

On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté du plan indéfini de l'une quelconque de ses faces ; il est *concave* dans le cas contraire. — Dans tout ce qui suit, il ne sera question que d'angles polyèdres convexes.

La section d'un angle polyèdre convexe par un plan rencontrant toutes les arêtes d'un même côté du sommet est un polygone convexe.

Si l'on prolonge au delà du sommet toutes les arêtes d'un angle polyèdre, on forme un second angle polyèdre, appelé *symétrique* du premier, dont les faces sont égales à celles du premier, et les dièdres égaux à ceux du premier, comme opposés par l'arête ; mais ces deux angles polyèdres ne sont pas superposables. Pour le montrer, il suffit de considérer deux trièdres symétriques (*fig. 33*).

Pour fixer les idées, supposons la face ASB située dans le plan du tableau et l'arête SC en avant, son prolongement SC′ sera en arrière. Si les deux trièdres étaient superposables, nécessairement les deux faces égales ASB, A′SB′ coïncideront; or il n'y a que deux moyens de superposer deux angles plans égaux, soit en mettant SA sur SA′ et SB sur SB′, soit SA sur SB′ et SB sur SA′.



3.

Dans le premier cas, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de la perpendiculaire menée par S au plan de la face ASB; A′SB′ coïncidera avec ASC, mais l'arête SC′ qui fait un angle *obtus* avec la partie antérieure de l'axe de rotation ne peut coïncider avec SC, qui fait nécessairement un angle *aigu* avec cette même partie de l'axe.

Dans le second cas, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de la bissectrice SX de l'angle B′SA, l'angle B′SA′ coïncidera avec son égal ASB ; mais l'arête SC′ qui fait, par exemple, un angle obtus avec la portion SX de l'axe ne pourra coïncider avec SC qui fait au contraire avec SX un angle aigu.

Remarque. — La superposition aurait lieu si le trièdre avait deux dièdres égaux ; car, dans le second mode de rotation, le dièdre SB′ étant égal au dièdre SB, si on suppose ce dernier égal au dièdre SA, la face C′SB′ viendra dans le plan de la face ASC, par conséquent SC′ sera quelque part dans la face ASC par la même raison, elle sera aussi dans la face BSC; donc SC′ sera à leur intersection, c'est-à-dire sur SC.

Si on appelle *trièdre isoscèle* tout trièdre qui possède deux dièdres égaux, la remarque précédente démontre le théorème suivant :

Dans tout trièdre isoscèle, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.

Car dans la superposition précédente, on voit que l'on a

$$B'SC' = ASC\,;$$

or $$B'SC' = BSC,$$

donc $$ASC = BSC.$$

Réciproquement. — *Si dans un trièdre, deux faces sont égales, celui-ci est isoscèle.*

Soit ASC = BSC, plaçons le trièdre SA'B'C' de façon que la face B'SC' coïncide avec son égale ASC, les dièdres SC',SC étant égaux, le plan A'SC' coïncide avec BSC, et dans ces plans SA' avec SB, puisque A'SC' = ASC = BSC ; donc les deux trièdres coïncident ; SB' étant sur SA, ce dièdre SA est égal au dièdre SB.

Théorème I. — *Dans tout trièdre, la somme des trois dièdres est comprise entre six droits et deux droits.*

La première partie est évidente, puisque chaque dièdre est inférieur à deux droits.

Sur les trois arêtes prenons les longueurs SA, SB, SC, égales entre elles (*fig. 34*) et joignons AB, BC, CA ; les angles SAB, SAC sont nécessairement aigus, les triangles ASB, ASC étant isoscèles ; par conséquent le plan mené par A perpendiculairement à l'arête SA laisse du même côté les deux droites AB, AC ; donc l'angle dièdre A est supérieur à l'angle BAC (th. III, dièdres). Comme il en est de même pour les deux autres dièdres, la somme des trois dièdres est supérieure à la somme des angles du triangle ABC, c'est-à-dire à deux droits.

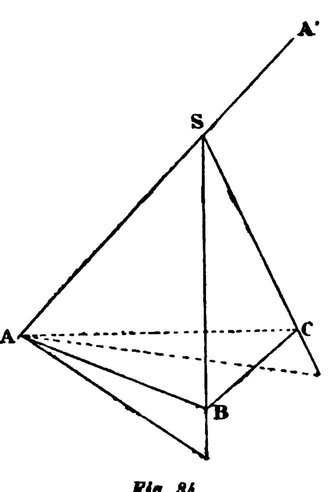


Fig. 34.

Théorème II. — *Dans tout trièdre, chaque dièdre augmenté*

de deux droits donne une somme supérieure à celle des deux autres.

Considérons le trièdre SA'BC dont l'arête SA' est le prolongement de l'arête SA du trièdre SABC ; par conséquent les deux dièdres SA, SA' de ces trièdres sont égaux ; d'après le théorème précédent appliqué au trièdre SA'BC on a

$$\text{dièdre SA'} + \text{A'SBC} + \text{A'SCB} > 2 \text{ dr}$$

ou $$\text{dièdre SA} + 2 \text{ dr} - \text{ASBC} + 2 \text{ dr} - \text{ASCB} > 2 \text{ dr}$$

et par transposition SA + 2 dr + ASBC + ASCB.

Théorème III. — *Dans tout angle polyèdre, la somme des dièdres est supérieure à autant de fois deux droits qu'il y a de faces moins deux.*

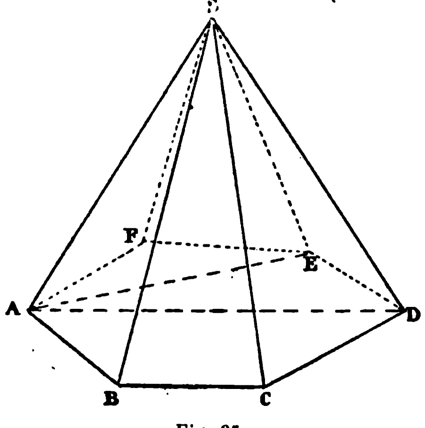


Fig. 35.

Menons le plan ABCD (*fig.* 35) rencontrant toutes les arêtes d'un même côté du sommet, et par l'arête SA et chacune des arêtes non situées dans les faces adjacentes menons des plans qui décomposent l'angle polyèdre en $n - 2$ trièdres, si l'angle polyèdre possède n faces ; or si on considère ces trièdres, on a les $n - 2$ inégalités

$$\text{CSAB} + \text{ASBC} + \text{BSCA} > 2 \text{ dr}$$
$$\text{DSAC} + \text{ASCD} + \text{CSDA} > 2 \text{ dr}$$

. . . .

. . . .

ajoutant on a :

Somme des dièdres de l'angle polyèdre > 2 dr (n — 2)

Théorème IV. — *Dans tout trièdre la somme des trois faces est inférieure à quatre droits.*

Prenons SA = SB = SC (*fig.* 36) et soit O le point de concours des perpendiculaires menées par les milieux α, β, γ

des côtés du triangle ABC sur ces côtés ; les droites Sα, Sβ, Sγ sont respectivement perpendiculaires à BC, AC, BA, car SO est perpendiculaire au plan ABC (th. V, dr. et plans perp.). Les triangles BCO, BCS ayant même base BC et la hauteur αO étant inférieure à αS, oblique par rapport à OS, on a

BSC < BOC

de même CSA < COA

ASB < AOB

ajoutant membre à membre ces inégalités, on voit que la somme des trois faces est inférieure à la somme des angles formés autour du point O, c'est-à-dire à quatre droits.

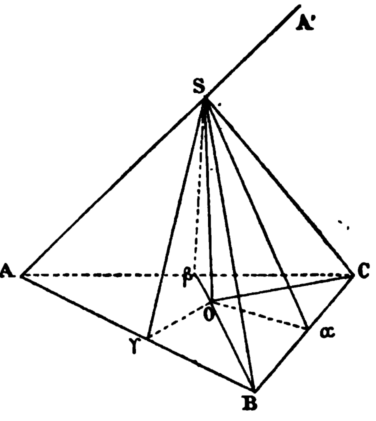


Fig. 36.

Si le point O était à l'extérieur, la même inégalité a lieu *à fortiori*, puisque la somme des deux angles AOB, BOC est représentée par le troisième AOC, qui est évidemment inférieur à deux droits.

Théorème V. — *Dans tout trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des deux autres.*

Soit SA′ le prolongement de AS, d'après le théorème précédent appliqué au trièdre SA′BC on a

$$A'SB + A'SC + BSC < 4^{dr};$$

or

$$2^d = A'SB + ASB,$$
$$2^d = A'SC + ASC.$$

ajoutant cette inégalité et ces égalités membre à membre, on a, après réductions : BSC < ASB + ASC.

Théorème VI. — *La somme des faces d'un angle polyèdre est moindre que quatre droits.*

Menons le plan ABC (*fig. 35*) rencontrant toutes les arêtes d'un même côté du sommet ; si *n* est le nombre des faces de l'angle polyèdre, nous formons ainsi *n* trièdres ayant leurs sommets en A,B,C..., et d'après le théorème précédent on a

les n inégalités $\quad$ BAF < BAS + FAS
ABC < ABS + CBS
. . .
. . .
EFA < EFS + AFS

et identiquement

Somme des angles en S = somme des angles en S.

Ajoutant ces inégalités et l'égalité membre à membre, on a, en observant que le second membre contient la somme des trois angles des n triangles ayant leur sommet commun en S;

Somme des angles du polygone ABC ... + somme des angles en S < $2n^{dr}$,

ou $\quad 2n^{d} - 4^{d} +$ somme des angles en S < $2n^{d}$

d'où par transposition :

somme des angles en S < 4^{dr}.

Trièdres supplémentaires.

Lemme. — *Si, par un point de l'arête d'un dièdre, on élève les perpendiculaires à chacune des faces en dirigeant celles-ci du côté de l'autre face, l'angle de ces deux droites est supplémentaire de l'angle plan correspondant du dièdre.*

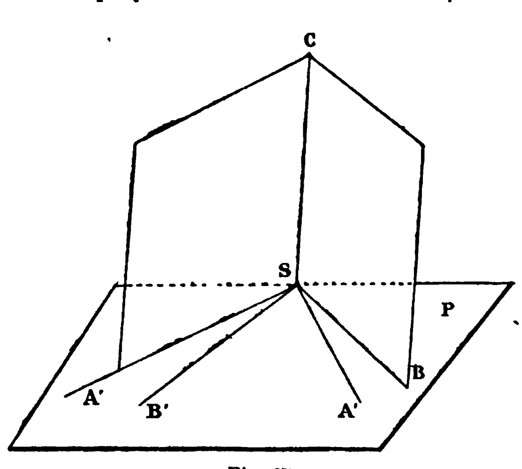


Fig. 37.

Soit le plan P perpendiculaire à l'arête SC du dièdre *(fig. 37)*, l'intersection de ce plan avec le dièdre détermine l'angle plan ASB correspondant, et contient les perpendiculaires SA', SB' à chacune des faces; ces droites sont toutes deux dans l'intérieur, ou à l'extérieur de l'angle ASB, selon que celui-

ci est obtus ou aigu; or on a évidemment.

$$1^{d} = ASB' + B'SA'$$

et par construction

$$1^{d} = B'SB.$$

Ajoutant, il vient

$$2^{dr} = ASB' + B'SB + B'SA' = ASB + B'SA.$$

Théorème. — *Si par le sommet d'un trièdre, on mène la perpendiculaire à chacune des faces, en dirigeant celle-ci du côté de la troisième arête, on forme un second trièdre dont les faces et les dièdres sont supplémentaires des dièdres et des faces du premier.*

En effet, l'arête SA', perpendiculaire à la face BSC, étant dirigée du côté de SA, est dirigée du côté de la face CSA; de même SB', perpendiculaire à la face CSA, est dirigée du côté de la première face BSC; donc, d'après le lemme, l'angle A'SB' est supplémentaire du dièdre SC formé par ces deux faces BSC, CSA.

Pour démontrer que les dièdres du second sont supplémentaires des faces du premier, il revient au même de prouver qu'en opérant sur le second trièdre comme on vient de de faire sur le premier on retrouve celui-ci; en d'autres termes que SA, par exemple, est perpendiculaire à la face B'SC' du même côté de ce plan que SA'.

En effet SB' est perpendiculaire à la face ASC, par conséquent sur SA; de même SC' perpendiculaire à la face ASB est perpendiculaire sur SA; donc la droite SA perpendiculaire aux deux droites SB', SC' est perpendiculaire à leur plan.

D'ailleurs SA est du même côté que SA', puisque SA' a été menée du côté de SA.

Définition. — Les deux trièdres qui jouissent de la propriété d'être réciproques l'un de l'autre, sont appelés *supplémentaires.*

Cette propriété permet de déduire les théorèmes 4,5,6 des théorèmes 1, 2, 3, ou inversement.

ÉGALITÉS DES TRIÈDRES

Définition. — Si on considère plusieurs dièdres ayant une face commune P et une arête commune AB *(fig. 38)*, chacun de ces plans Q forme avec le plan P deux drièdres supplémentaires; pour définir le dièdre que l'on veut considérer parmi les deux, on conviendra de prendre pour angle correspondant au dièdre celui formé par la perpendiculaire

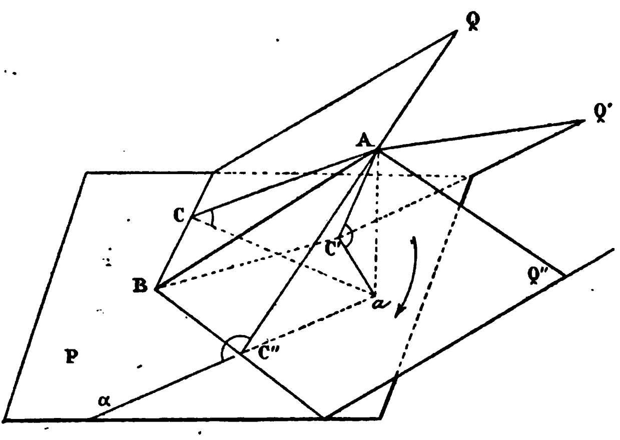


Fig. 38.

AC menée de A sur l'arête BC avec la perpendiculaire Ca menée dans le plan P sur cette même arête, cette dernière droite Ca étant toujours menée de la gauche vers la droite pour un spectateur placé suivant la perpendiculaire Aa et regardant AB. Ainsi les dièdres formés par Q, Q' Q'' avec le plan P sont respectivement mesurés par ACa, AC'a, AC''α.

Lemme. — *Par une droite* AB *oblique à un plan* P *on peut mener généralement un plan et un seul formant avec le premier un angle donné* γ (fig. 39).

Soit aB la projection de AB sur le plan P, menons AC formant avec aB l'angle donné γ, et du point a comme centre, avec le rayon aC, décrivons la circonférence; si par B on mène les tangentes à cette circonférence, l'une d'elles BC

sera telle que l'angle ACa égal à γ sera formé dans le sens indiqué par la définition précédente; or le plan Q conduit

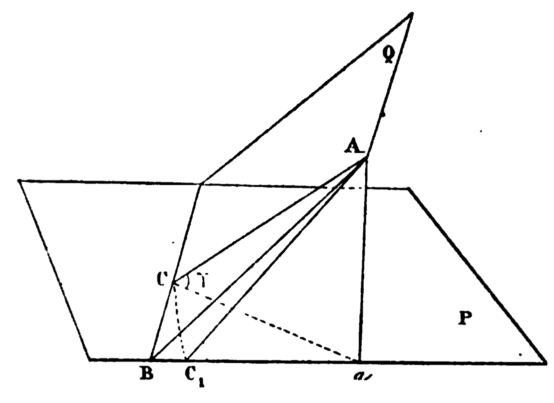


Fig. 39.

par AB et BC fait avec le plan P un dièdre mesuré par γ, d'après le théorème des trois perpendiculaires.

Remarque. — Pour que le plan Q existe, il est nécessaire que l'angle donné γ soit supérieur à l'angle de AB avec le plan P, si ce dernier angle est aigu et soit au contraire inférieur à ce même angle supposé obtus. Ceci résulte du théorème sur la ligne de plus grande pente.

Théorème. — *Deux trièdres sont égaux, s'ils ont, soit.*

1° *Les trois dièdres égaux chacun à chacun ;*

2° *Deux dièdres égaux chacun à chacun et les faces comprises entre ces dièdres égales entre elles ;*

3° *Un dièdre égal adjacent à deux faces égales chacune à chacune ;*

4° *Les trois faces égales chacune à chacune.*

Cet énoncé suppose en outre que les éléments égaux sont disposés dans le même ordre ; s'il en était autrement, les deux trièdres seraient *symétriques.*

Premier cas. — Soient les deux trièdres SABC, S'A'B'C' (*fig. 40*) dont les trois dièdres sont égaux chacun à chacun et disposés de la même manière ; le théorème, s'il y a deux

dièdres droits, n'est autre que celui du théorème IV (p. 148). Mais supposons qu'il y ait au moins deux dièdres SB, SC non droits. Dans le premier trièdre, menons le plan BAC perpendiculaire à l'arète SA et dans le second le plan B'A'C' perpendiculaire à S'A', et supposons A'B' = AB. Transportons ce second trièdre sur le premier de manière que les deux dièdres égaux S'A', SA coïncident, A'B' étant sur AB;

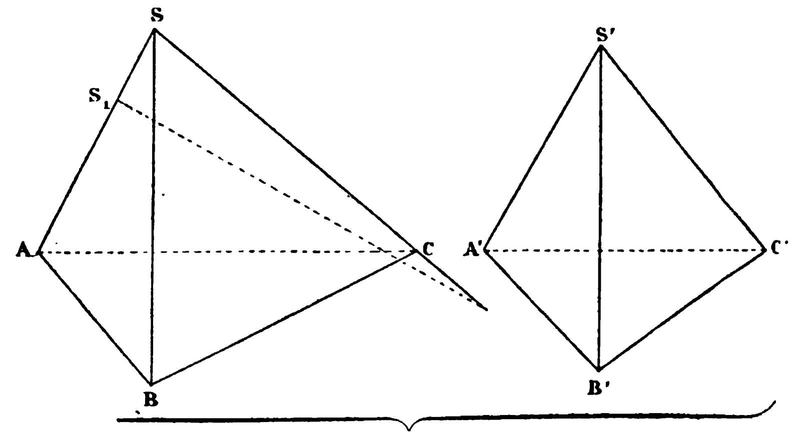


Fig. 40.

ces deux trièdres ont déjà deux faces superposées en direction; je dis que leurs troisièmes faces B'S'C', BSC coïncident; car, s'il en était autrement, ces deux faces ayant le point commun B se couperaient suivant une droite située dans le plan ASB, ou oblique par rapport à ce plan. Dans la première hypothèse, cette droite d'intersection ne serait autre que BS, oblique par rapport au plan ASC', puisque les dièdres SB, SC ne sont pas droits; donc, d'après le lemme précédent, les deux faces BSC, B'S'C' coïncident. Dans la seconde hypothèse, soit BC la droite d'intersection oblique par rapport au plan BSA; d'après le même lemme les deux faces BSC ou BSC et B'S'C' coïncident.

Les deuxième et troisième cas se démontrent par la superposition (voir la démonstration du 1er et du 2e cas de l'égalité de deux triangles).

Quatrième cas. — Soient les deux trièdres SABC, S'A'B'C' (*fig.* 41), ayant leurs trois faces égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre; prenons les points A, B, C, A', B'. C' sur les arêtes, tels que

$$SA = SB = SC = = SA' = SB' = SC'.$$

Les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, d'après l'égalité des triangles isoscèles ASB, A'S'B', etc.

Soient O et O' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, A'B'C', les rayons OA, O'A' de ces circonférences

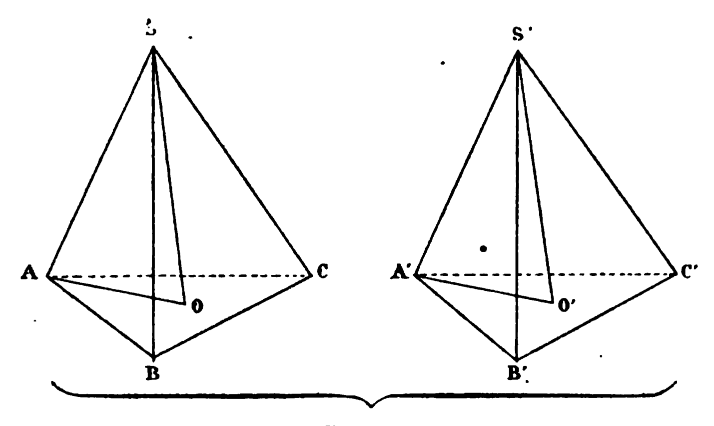


Fig. 41.

sont égaux, puisque ces triangles le sont; or, les droites SO, S'O' sont perpendiculaires aux plans de ces triangles, d'après le théorème V (droites et plans perpendiculaires); donc les triangles rectangles OSA, O'S'A' sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal; donc O'S' = OS. Par conséquent, si on transporte le trièdre S'A'B'C sur le premier, de façon que les triangles égaux A'B'C', ABC coïncident, les centres O' et O coïncideront, par suite les perpendiculaires O'S' OS se superposeront et S' s'appliquera sur S; donc les deux figures coïncident et les deux trièdres sont égaux.

ÉQUATIONS QUADRATIQUES (*).

Par M. G. de Longchamps.

1. — On dit qu'une équation de degré *m* est quadratique lorsque sa résolution dépend seulement d'équations qui sont tout au plus du second degré. Lorsqu'un problème conduit à une équation de degré supérieur à deux, le problème proposé n'est pas, en général, soluble par la règle et le compas. Mais, dans certains cas particuliers, la résolution de l'équation trouvée peut se faire par des équations du second degré ou du premier degré; on peut dire, pour exprimer ce fait, que *le problème donné est quadratique.*

Par exemple, et pour citer des exemples très connus, la trisection de l'angle n'est pas un problème quadratique, en général; mais la recherche de $\operatorname{tg}\frac{1}{4}a$, connaissant $\operatorname{tg} a$, conduit à une équation du quatrième degré qui peut se résoudre par des équations du second degré; ce dernier cas est un exemple de problème quadratique.

On sait, depuis Abel, que les équations du degré supérieur à quatre, ne sont pas en général solubles par radicaux; la résolution même des équations du troisième et du quatrième degré est soumise à tant de difficultés pratiques et elle rencontre dans ce qu'on nomme le cas irréductible, une impossibilité si absolue, que l'on peut considérer, croyons-nous, cette résolution comme plus théorique que pratique. De là résulte le grand intérêt qui s'attache aux équations quadratiques du troisième et du quatrième degré. Nous allons, dans cette note, entrer dans quelques détails sur ces équations.

(*) Hermitte, *Journal de Borchardt*, t. 52.

Darboux, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 18, p. 220.

Mathieu, Mémoire sur la résolution des équations, *annali di Mathematica pura ed applicata*, t. IV, 1862.

Équations réciproques du quatrième degré.

2. — Nous nommerons, en généralisant la définition donnée ordinairement, ***équation réciproque du quatrième degré***, celle qui jouit de cettepropriété que ses racines (nous admettons qu'elles sont en nombre égal à 4), x_1, x_2, x_3, x_4, peuvent, quand on les groupe convenablement, donner la relation

$$x_1x_2 = x_3x_4.$$

Nous désignerons par K ces deux produits égaux et, empruntant des idées qui sont développées dans les cours de mathématiques spéciales, quand on traite de l'abaissement des équations, nous allons montrer, par des considérations qui peuvent être d'ailleurs présentées dans les cours élémentaires, que l'équation réciproque du quatrième degré est quadratique.

3. — La première question qui se présente dans ce problème est, évidemment, la suivante: *Une équation du quatrième degré étant donnée, a-t-elle des racines jouissant de la propriété énoncée ci-dessus ?*

Soit $\qquad Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \qquad (1)$

l'équation proposée: ses racines étant désignées par x_1, x_2, x_3, x_4, supposons que $\quad x_1x_2 = x_3x_4 = K$.

Dès lors, les quatre racines peuvent être représentées par

$$x_1, \frac{K}{x_1}, x_3, \frac{K}{x_3}.$$

Posons $\qquad y = \dfrac{K}{x}$

et considérons l'équation,

$$AK^4 + BK^3y + CK^2y^2 + DKy^3 + Ey^4 = 0 \qquad (2)$$

dont les racines sont $y_1 = \dfrac{K}{x_1} \qquad y_2 = \dfrac{K}{\dfrac{K}{x_1}}$

$$y_3 = \frac{K}{x_3}; \qquad y_4 = \frac{K}{\dfrac{K}{x_3}}$$

ou encore, $\qquad x_1, \quad \dfrac{K}{x_1} \quad x_3, \quad \dfrac{K}{x_3}.$

De cette remarque il résulte que les équations (1) et (2) ont les mêmes racines.

4. — Du théorème élémentaire, un des premiers qu'on rencontre dans l'étude de l'algèbre, — nous voulons parler de celui qui établit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier $f(x)$ soit divisible par $(x - a)$ est $f(a) = o$, on déduit facilement, et nous ne voulons pas entrer ici dans ce détail, que les équations (1) et (2) sont identiques. On en conclut que les coefficients sont deux à deux proportionnels, et l'on peut écrire

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{DK} = \frac{C}{CK^2} = \frac{D}{BK^3} = \frac{E}{AK^4}.$$

De ces relations on déduit

$$K^2 = \frac{D^2}{B^2} = \frac{E}{A}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'une équation du quatrième degré*

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o$$

est réciproque (sens général), *les coefficients extrêmes sont proportionnels aux carrés des coefficients voisins.*

Il est facile de reconnaître, et d'ailleurs sans rien emprunter aux connaissances qui sortent du cercle des mathématiques élémentaires, que la réciproque du théorème précédent est vraie.

Si les coefficients A, B, C, D, E, de l'équation générale du quatrième degré sont tels que

$$\frac{A}{E} = \frac{B^2}{D^2}, \qquad (1)$$

on a entre les racines x_1, x_2, x_3, x_4 la relation

$$x_1 x_2 = x_3 x_4.$$

Mais nous ne voulons pas insister sur cette partie théorique, qui rentre plus naturellement dans l'enseignement des mathématiques spéciales. Nous avons surtout en vue, en ce moment, le côté pratique de la résolution algébrique des équationsdu quatrième degré quadratiques, et nous allons maintenant effectuer cette résolution en supposant, d'abord, que les coefficients satisfont à la relation (1). *(A suivre).*

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1882

Géométrie et statique.

1. — Diviser une droite en moyenne et extrême raison; — comme application inscrire un décagone régulier dans une circonférence.

2. — On donne une sphère solide et trois points A, B, C, sur cette sphère. Décrire avec le compas, un petit cercle passant par les points B, C, et faisant un angle donné avec le plan du grand cercle décrit de A comme pôle.

3. — On donne un polygone homogène et solide quelconque A_1, A_2, A_3....; suivant la direction des côtés a_1, a_2, a_3... sont appliquées des forces F_1,F_2,F_3... qui leur sont proportionnelles. Prouver que le système se réduit à un couple, et que le moment de ce couple est proportionnel à la surface du polygone.

Géométrie descriptive.

On donne un point H dans le plan horizontal, à $0^m,04$ de la ligne de terre, et un point V dans le plan vertical, éloigné de la ligne de terre de $0^m,06$; on donne la longueur de la droite HV de l'espace, longueur qui est de $0^m,107$. Mener par cette droite un plan faisant un angle de 50° avec le plan bissecteur du premier dièdre.

Arithmétique et algèbre.

1. — De combien de manières peut-on décomposer le nombre 35280 en un produit de deux facteurs premiers entre eux ? Le démontrer et généraliser.

2. — Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, trouver celui dont le cercle inscrit est maximum.

ÉCOLE SAINT-CYR

CONCOURS DE 1882

Mathématiques.

1. Étant donnés un cercle de rayon r, et un point A dans son plan, à une distance d du centre, on suppose menée par le point A une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et le point d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné m^2, démontrer que si α désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point A, on aura la formule

$$\cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}. \quad (1)$$

Discussion. Limites de m, quand on fait varier α, le point A étant à l'intérieur du cercle.

2. *Calcul logarithmique*. La formule (1) étant admise, calculer l'angle α à un dixième de seconde près en supposant :

(a) la distance *d* égale au plus grand segment du rayon *r* divisé en moyenne et extrême raison, et *m* égale au double de la moyenne proportionnelle entre *r* et *d* ;

(b)
$$d = \frac{2}{3}r, \quad m = d\sqrt{3}.$$

3. On connaît dans un triangle ABC deux côtés *b* et *c*, et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté *a* ; calculer ce côté *a* et l'angle A. — On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.

Géométrie descriptive.

La base ABC d'une pyramide SABC est parallèle au plan horizontal de projection, au-dessus de ce plan, et à une distance de 24 millimètres. Le côté BC, parallèle à la ligne de terre, égale 113 millimètres, et est éloigné du plan vertical, en avant, de 15 millimetres. Les côtés AC et AB valent respectivement 101 millimètres et 76 millimètres. Le triangle SAC est isoscèle ; les angles égaux SAC et SCA valent chacun 62°, enfin l'arête SB égale 112 millimètres. On demande :

1° De construire les projections de la pyramide ;

2° De déterminer les projections du centre *o* de la sphère circonscrite à la pyramide ;

3° De déterminer les projections et la vraie grandeur de la section que fait dans la pyramide le plan mené par le point *o* parallèlement aux deux arêtes opposées AC et SB.

SOLUTION DES PROBLÈMES

DONNÉS AU CONCOURS DE L'ÉCOLE NAVALE (1882)

On donne une sphère solide et trois points A, B, C *sur cette sphère; décrire, avec le compas, un petit cercle passant par les points* B, C, *et faisant un angle donné avec le plan du grand cercle décrit de* A *comme pôle.*

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Un premier lieu du pôle du petit cercle cherché est le grand cercle perpendiculaire au milieu de l'arc de grand cercle BC. En outre, si j'appelle O le centre de la sphère, P le pôle du petit cercle, l'angle des rayons OA et OP est égal à l'angle des deux plans; donc l'arc de grand cercle PA est connu; il en résulte que le pôle P est sur un petit cercle décrit de A comme pôle avec un rayon sphérique donné par l'angle indi-

qué pour les deux plans. Le point P se trouvera donc à l'intersection de deux cercles de la sphère; il sera donc facile de le trouver avec le compas. Le problème aura en général deux solutions.

On donne un polygone homogène et solide quelconque $A_1A_2A_3...$; *suivant la direction des côtés* a_1, a_2, a_3 ... *sont appliquées des forces* F_1, F_2, F_3 ..., *qui leur sont proportionnelles. Prouver que le système se réduit à un couple, et que le moment de ce couple est proportionnel à la surface du polygone.*

On peut choisir l'échelle qui sert à représenter les forces par des droites finies de telle sorte que a_1, a_2, a_3 ... a_n aient les longueurs représentant les forces appliquées suivant ces côtés. Alors, la résultante de translation s'obtiendra en composant les forces données, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point; nous choisirons par exemple le point A. La résultante sera le dernier côté du polygone des forces construit à partir de A_1; ce dernier polygone n'est autre que le polygone donné, lequel se ferme de lui-même; la résultante de translation est donc nulle, et par suite les forces se réduisent à un couple.

Les couples composants étant situés dans le plan de la figure, il en est de même du couple résultant; et pour avoir le moment du couple, il suffit de prendre la somme des moments des forces par rapport à un point O du plan; si l'on prend ce point à l'intérieur du polygone, il est facile de voir que la somme des moments des forces est égale au double de la surface du polygone. Si le point O était extérieur, il faudrait prendre avec le signe *moins* quelques-uns des triangles ayant pour sommet le point O et pour bases les côtés du polygone; ces triangles correspondraient à des moments négatifs; et l'on arriverait encore au même résultat.

De combien de manières peut-on décomposer le nombre 35280 *en un produit de deux facteurs premiers entre eux? Le démontrer et généraliser.*

Le nombre 35280, décomposé en facteurs premiers donne

$$35280 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Pour obtenir un produit de deux nombres premiers entre eux, il *faut* que chacun des facteurs premiers entre, dans l'un ou l'autre de ces nombres, avec son exposant propre: sans quoi, s'il entrait dans l'un des nombres avec un exposant inférieur à celui qu'indique la décomposition en facteurs premiers, on devrait en outre le retrouver dans l'autre nombre et par suite les deux facteurs ne seraient pas premiers entre eux. Il est, du reste, évident que cette condition est suffisante. Il n'y a donc pas, ici, à s'occuper de l'exposant de chaque facteur.

En général, si l'on a un nombre A, dont les facteurs premiers sont a, b, c, d, ... de sorte que l'on a

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$$

il suffira, pour le décomposer en un produit de deux nombres premiers entre eux, de mettre chaque facteur premier avec son exposant propre dans l'un ou l'autre des deux nombres cherchés.

Cela posé, je pourrai former l'un des nombres (ce qui me donnera immédiatement l'autre) en prenant de toutes les manières possibles *un*, *deux*, *trois* ... des facteurs premiers différents qui entrent dans le nombre A; il est facile de voir que le nombre de groupes que j'obtiendrai ainsi sera le double du nombre de produits cherchés; en effet, s'il y a p facteurs premiers, quand je prends un groupe de m quelconques de ces facteurs, il en reste un groupe de $p - m$, que j'obtiendrai en prenant de toutes les manières possibles $p - m$ des facteurs donnés.

D'après cela, je pourrai prendre, dans le nombre donné:

les facteurs	un à un,	ce qui donne	4	produits
—	deux à deux	—	6	—
—	trois à trois	—	4	—

J'aurai ainsi 14 produits ; donc, d'après ce que je viens de dire, il y aura 7 manières différentes de décomposer le nombre 35280 en deux facteurs premiers entre eux. J'ai négligé le produit du nombre donné par 1, que l'on peut considérer comme ne répondant pas à la question.

Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, trouver celui dont le cercle inscrit est maximum.

Appelons x, y, les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse, et R le rayon du cercle inscrit.

Nous avons, entre ces quatre quantités, la relation

$$x + y = z + 2R.$$

Donc, en appelant $2p$ le périmètre, nous avons immédiatement

$$z = p - R.$$

D'autre part, x et y sont liées aux deux quantités p et R par les deux équations

$$x^2 + y^2 = (p - R)^2,$$
$$xy = 2pR,$$

la première étant une conséquence immédiate de ce qui précède et la seconde donnant deux expressions du double de la surface du triangle.

D'après cela, si l'on considère x et y comme les racines de l'équation

$$X^2 - AX + B = 0,$$

on a, pour déterminer A et B, les relations

$$B = 2pR,$$
$$A^2 - 2B = (p - R)^2\,;$$

donc

$$A^2 = (p + R)^2$$

et comme A doit être positif, il vient $A = p + R$.

Par suite l'équation qui donne x et y est

$$X^2 - (p + R)\,X + 2pR = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$(p + R)^2 - 8pR \geq 0.$$

A la limite, le triangle sera isoscèle; il faut pour cela que l'on ait

$$R^2 - 6pR + p^2 = 0\,;$$

d'où

$$R = p(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

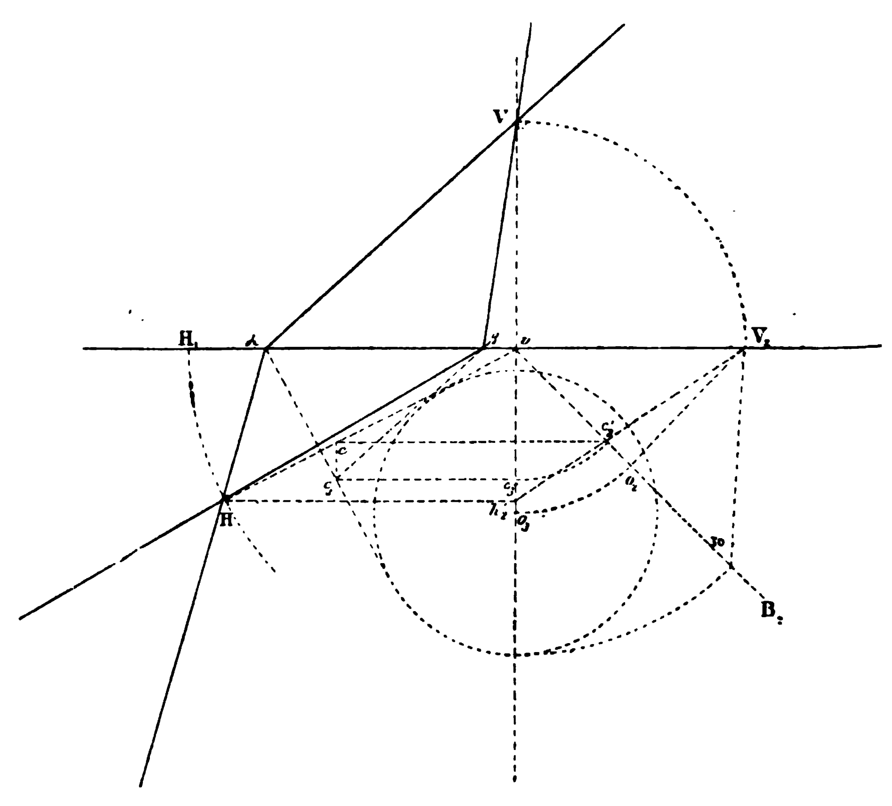
Comme R doit être inférieur à p, nous devons rejeter le signe $+$, et par conséquent, R devant toujours être en dehors des deux racines pour que le trinôme soit positif, nous voyons que la valeur maxima de R est donnée par l'expression

$$R = p\,(3 - 2\sqrt{2})$$

On donne un point H *dans le plan horizontal, à* 0m,04 *de la ligne de terre, et un point* V *dans le plan vertical, éloigné de la ligne de terre de* 0m,06; *on donne la longueur de la droite*

HV *de l'espace, longueur qui est de* 0,107. ***Mener par cette droite un plan faisant un angle de*** 50° ***avec le plan bissecteur du premier dièdre.***

1° Pour déterminer la position du point H, le point V étant pris arbitrairement sur le plan vertical à 0,06 de la



ligne de terre, on cherche le point H_1 de cette dernière ligne situé à une distance de V égale à 0,107. Puis, de la projection horizontale v du point V, comme centre, avec vH_1 comme rayon, on décrit un arc de cercle qui rencontre au point H une parallèle à la ligne de terre menée à une distance de 4 centimètres. La ligne vH est la projection horizontale de la droite donnée.

2° On prend comme nouveau plan vertical le plan de profil passant par V. On a ainsi en vB_2 la trace du plan bissecteur, et en $V_2h'_2$ la nouvelle projection verticale de VH. On a ainsi immédiatement le point d'intersection de la droite VH avec le plan bissecteur; ce point se projette en (c, c'_2).

3° Le plan cherché rencontre le plan bissecteur suivant une droite facile à déterminer, car elle est tangente à un cercle obtenu de la manière suivante : son centre est en o_2, pied de la perpendiculaire abaissée de V_2 sur la trace vB_2 du plan bissecteur, et son rayon est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est V_2o_2, et l'angle opposé vaut 50°. En rabattant le plan bissecteur sur le plan horizontal, on peut construire le cercle précédent; le point C se rabat en c_3; de ce point, je mène une tangente au cercle; cette tangente rencontre la ligne de terre en α; le point α appartient aux traces du plan cherché; du reste, ces traces passent l'une par H et l'autre par V. On a une seconde solution en menant la seconde tangente, qui rencontre la ligne de terre en β. Le second plan est HβV.

(L'épure est à l'échelle de $\frac{1}{2}$.)

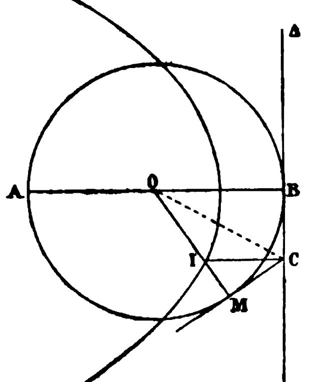
QUESTION 20

Solution par M. L. Germain, élève au Collège ecclésiastique de Belley.

On considère un cercle de centre O, *un diamètre* AB *et la tangente* Δ *à l'extrémité* B *de ce diamètre. La tangente en un point quelconque* M *de la circonférence rencontre* Δ *en un point* C, *par lequel on mène une parallèle à* AB *jusqu'à sa rencontre avec le rayon* OM. *Soit* I *ce point de rencontre; trouver le lieu du point* I *quand* M *parcourt la circonférence proposée.* (G. L.)

La droite CO, qui joint le point d'intersection des tangentes CB, CM au centre de la circonférence, est bissectrice de

l'angle BOM ; les angles BOC, COM étant égaux, le triangle OIC est isoscèle, puisque les angles ICO et COB sont égaux comme alternes-internes, donc IO = IC.



Le point I, étant à égale distance du point O et de la tangente Δ, appartient à une parabole dont le foyer est le point O, et la directrice la droite Δ.

On démontrerait de même que toute autre position du point I jouit des mêmes propriétés.

Donc, le lieu du point I, lorsque M parcourt la circonférence, est une parabole ayant pour foyer le centre O de la circonférence et pour directrice la tangente Δ à cette même circonférence.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. P. et R. Godefroy, à Lyon ; Pigeaud, à Châteauroux ; Quintard, à Arbois ; Deville, à Lorient ; Bréville, lycée Louis-le-Grand, à Paris ; Puig, à Montpellier ; Finat, à Moulins ; Dhaillot, à Nantes, de Longuy, au lycée Henri IV, à Paris ; Kahls, à Grenoble ; Caffarel, à Marseille ; Barthe, Matha, institution Chassin, à Paris ; Vygy, à Vitry-le-Français.

QUESTION 21

Solution par MM. LENOIR et VAIL, École Albert-le-Grand (Arcueil.)

On donne un cercle du centre O, *un diamètre* AB *et les tangentes* Δ, Δ′ *aux extrémités de ce diamètre. Une tangente variable* Δ″ *au cercle rencontre* Δ *en* C, *et* Δ′ *en* D. *Par le point* C, *on mène une parallèle à* AB, *parallèle qui rencontre le rayon* OD *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand* Δ″ *roule sur le cercle* O. (G. L.)

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Abaissons la perpendiculaire IH sur AB.

Les triangles OIH, IMC étant égaux (BC = CM = IH, MCI = OIH), il en résuste que OI = IC.

Donc le lieu du point I est une parabole ayant O pour foyer et la tangente Δ pour directrice.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Simonet, maître répétiteur au lycée de Chaumont ; Euvert, au lycée Louis-le-Grand ; Vazou, collège Rollin ; Pigeaud, lycée de Châteauroux, Thubiz, à Versailles ; Barthe et Matha, institution Massin, à Paris ; Puig, à Montpellier ; Quintard à Arbois ; P. et R. Godefroy, à Lyon.

QUESTION 25

Quatre points A, B, C, D *étant situés sur une circonférence, démontrer que la droite* M *qui joint les milieux des arcs opposés* AD, BC *coupe à angle droit la droite* M *qui joint les milieux des autres arcs* AB, DC. *Voir ce qui arrive si trois des points* A, B, C, D *se confondent en un seul.*

Cette propriété est absolument évidente, l'angle formé par les droites M et M′ ayant pour mesure la moitié d'une demi-circonférence.

Nota. — Cette question a été résolue par MM. Simonet, au lycée de Chaumont ; Vail, H. Lenoir, école Albert-le-Grand (Arcueil) ; Pigeaud, Berthelot, à Châteauroux ; Perejol, collège du Vigan ; Julet, à Laferté-Gaucher ; Pelletier, à Blanzac ; R. Godefroy, à Lyon ; Matha, instituteur ; Massin, à Paris ; Simon Dupuis, à Lons-le-Laulnier ; Puig, à Montpellier ; Thubiz, à Versailles ; Dérôme, à Valenciennes ; Quintard, à Arbois.

QUESTIONS PROPOSÉES

44. — On considère un cercle et un diamètre AB ; d'un point M, pris sur la circonférence, on abaisse une perpendiculaire MP sur AB. Soit C le milieu de PB. Prenons enfin entre A et B un point D tel que

$$AD = \frac{PB}{4}.$$

Les droites MC et MD rencontrent le cercle en des points C′ et D′. Démontrer que l'on a, entre les arcs BM, BC′, AD′, la relation $MB = 2BC' + AD'$. *(G. L.)*

45. — On considère un cercle C et deux rayons rectangulaires OA et OB; les tangentes aux points A et B, supposés fixes, forment avec une troisième tangente mobile un triangle rectangle. On imagine le cercle circonscrit à ce triangle, et l'on propose de démontrer que ce cercle est constamment tangent à un cercle fixe que l'on déterminera.

(G. L.)

46. — On donne l'axe Ox, le sommet O, et un point M d'une parabole; on propose de construire cette courbe point par point au moyen d'une équerre. *(G. L.)*

47. — Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les deux aiguilles d'une horloge de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge? *(Laisant.)*

48. — On donne une circonférence et dans cette circonférence une corde fixe AB. Soit C le point de rencontre des tangentes en A et B à la circonférence; on prend un point M quelconque sur la circonférence, on mène les droites MA, MB, et par le point C une parallèle à la tangente en M: cette parallèle rencontre MA au point P, MB au point Q; démontrer que PQ est constant. *(**Mannheim**.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 13342-2.

ÉQUATIONS QUADRATIQUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir page 156.)

5. — On peut donner à l'équation réciproque du quatrième degré (sens général) une forme remarquable, en établissant, comme nous allons le faire, le théorème suivant :

Théorème. — *On peut toujours ramener l'équation réciproque du quatrième degré* (sens général) *à la forme :*

$$\alpha^2 x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0.$$

Supposons B différent de zéro, car si B était nul on aurait nécessairement $D = 0$, en vertu de la relation établie tout à l'heure, $AD^2 = B^2E$, et l'équation proposée serait bicarrée, cas particulier trop connu pour que nous ayons à nous en occuper ici.

Ainsi B n'est pas nul et nous pouvons poser

$$x = \frac{A}{B^2} X$$

X est une nouvelle inconnue déterminée par l'équation

$$\frac{A^4}{B^6} X^4 + \frac{A^2}{B^3} X^3 + \frac{AC}{B^2} X^2 + DX + D^2 = 0$$

et, en posant $\frac{A^2}{B^3} = \alpha,\quad \frac{AC}{B^2} = \beta,\quad D = \gamma,$

on a bien $\alpha^2 X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \gamma^2 = 0.$

6. — Sous cette forme il est facile maintenant de reconnaître que l'équation réciproque (sens général) est quadratique.

Écrivons, en effet, cette équation sous la forme

$$\alpha^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{X^2} + \alpha X + \frac{\gamma}{X} + \beta = 0$$

et posons $\alpha X + \frac{\gamma}{X} = y,$

on en tire $\alpha^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{X^2} = y^2 - 2\alpha\gamma,$

et l'on a pour déterminer y l'équation

$$y^2 + y + \beta - 2\alpha\gamma = 0.$$

Si l'on désigne par y' et y'' les deux racines de cette équation, les inconnues cherchées sont les racines des deux équations :

$$\alpha X^2 - y'X + \gamma = 0,$$
$$\alpha X^2 - y''X + \gamma = 0.$$

Le problème proposé se résout donc au moyen de trois équations du second degré; c'est un problème quadratique.

7. — Nous ferons ici remarquer que dans la pratique il n'est nullement nécessaire de faire subir à l'équation considérée la transformation précédente. Celle-ci a surtout un intérêt théorique ; et elle permet d'écrire, sous une forme symétrique et facile à retenir, l'équation réciproque du quatrième degré.

Reprenons en effet la première forme, soit

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

l'équation proposée ; nous supposons que l'on ait

$$E = \frac{D^2A}{B^2};$$

auquel cas, et encore une fois dans le sens général que nous attribuons à ce mot, l'équation est réciproque.

On peut écrire celle-ci

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \frac{D^2A}{B^2} = 0$$

ou
$$\frac{A}{B^2}\left(B^2x^2 + \frac{D^2}{x^2}\right) + Bx + \frac{D}{x} + C = 0$$

et en posant
$$Bx + \frac{D}{x} = y$$

on voit, comme tout à l'heure, que l'équation est quadratique et se résout par trois équations du second degré.

8. — *Résolution directe de l'équation réciproque.*

On peut éviter, pour la résolution de l'équation réciproque. l'emploi d'une inconnue auxiliaire, et décomposer immédiatement le premier membre de l'équation en deux facteurs réels ou imaginaires du second degré.

Posons $\varphi = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \dfrac{D^2A}{B^2}$

et $$U = B(B^2 - 4ABC + 8A^2D);$$
on voit sans difficulté que l'on a

$$A.\varphi = \left(Ax^2 + \frac{Bx}{2} + \frac{DA}{B}\right)^2 + \frac{U}{4B^2}x^2.$$

Si l'on suppose $U < 0$, l'expression sera décomposée en deux facteurs réels du second degré; si $U = 0$, on a un carré parfait; enfin dans l'hypothèse $U > 0$ on a deux facteurs du second degré à coefficients imaginaires et de la forme $(a + bi)$.

9. — *Décomposition de l'équation réciproque en deux trinômes réels du second degré.*

On peut éviter d'ailleurs la décomposition du premier membre de l'équation proposée en deux facteurs imaginaires du second degré en opérant comme nous allons l'indiquer, et conformément à la méthode de Ferrari pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré.

Reprenons l'équation proposée sous la forme

$$\alpha^2x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0;$$

on peut l'écrire

$$\left(\alpha x^2 + \frac{x}{2} + \lambda\right)^2 - \left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\lambda - \gamma\right)x - \lambda^2 + \gamma^2 = 0$$

Disposons maintenant du paramètre λ, par la condition

$$(\lambda - \gamma)^2 = 4\,(\lambda^2 - \gamma^2)\left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right).$$

C'est une équation du troisième degré en λ, mais on aperçoit la racine $\lambda = \gamma$ et cette équation peut s'écrire

$$(\lambda - \gamma)\left\{2\alpha\lambda^2 + \lambda\,(2\alpha\gamma - \beta) + \gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right\} = 0.$$

L'équation $2\alpha\beta^2 + \beta\,(2\alpha\gamma - \lambda) + \gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = 0$

a deux racines réelles ou imaginaires, λ', λ''. Si $\lambda = \gamma$ ne donne pas la décomposition en deux facteurs réels du second degré, on peut être certain, bien que nous ne puissions pas en donner ici la raison sans entrer dans de longs détails, que l'une des racines λ' ou λ'' donne la décomposition désirée.

Il résulte de là qu'une équation réciproque (sens général) du quatrième degré pourra toujours se décomposer en deux trinômes réels du second degré; mais la méthode que nous

venons d'exposer est surtout avantageuse quand cette décomposition réussit avec la racine $\lambda = \gamma$.

10. — L'équation du quatrième degré est encore quadratique dans un cas particulier remarquable, cas qui présente la plus grande analogie avec celui des équations réciproques que nous venons d'étudier.

Le cas dont nous voulons parler est celui où l'on suppose que les racines x_1, x_2, x_3, x_4 jouissent de la propriété de pouvoir être séparées en deux groupes tels que, les racines étant convenablement choisies, la somme des deux racines qui constituent le premier groupe est égale à la somme des deux autres racines.

Il est facile de reconnaître, et par des raisonnements élémentaires, que si l'on considère l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

ayant pour racines x_1, x_2, x_3, x_4, la relation

$$8r = p(4q - p^2)$$

représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$

les racines étant convenablement groupées.

Dans ce cas l'équation proposée peut s'écrire :

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{r}{p}\right)^2 - \frac{r^2}{p^2} + s = 0.$$

Son premier membre se décompose en deux facteurs réels ou imaginaires du second degré ; dans tous les cas le problème que résout l'équation est un problème quadratique.

11. — Les équations du troisième degré quadratiques sont ordinairement celles dont une racine peut être mise en évidence. Cette remarque très simple est pourtant souvent utile et nous allons l'appliquer à quelques exemples.

1° *Résoudre l'équation,*

$$x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3 = 0.$$

On a identiquement

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - zy - zx - xy).$$

D'après cette remarque l'équation peut s'écrire :

$$(x + \alpha + \beta)(x^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha x - \beta x - \alpha\beta) = 0.$$

On aperçoit la racine x_1,

$$x_1 = -\alpha - \beta$$

et les deux autres racines sont données par l'équation

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0.$$

Ce sont des nombres imaginaires, x_2, x_3 ;

$$x_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta).$$

$$x_3 = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta).$$

2° *Résoudre l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \alpha} + \frac{1}{x + \beta} + \frac{1}{x + \alpha + \beta} = 0.$$

En groupant convenablement les termes, on écrit cette équation sous la forme :

$$(2x + \alpha + \beta)\left\{\frac{1}{x(x + \alpha + \beta)} + \frac{1}{(x + \alpha)(x + \beta)}\right\} = 0.$$

On aperçoit ainsi la racine x_1,

$$x_1 = -\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Les deux autres racines x_2, x_3 sont données par l'équation.

$$2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

On trouve les nombres réels

$$x_2 = -\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$x_3 = -\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

3° *Résoudre l'équation*

$$(x + p)(x + p + 1)(x + p + 2)(x + p + 3)$$
$$-(x + q)(x + q + 1)(x + q + 2)(x + q + 3) = 0.$$

C'est une équation du troisième degré ; pour apercevoir une racine de cette équation on peut remarquer que l'on a, identiquement,

$$(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)(x + \alpha + 3) + 1$$
$$= [(x + \alpha)^2 + 3(x + \alpha) + 1]^2.$$

En appliquant cette formule 1° à l'hypothèse $\alpha = p$; 2° en supposant $\alpha = q$, on trouve que le premier membre de l'équation proposée se décompose en deux facteurs : on

trouve d'abord la racine x_1

$$x_1 = -\frac{p+q+3}{2}.$$

Les deux autres racines x_2, x_3 sont donnéespar l'équation du second degré

$$2x^2 + 2x(p+q+3) + p^2 + q^2 + 3p + 3q + 2 = 0.$$

On pourra examiner en particulier le cas où $p = q + 1$ et aussi celui où $p = q + 2$.

12. — Nous ferons connaître en terminant cette note un procédé souvent commode pour reconnaître qu'une équation donnée est quadratique. La méthode dont nous voulons parler suppose que dans l'équation donnée un certain paramètre α entre au second degré, de telle sorte qu'on puisse écrire celle-ci sous la forme $$P\alpha^2 + Q\alpha + R = 0,$$
P, Q, R étant des fonctions de l'inconnue x. Si la fonction $Q^2 - 4PR$ est un carré parfait, l'équation se décompose en deux facteurs rationnels et le problème considéré est quadratique.

Cette remarque s'applique, bien entendu, aux équations bicarrées par rapport au paramètre considéré α.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^3 - (4m^2 + 3)x^2 + 4m^2(m^2 + 2)x - 4(m^4 - 1) = 0.$$

Il est assez difficile d'apercevoir, sous cette forme, une racine de l'équation. Ordonnons-la par rapport au paramètre m; et l'ayant écrite sous la forme

$$4m^4(x-1) + 4m^2x(2-x) + x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

si l'on cherche à décomposer ce trinôme bicarré en m, on trouve, sous le radical,

$$4[x^2(2-x)^2 - (x-1)(x^3 - 3x^2 + 4)] = 4(x-2)^2.$$

On peut donc écrire le premier membre sous la forme

$$(x - 2m^2 - 2)\{x^2 - (1 + 2m^2)x + 2(m^2 - 1\} = 0.$$

On a ainsi les racines de l'équation proposée: l'une x_1,

$$x_1 = 2(m^2 + 1)$$

et les deux autres x_2, x_3, fournies par l'équation

$$x^2 - (1 + 2m^2)x + 2(m^2 - 1) = 0.$$

On vérifie d'ailleurs que les racines de cette équation sont réelles.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE

Par M. E. **Catalan** (*).

1. — Problème I. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés*, β, γ, ... π?

Soit N le nombre cherché. On sait (**) que

$$N = n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \dots \quad (1)$$

Dans cette formule, le symbole $\left(\frac{n}{a}\right)$ représente *le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{n}{a}$ (***).

2. — Théorème I. — *Soit* n *un nombre entier, compris entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$ (inclusivement) ; *soient* β, γ, δ, ... *les nombres premiers supérieurs à* 2. *On a*

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \dots = k + 1 \quad (2)(****)$$

Dans la suite $1, 2, 3, \dots n,$

les seuls nombres premiers avec

$$\beta = 3, \gamma = 5, \delta = 7, \dots$$

sont $1, 2, 2^2, 2^3, \dots 2^k.$

Ainsi, $N = k + 1$.

3. — Remarque. — De $n = 4$ à $n = 14$, le premier membre se réduit à $n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right)$;

(*) *Extrait des Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.*

(**) *Mélanges mathématiques*, p. 133. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, 1881, p. 296, etc.

(***) Il a la même signification que celui de Legendre : $E\left(\frac{n}{a}\right)$.

(****) L'égalité (2), à peu près évidente, est une simple variante de celle-ci :

$$n - \sum\left(\frac{n}{\alpha}\right) + \sum\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right) - \sum\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right) + \dots = 1,$$

qu'on trouve à la page 134 des *Mélanges*.

De $n = 15$ à $n = 104$ (*), ce premier membre se réduit à

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right);$$

et ainsi de suite.

4. — Problème II. — *Connaissant les nombres premiers qui ne surpassent pas* n, *trouver combien il y a de nombres premiers compris entre* n + 1 *et* 2n.

Soit π le plus grand nombre premier, non supérieur à n. De 1 à $2n$, les nombres non divisibles par

$$\beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7, \ldots \pi,$$

sont, d'une part, $1, 2, 2^2, \ldots 2^{k+1}$;

et, en second lieu, les nombres premiers compris entre $n + 1$ et $2n$. Soit x la *quotité* (**) de ceux-ci. Nous avons, en vertu de l'égalité (2),

$$k + 2 + x = 2n \sum\left(\frac{2n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right) + \ldots \quad (3)$$

5. — Application. — *Entre* 25 *et* 50, *combien y a-t-il de nombres premiers?*

Dans cet exemple,

$$n = 25, \ 2n = 50, \ k = 4.$$

En outre, les diviseurs *simples* sont :

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;$$

et les diviseurs *composés :*

$$15, 21, 33, 39, 35.$$

Par conséquent,

$$6 + x = 50 - [16 + 10 + 7 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2] + [3 + 2 + 1 + 1 + 1];$$

d'où $x = 6$.

En effet, entre 25 et 50, il y a *six* nombres premiers ; savoir :

$$29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

6. — Remarque. — La combinaison des égalités (2), (3) donne celle-ci :

(*) $15 = 3.5, \quad 104 = 3.5.7 - 1.$

(**) J'emploie ce mot pour éviter : *nombre des nombres.*

$$\left.\begin{array}{l} k-x=\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta}\right)\right]-\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right)\right] \\ \quad+\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right)\right]-\dots \end{array}\right\} \quad (4)$$

Pour simplifier le second membre, on peut s'appuyer sur la proposition suivante.

7. — Lemme — *Selon que* $\left(\frac{2n}{a}\right)$ *est* pair *ou* impair,

$$\left(\frac{2n}{a}\right)-2\left(\frac{n}{a}\right)$$

égale zéro ou un.

1° De $$2n = a\,.2\mu + r$$

on déduit $$n = a\mu + \frac{r}{2}.$$

Donc, à cause de $r < a$, μ *est le quotient entier de* n *par* a (*). Autrement dit :

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu = 2\left(\frac{2n}{a}\right),\quad \left(\frac{n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 0.$$

2° Soit $$2n = a\,(2\mu + 1) + r\,;$$

et, par conséquent $$n = a\mu + \frac{a+r}{2}.$$

De $r < a$, on conclut $\frac{a+r}{2} < a$: μ *est le quotient entier de* n *par* a. Nous avons donc, simultanément,

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu + 1,\ \left(\frac{n}{a}\right) = \mu,\quad \left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 1.$$

8. — Revenons à la formule (4). En vertu du lemme; *chacun des binômes* soumis au signe Σ *égale* 0 *ou* 1, *selon que son premier terme est pair ou impair.*

D'après cela, si l'on appelle :

l_1, *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs* ;

l_2, *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs* ;

. . . .

l'égalité (4) peut être énoncée ainsi:

(*) Ce petit théorème se trouve dans tous les Traités d'arithmétique.

Théorème II. — *En conservant les hypothèses et les dénominations précédentes, on a*

$$x = k - l_1 + l_2 - l_3 + \ldots \qquad \text{(A)}$$

9. — Application. — *Entre* 25 *et* 50, *combien y-a-t-il de nombres premiers?*

Je divise 50

par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;

+ +

puis par 15, 21, 33, 39, 35,

\+ + + +

en négligeant les quotients pairs.

Je trouve $l_1 = 2$, $l_2 = 4$; donc

$$x = 4 - 2 + 4 = 6;$$

comme ci-dessus.

10. — Autre application. — *De* 61 *à* 120, *combien y-a-t-il de nombres premiers?*

$$n = 60, \quad k = 5.$$

Dividende : 120

Premiers diviseurs :

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,

\+ + + + + +

41, 43, 47, 53, 59 $l_1 = 6.$

Deuxièmes diviseurs :

15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93, 111, 35,

\+ + + + + + + +

55, 65, 85, 95, 115, 77, 91, 119

\+ + + + + + + $l_2 = 15.$

Troisièmes diviseurs : 105

\+ $l_3 = 1.$

$$x = 5 - 6 + 16 - 1 = 13.$$

Les *treize* nombres premiers compris entre 61 et 120 (inclusivement) sont

61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

11. — Remarque. — Si l'on admet qu'*entre* n + 1 *et* 2n,

il y a, au moins, un nombre premier (*), l'égalité (A) donne

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots \overset{=}{>} 1. \qquad (B)$$

Inversement, si l'on pouvait, *a priori*, établir la relation (B), le *postulatum* serait démontré (**).

12. — Théorème III. — n *étant toujours un nombre entier, compris entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$, *soient* $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ *les nombres premiers, supérieurs à* 2. *Soient, en outre:*

λ_1 *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs;*

λ_2 *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs;*

. . . .

On a $\qquad \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \cdots = k. \qquad$ (C)

Ce théorème, conséquence des égalités

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 1 \qquad (2)$$

$$2n - \sum\left(\frac{2n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 3, \qquad (1)(***)$$

résulte aussi du théorème II.

Soient, en effet, $\rho, \sigma, \theta, \ldots \omega$ les x nombres premiers, compris entre $n + 1$ et $2n$.

Chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\rho}\right), \left(\frac{2n}{\sigma}\right), \left(\frac{2n}{\theta}\right), \ldots$ égale 1; et chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\beta\rho}\right), \left(\frac{2n}{\rho\sigma}\right), \ldots$ *est nul* (****). Donc

$$\lambda_1 = l_1 + x, \quad \lambda_2 = l_2, \quad \lambda_3 = l_3, \ldots$$

Par suite, l'égalité (A) devient

$$x = k - (\lambda_1 - x) + \lambda_2 - \lambda_3 + \ldots,$$

ou

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \ldots = k. \qquad (C)$$

13. — Application. — $n = 25$, $k = 4$.

Dividende : 50.

(*) Cette proposition ne diffère pas, au fond, du *postulatum* de M. Bertrand, démontré par M. Tchebychev (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 381).

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 26).

(***) Voyez les paragraphes 6 et 8

(****) A cause de $\beta > 2.\rho > n$.

Premiers diviseurs :

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
+ + + + + + + + $\lambda_1 = 8.$

Deuxièmes diviseurs :

15, 21, 33, 39, 35.
+ + + + $\lambda_2 = 4$

$$8 - 4 = 4.$$

14. — Remarque. — La fonction qui constitue le premier membre de l'égalité (C) dépend, *uniquement*, de n : appelons-la F (n). *Cette fonction conserve la même valeur quand* n *varie entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$ (inclusivement). En outre, *chaque fois que* n *dépasse une nouvelle puissance de* 2, F (n) *augmente d'une unité*. Cet exemple de discontinuité, analogue à celui que présente la fonction $E(x)$, nous paraît remarquable.

15. — *Sur une équation indéterminée.* L'identité

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta)^2(\beta-2\alpha)^2+27\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2=4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^3, \quad \text{(D)}$$

facile à vérifier, donne une infinité de solutions, en nombres entiers, de

$$x^2 + 3y^2 = z^3. \quad (5)$$

En effet, on peut prendre

$$x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha),\ y = \frac{3}{2}\alpha\beta(\alpha-\beta),$$
$$z = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2. \quad (6)$$

Ces valeurs seront entières, si α, β sont de *même parité*.

16. — Remarque. — Ces formules ne donnent pas toutes les solutions. Par exemple, on n'en saurait déduire

$$x = y = z = 4.$$

17. — *Autres identités.*

$$(a^2+b^2)^4 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)^2 + [4(a^2 - b^2)ab]^2$$
$$= (a^4 + b^4)^2 + (2a^3b)^2 + (2a^2b^2)^2 + (2ab^3)^2. \quad \text{(E)}$$

Ainsi, $(a^2 + b^2)^4$ *est : un carré ; une somme de deux carrés ; une somme de quatre carrés.* Généralement, ce nombre n'est pas la somme de trois carrés.

M. Realis, à qui j'avais communiqué les identités (D), (E), m'a répondu par l'intéressante note suivante :

I. La résolution de l'équation

$$x^2 + 3y^2 = z^3$$

en nombre entiers se rattache directement à la théorie générale développée par Lagrange dans le § IX des *Additions à l'Analyse indéterminée d'Euler*.

Le nombre z, diviseur du premier membre, ne peut être que de la forme $\alpha^2 + 3\beta^2$; on a donc l'identité

$$\alpha^2(\alpha^2 - 9\beta^2)^2 + 3\beta^2(3\alpha^2 - 3\beta^2)^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2)^3.$$

Quant à l'égalité $4^2 + 3.4^2 = 4^3$, où 4^2 est facteur commun à tous les termes, elle ne conduit pas à une solution: car en écrivant, comme on doit le faire, $1^2 + 3.1^2 = 4.1^3$, on n'a pas un cube dans le second membre.

Quant, enfin, à l'identité

$$(\alpha + \beta)^2(\alpha - 2\beta)^2(\beta - 2\alpha)^2 + 27\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)^2$$
$$= 4(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)^3,$$

rapportée par M. Catalan, elle n'est manifestement qu'une transformée de celle qui précède.

II. L'expression $(a^2 + b^2)^4$ est assurément : un carré, — une somme de deux carrés, — une somme de quatre carrés. On ne peut pas affirmer qu'elle est généralement une somme de trois carrés effectifs, puisque $(1^2 + 1^2)^4 = 16$, par exemple, ne l'est pas. Cependant, pour des nombres a, b premiers entre eux (ou simplement inégaux), on peut mettre en évidence, par des formules, que l'expression considérée est toujours une somme de trois carrés.

1° Si a et b sont premiers avec 3, posons l'identité

$$a^2 + (a + 3h)^2 = (a + h)^2 + (a + 2h)^2 + (2h)^2, \text{ (*)}$$

dans laquelle on prendra a premier avec h ; il s'en déduit, par l'emploi répété de la formule connue

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 + (2\alpha\gamma)^2 + (2\beta\gamma)^2,$$

le théorème général exprimé par la relation

$$[a^2 + (a + 3h)^2]^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

où A, B, C sont des entiers dont aucun n'est nul, et m est une puissance de 2.

Il s'ensuit, comme corollaire, que : a et b étant deux entiers, dont un seul divisible par 3, et m désignant une puissance de 2, l'expression $[2(a^2 + b^2)]^m$ est la somme de trois carrés.

(*) Lettre de M. Catalan à D. B. Boncompagni, en date de « Liège, 15 décembre 1880 ».

2° Si l'un des nombres a, b, premiers entre eux, est un multiple de 3, par exemple, $a = 3a'$, on pose l'identité

$$(9a'^2 + b^2)^2 = (7a'^2 - b^2)^2 + 16a'^2(a' + b)^2 + 16a'^2(a' - b)^2,$$

et l'on en déduit, comme ci-dessus, la relation

$$(9a'^2 + b^2)^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

en nombres entiers, m étant une puissance de 2.

Observation. — Tout ce qui précède est entièrement indépendant de la *Théorie des nombres* proprement dite; on n'y fait usage que de formules directes, exprimant les propositions, et indiquant en même temps les calculs à effectuer. Mais si l'on sort des éléments, et que l'on s'appuie sur les théorèmes de l'arithmétique supérieure, toutes les propositions énoncées, et bien d'autres, se présentent comme des conséquences immédiates de ce principe, que : *tout bicarré impair, autre que l'unité, est la somme de trois carrés.* D'après ce principe (qui ne se démontre pas à l'aide de simples identités algébriques), *un nombre de la forme* $(a^2 + b^2)^4$ *est toujours décomposable en trois carrés, s'il ne se réduit pas à une puissance de 2.*

SOLUTION DES PROBLÈMES

DONNÉS AU CONCOURS DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1882)

Étant donnés un cercle de rayon r, *et un point* A *dans son plan, à une distance* d *du centre, on suppose menée par le point* A *une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné* m^2. *Démontrer que, si* α *désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point* A. *on aura la formule*

$$\cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2} : \qquad (1)$$

Discussion. — *Limites de* m, *quand on fait varier* α, *le point* A *étant à l'intérieur du cercle.*

Les valeurs des segments AB et AC sont les racines de l'équation $\quad r^2 = d^2 + x^2 - 2dx \cos \alpha$

fournie par la considération du triangle OAB ou du triangle OAC. En écrivant cette équation sous la forme

$$x^2 - 2dx\cos\alpha + d^2 - r^2 = 0,$$

nous avons, pour déterminer l'angle α, la condition

$$4d^2\cos^2\alpha - 2d^2 + 2r^2 = m^2;$$

ou bien, en divisant par $2d^2$:

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}.$$

C'est bien la relation (1) à établir.

Pour que l'angle 2α existe, il faut et il suffit que le carré de son cosinus soit inférieur à l'unité, ce qui donne

$$(m^2 - 2r^2)^2 - 4d^4 < 0$$

ou $$[m^2 - 2(r^2 - d^2)]\,[m^2 - 2(r^2 + d^2)] < 0.$$

Donc, d étant inférieur à r, on voit que m^2 doit être compris entre $2(r^2 - d^2)$ et $2(r^2 + d^2)$.

La valeur minima correspond à $\alpha = 90^0$; la valeur maxima correspond à $\alpha = 0$, ce qu'il serait facile de vérifier par une figure.

La formule (1) *étant admise, calculer l'angle* α *à un dixième de seconde près en supposant:*

(a) *La distance* d *égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et* m *égal au double de la moyenne proportionnelle entre* r *et* d;

(b) $d = \frac{2}{3}r$ *et* $m = d\sqrt{3}$.

Le premier cas nous donne

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 2\sin 18^0,$$

et $$\alpha = 25^0\,54'\,49'',1.$$

La seconde hypothèse donne

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

d'où $$\alpha = 69^0.17'.42'',7.$$

On connait, dans un triangle ABC, *deux côtés* b *et* c, *et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté* a. *Calculer ce côté* a *et l'angle* A. —

On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.

On a d'abord, entre les données et les inconnues, l'équation
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$
Puis, la condition énoncée donne
$$a^2\sqrt{3} = 2bc \sin A.$$
L'élimination de a se fait immédiatement et donne l'équation
$$\sin A + \sqrt{3} \cos A = \frac{(b^2 + c^2)\sqrt{3}}{2bc}.$$
On en tire $\sin (A + 60) = \dfrac{(b^2 + c^2)\sqrt{3}}{4bc}$.

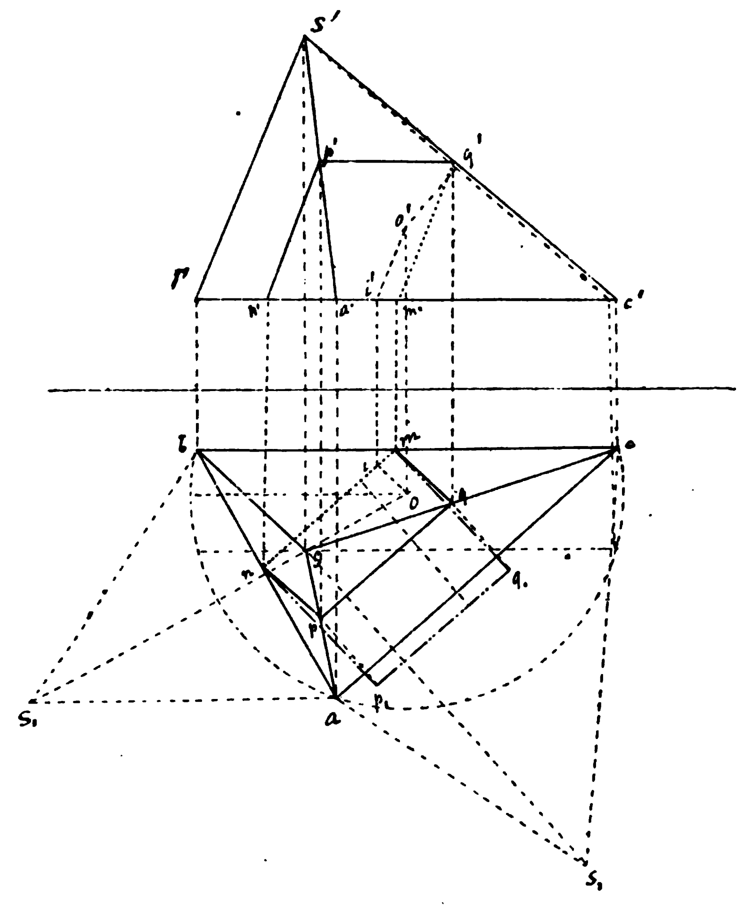
La condition de réalité est
$$3(b^2 + c^2)^2 - 16b^2c^2 < 0$$
ou
$$b^4 - \frac{10}{3} b^2c^2 + c^4 < 0.$$
Cette condition devient
$$(b^2 - 3c^2)(b^2 - \frac{1}{3}c^2) < 0.$$
D'autre part on a
$$2bc \sin A = a^2\sqrt{3}$$
$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2;$$
$$\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = (b^2 + c^2) \sin \left(A + \frac{\pi}{3}\right);$$
en élevant au carré et ajoutant membre à membre, on trouve pour déterminer a
$$4b^2c^2 = 3a^4 + (b^2 + c^2 - a^2)^2$$
ou
$$4a^4 - 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 = 0.$$
La condition de réalité est
$$(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2 \mid 0,$$
ou, en changeant les signes,
$$3b^4 - 10b^2c^2 + 3c^4 \mid 0,$$
ce qui est bien la même condition que précédemment.

Cette relation nous apprend que le rapport $\dfrac{b}{c}$, qui est essentiellement positif, doit être compris entre $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$.

ÉPURE

Les deux premières parties sont des questions qui se font dans tous les cours ; nous ne croyons donc pas devoir y insister.

Pour la troisième partie, nous avons employé la construc-



tion suivante : par le point (o, o') nous avons mené une parallèle (oi, $o'i'$) à (sb, $s'b'$) jusqu'à la rencontre avec le plan de base, en (i, i') ce point est un point de la section cherchée ;

il suffit de construire le parallélogramme dont les sommets sont sur les arêtes BC, BA, SC, SA, et dont les côtés sont respectivement parallèles à SB et AC. On obtient ainsi le parallélogramme ($mnpq$, $m'n'p'q'$) que l'on rabat facilement sur le plan de la base.

QUESTION 15

Solution par MM. André G. de la Chesnais, de Saint-Louis, et Pierre G. la Chesnais, de Henri IV.

Construire un triangle connaissant un angle, la bissectrice et la différence entre les côtés qui comprennent l'angle donné. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Je suppose le problème résolu. Soient BD la perpendiculaire abaissée du sommet B sur la bissectrice et prolongée jusqu'à sa rencontre avec le côté AC, et IK une parallèle à cette droite passant par le pied de la bissectrice et rencontrant AC en K. On a

$$\frac{AB}{AC} \text{ ou } \frac{AD}{AC} = \frac{IB}{IC} = \frac{KD}{KC}.$$

Or, je puis construire géométriquement AK ; soient donc

$$AD = x,\ DC = a,\ AK = k\,;$$

j'ai l'équation $$\frac{x}{x+a} = \frac{k-x}{x+a-k}$$

qui peut s'écrire

$$2x^2 - 2(k-a)x - ak = 0.$$

Les racines sont

$$\frac{k - a \pm \sqrt{k^2 + a^2}}{2}.$$

Elles sont faciles à construire ; la racine négative répond au cas où l'on donne l'angle extérieur et la bissectrice de cet angle.

Nota. — La même question a été résolue par M. Caffarel, à Marseille.

QUESTION 21

Solution par M. P. G. la Chesnais, Lycée Henri IV.

On donne un cercle de centre O, *un diamètre* AB *et les tangentes* Δ, Δ' *aux extrémités de ce diamètre. Une tangente variable* Δ" *au cercle rencontre* Δ *en* C, *et* Δ' *en* D. *Par le point* C *on mène une parallèle qui rencontre le rayon* OD *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand* Δ" *roule sur le cercle* O — (G.-L.) — (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Abaissons la perpendiculaire IH sur AB.

Les triangles rectangles OIH, OCA étant semblables, il en résulte la proportion

$$\frac{AC}{OA} = \frac{OH}{IH} \text{ ou } \frac{IH^2}{OH} = R,$$

si j'appelle R le rayon du cercle. Le lieu du point I est donc un système de deux paraboles ayant toutes deux leur sommet en O, AB pour axe et $\frac{R}{2}$ pour paramètre.

Nota. — La solution donnée dans le numéro de juillet est inexacte.

QUESTION 22

Solution par M. Simonet, maître répétiteur au Lycée de Chaumont.

On partage une droite fixe AB *en deux parties par un point mobile* C: *sur chacun des segments* AC, BC *on construit des triangles équilatéraux* ADC, CEB; *on demande :*

1° Le lieu géométrique du milieu du côté DE *du triangle* CDE;

2° Le lieu de son centre de gravité;

3° Le lieu du point de concours des hauteurs;

4° Le lieu du centre du cercle circonscrit;

5° De déterminer le point C *de façon que la somme des volumes engendrés par les deux triangles tournant autour de* AB *soit minima.*

Joignons FC et soit FF' parallèle à AB. En abaissant EN, F'H', FH perpendiculaires sur AB et joignant FN on a

$$\frac{F'H'}{EN} = \frac{BF'}{BE};$$

or $EN = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$, $BF' = NF = \frac{AC + BC}{2}$

Donc

$$F'H' = FH = \frac{BC\sqrt{3}}{2BC} \times \frac{AC + BC}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{4} = \text{constante}$$

Le lieu du point F est donc une parallèle à AB menée par le point F.

2° Le centre de gravité G du triangle DCE est aux $\frac{2}{3}$ de la droite FC à partir de C. Soit GI perpendiculaire sur AB. On a

$$GI = \frac{2}{3} HF$$

ou, en remplaçant FH par sa valeur trouvée précédemment,

$$GI = \frac{AB}{2\sqrt{3}} = \text{constante}.$$

Le lieu du point G est une parallèle à AB menée par G.

3° Soit O le point de concours des hauteurs; menons OK parallèle à AB, et OL et KM perpendiculaires sur AB. L'angle PDC valant 30°, $PC = \frac{DC}{2} = \frac{AC}{2}$. Or le triangle OEK' étant isoscèle, $OK' = EK'$. L'angle K'OP valant 30°.

$$K'P = \frac{OK'}{2} = \frac{EK'}{2}.$$

Donc

$$CK' = PC + PK' = \frac{AC + EK'}{2} = \frac{AC + EC - CK'}{2}$$

ou encore $CK' = \frac{AB}{2}$;

mais $KM = \frac{KB\sqrt{3}}{2}$

et $KM = OL . K'C = KB$;

donc $OL = \frac{AC + BC}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Le lieu géométrique du point O est encore une parallèle à AB et cette parallèle se confond avec celle menée par le point G.

4° Le centre I du cercle circonscrit au triangle DCE s'obtient en élevant des perpendiculaires sur les milieux des côtés DC et CE. Quelle que soit la position du point C sur AB, ces perpendiculaires passeront toujours par A et B et formeront avec AB des angles de 30°. De sorte que le triangle AIB est fixe; son sommet l'est aussi et I est situé sur le lieu des points O et G.

5° Soit $AC = 2x$, $BC = 2y$, $AB = 2a$.

Le volume engendré par ADC est $2\pi x^3$; le volume engendré par BEC est $2\pi y^3$; la somme à rendre minima est $x^3 + y^3$.

Or $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3axy$.

Ceci montre que le minimum de $x^3 + y^3$ correspond au maximum de xy, c'est-à-dire quand $x = y$.

Donc C est le milieu de AB.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Vazou, élève au collège Rollin ; Pigeaud, au lycée de Châteauroux; Vigy, à Vitry-le-François; Deville, à Lorient.

QUESTION 27

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Le nombre n *étant entier, on demande de vérifier les propositions suivantes:*

1° $(2n + 1)^5 - (2n + 1)$ *est divisible* par 240.

Cette expression peut s'écrire:

$$(2n + 1)\,[(2n + 1)^4 - 1].$$

On sait déjà que, si $(2n + 1)$ n'est divisible ni par 5, ni par 3, le second facteur est divisible par 5 et par 3.

D'autre part on a :

$$(2n+1)^4 - 1 = [(2n+1)^2 - 1][(2n+1)^2 + 1] = 8n(n+1)(2n^2 + 2n + 1).$$

Sous cette forme, on voit facilement que ce nombre est divisible par 16 ; or, les nombres 3, 5, 16 étant premiers entre eux deux à deux, on en déduit que l'expression considérée est divisible par le produit $3 \times 5 \times 16$, ou 240.

2° $3^{2n+2} - 8n - 9$ *est divisible par* 64.

Cette expression peut s'écrire

$$(8+1)^{n+1} - 8(n+1) - 1 ;$$

or, $(8+1)^{n+1} - 1$ est un multiple de $8 + 1 - 1$, ou 8 ; le quotient est :

$$(8+1)^n + (8+1)^{n+1} + \ldots + (8+1) + 1.$$

On voit facilement qu'il est un multiple de 8, augmenté de $(n+1)$.

Par suite l'expression devient

$$8[m8 + (n+1)] - 8(n+1).$$

On voit donc que cette expression est divisible par 64.

3° $3^{2n+3} + 40n - 27$ *est divisible par* 64.

Cette expression s'écrit

$$3^3 . 3^{2n} - 27 + 40n, \text{ ou } 27(9^n - 1) + 40n.$$

Or $9^n - 1$ est divisible par 8 ; le quotient est de la forme $8p + n$.

Donc l'expression devient

$$27 . 8[8p + n] + 40n = m64 + 8[27 + 5]n ;$$

on en déduit facilement la proportion énoncée.

4° $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *est divisible par* 7.

L'expression peut s'écrire

$$3 . 3^{2n} + 4 . 2^{2n}.$$

Or $3^{2n} = m7 + 2^n$.

Donc l'équation devient

$$m7 + (3 + 4) - 2^n.$$

Sous cette forme, on voit bien qu'elle est divisible par 7.

5° $3^{2n+2} + 2^{6n-1}$ *est divisible par* 11.

L'expression devient

$$9 . 3^{2n} + 2 . 8^{2r}.$$

Or $3^{2n} = m11 - 2^n$; $8^{2n} = m11 - 2^n$.

Donc, on a $m11 - 11 . 2^n$, c'est-à-dire un multiple de 11.

6° $3 . 5^{2n+1} + 2 . {}^{3n+1}$ *est divisible par* 17.

En effet, cette expression peut s'écrire

$$15 . 25^n + 2 . 8^n.$$

Or $25^n = m\,17 + 8^n$.

Donc on a $m17 + 17 . 8^n$, ou un multiple de 17.

7° *L'expression* $3^{4n+4} - 4^{3n+3}$ *est divisible par* 17 (*).

En effet, cette expression devient

$$81^{n+1} - 64^{n+1},$$

qui est divisible par $81 - 64$ ou 17.

QUESTION 38

Solution par M. Bablon, élève du Collège d'Epinal.

On considère un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB *et* CO. *Soit* T *la tangente au point* A *et* M *un point quelconque de* T, *supposé mobile sur cette droite; de ce point* M *on peut mener au cercle proposé une seconde tangente* MQ. *Ayant projeté le point* M *en* P *sur le diamètre* CO, *on joint le point* P *au point de contact,* Q *et d'un point fixe* S *pris dans l'espace on abaisse une perpendiculaire sur* PQ. *Démontrer que le lieu des pieds de ces perpendiculaires est un cercle.*

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Les deux triangles OMP et OMQ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux ; OM commun ; OQ = MP = OA ; MQ = OP = AM. Ces deux triangles sont rectangles; donc AP est parallèle à OM ; si on joint BP, BC est égal et parallèle aussi à OM, car la figure OMBP est un parallélogramme. Les droites BP et QP se confondent donc; par suite PQ passe par le point fixe B. Tous les triangles tels que SIB étant rectangles en I, le lieu géométrique des points tels que I est donc sur une circonférence décrite sur BS comme diamètre.

Note. — La même question a été résolue par MM. Auric, à Orange ; Pigeaud, à Châteauroux; Deville, à Lorient; Simonet, à Chaumont; Vigy, à Vitry-le-François.

(*) Énoncé rectifié.

QUESTIONS PROPOSÉES

49. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît un angle, la hauteur issue du sommet de cet angle, et la somme des perpendiculaires abaissées du pied de cette hauteur sur les deux autres côtés. *(Hallowell.)*

50. — On considère un angle droit AOB, et sur OB un point fixe M; on trace une droite rencontrant OB au point Q, OA au point P, et telle que, si du point M on abaisse une perpendiculaire MH sur PA, on ait toujours la relation

$$\frac{PH^2}{OP^2} - \frac{MH^2}{OQ^2} = 1 ;$$

démontrer que la droite PQ passe par un point fixe.

(G. L.)

51. — On considère un cercle O et deux diamètres rectangulaires AB, CD ; on joint le point C à un point M, pris arbitrairement sur AB, et en ce point M on élève à CM une perpendiculaire qui rencontre O aux points P et Q ; si en ces points P, Q, on mène les tangentes au cercle, ces droites se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique quand le point M se déplace sur AB.

(G. L.)

52. — On prend un angle droit AOB, et sur OB un point fixe M. Soit C un cercle, tangent en O à la droite OA. Menons par M une tangente à ce cercle, et soit P le point de contact ; menons OP et les bissectrices des angles formés par les droites OB et MP. Démontrer que le lieu décrit par les points I et I' où ces bissectrices rencontrent OP, est un système de deux droites quand on fait varier le cercle C.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 17378-2.

NOTE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. G. de Longchamps.

1. — Nous rappellerons ici, pour nos jeunes lecteurs, qu'on donne le nom d'analyse indéterminée à cette partie de l'algèbre dans laquelle on se propose la résolution, en nombres entiers ou en nombres commensurables, de p équations à q inconnues; p étant plus petit que q. De récents travaux de MM. Catalan, Realis, Ed. Lucas, Césaro, etc. (1), ont montré tout le parti qu'on pouvait tirer, pour la solution de ce problème, des identités algébriques. Les résultats que nous exposons dans cette note reposent aussi sur cette base qui permet de présenter, par un procédé tout à fait élémentaire, quelques points intéressants et délicats de la théorie des nombres.

2. — Considérons l'expression irrationnelle y:

$$y = (\alpha + \sqrt{\beta})\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}.$$

On peut l'écrire $y = \sqrt{P + Q\sqrt{\beta}}$

en posant

$$P = \alpha^3 + 3\alpha\beta$$
$$Q = 3\alpha^2 + \beta.$$

Pour reconnaître dans quel cas y peut se décomposer en radicaux simples, il faut former la quantité U:

$$U = P^2 - \beta Q^2.$$

On trouve

$$U = (\alpha^2 - \beta)^3;$$

on a donc identiquement

$$(\alpha^3 + 3\alpha\beta)^2 - \beta(3\alpha^2 + \beta)^2 = (\alpha^2 - \beta)^3$$

ou, en posant $\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\beta = -c$,

$$(a^3 - 3ab^2c)^2 + c(3a^2b - b^3c)^2 = (a^2 + b^2c)^3. \qquad \text{(A)}$$

Cette relation a lieu *identiquement*, c'est-à-dire pour toutes les valeurs attribuées aux lettres a, b, c.

(1) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1879 et 1880.

3. — Proposons-nous maintenant de résoudre, en nombres entiers, l'équation $x^2 + py^2 = z^3$, (1)
p étant un nombre entier donné; x, y, z, étant les inconnues. Il résulte de l'identité (A) qu'en posant

$$(A)' \begin{cases} x = a^3 - 3pab^2 \\ y = 3ba^2 - pb^3 \\ z = a^2 + pb^2 \end{cases}$$

a, b *étant des nombres entiers indéterminés*, l'équation proposée admet toutes les solutions entières données par ces formules, quelles que soient les valeurs entières attribuées aux lettres a et b.

4. — Considérons maintenant l'équation plus générale

$$qx^2 + py^2 = z^3, \qquad (2)$$

dans laquelle, bien entendu, p et q sont des nombres entiers donnés. Nous allons, pour la résoudre, transformer l'identité (A) en posant $c = \frac{p}{q}$; on obtient ainsi la relation identique pour toutes les valeurs attribuées aux lettres a, b, p, q :

$$(B)\ q\,(qa^3 - 3ab^2p)^2 + p\,(3a^2bq - b^3p)^2 = (a^2q + b^2p)^3.$$

Il résulte de cette identité que les formules

$$(B') \begin{cases} x = qa^3 - 3\,ab^2p \\ y = 3a^2\,bq - b^3p \\ z = a^2q + b^2p, \end{cases}$$

dans lesquelles a et b sont des nombres entiers arbitraires, donnent des solutions entières de l'équation (2).

5. — Ces formules, bien que renfermant deux variables arbitraires, indépendantes, a et b, ne donnent pas *toutes les solutions entières* de l'équation (2). Pour mettre en évidence ce fait important, observons qu'en posant

$$x = \lambda z$$
$$y = \mu z$$

on aura

$$(B'') \begin{cases} z = q\,\lambda^2 + p\,\mu^2 \\ x = q\,\lambda^3 + p\,\mu^2\lambda \\ y = q\,\lambda^2\mu + p\mu^3. \end{cases}$$

Dans ces formules, λ et μ doivent être considérés comme des nombres entiers arbitraires, et indépendants. Il est facile

d'observer que les formules (B′) et (B″) ne sont pas équivalentes, et nous entendons par là que toute solution donnée par (B′) n'est pas toujours et nécessairement obtenue par (B″), ou inversement. Par exemple, donnons à λ et μ des valeurs arbitraires, entières, différentes de zéro. Les formules (B″) font connaître pour z des valeurs correspondantes et, la plus petite d'entre elles est évidemment celle qu'on obtient en supposant $\lambda = 1$, et $\mu = \pm 1$; on trouve alors, en prenant $\lambda = 1$, $\mu = 1$:

$$x = y = z = p + q.$$

Considérons maintenant les formules (B′) ; pour obtenir la valeur $(p + q)$ de z, il faut supposer $a = \pm 1$ $b = \pm 1$ et les valeurs correspondantes de x et de y sont

$$\pm x = q - 3p$$
$$\pm y = 3q - p,$$

qui, en général, ne sont pas égales à celles que nous avons trouvées au moyen des formules (B″).

6. — On peut encore déduire de l'identité (A) une solution de l'équation $$x^2 + y^3 = z^3. \qquad (3)$$

Supposons en effet que les nombres a, b, c, qui figurent dans cette identité, satisfassent aux deux relations

$$c = 3\,a^2b - b^3c$$
$$a = 1 + b^3\,;$$

on en déduit $$c = 3\,ab$$
et, par suite, $$c = 3b\,(1 + b^3)\,;$$
on aura donc, identiquement,

$$[(1 + b^3)^2(1 - 8b^3)]^2 + [3b\,(1 + b^3)]^3 = [(1 + b^3)(1 + 4b^3)]^3.$$

Les formules

$$\pm x = (1 + b^3)^2(1 - 8b^3)$$
$$y = 3b(1 + b^3)$$
$$z = (1 + b^3)(1 + 4b^3)$$

dans lesquelles b est un nombre entier arbitraire, donnent des solutions de l'équation (3).

7. — On peut généraliser les résultats précédents en suivant la méthode élémentaire que nous venons d'exposer.

Si l'on considère, en effet, l'expression

$$y = (\alpha + \sqrt{\beta})\;\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}\;\;\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$$

qui peut s'écrire

$$y = \sqrt{\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2 + (4\alpha^3 + 4\alpha\beta)\sqrt{\beta}}$$

ou $$y = \sqrt{P + Q\sqrt{\beta}};$$

en posant $$P = \alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2$$
$$Q = 4\alpha^3 + 4\alpha\beta,$$

on trouve $$P^2 - Q^2\beta = (\alpha^2 - \beta)^4.$$

On a donc *identiquement*

$$(\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2)^2 - \beta(4\alpha^3 + 4\alpha\beta) = (\alpha^2 - \beta)^4$$

ou, en posant $\alpha = \frac{a}{b}$ $\beta = -c$,

$$(a^4 - 6a^2b^2c + b^4c^2)^2 + c(4a^3b - 4b^3ac)^2 = (a^2 + cb^2)^4.$$

On peut ainsi trouver des solutions entières de l'équation

$$x^2 + py^2 = z^4, \tag{4}$$

au moyen des formules

$$\pm x = a^4 - 6a^2b^2p + b^4p^2$$
$$\pm y = 4a^3b - 4b^3ap$$
$$\pm z = a^2 + pb^2$$

dans lesquelles a et b désignent, comme tout à l'heure, des nombres entiers arbitraires.

8. — On voit, sans que nous ayons besoin d'insister sur ce point, comment on pourra poursuivre indéfiniment ces recherches et obtenir des formules de résolution, renfermant deux paramètres variant arbitrairement, par des valeurs entières pour les équations

$$x^2 + py^2 = z^m$$

et même pour les équations

$$qx^2 + py^2 = z^m,$$

quand m est impair. On trouvera ainsi que l'équation

$$qx^2 + py^2 = z^5 \tag{5}$$

est résolue par les formules

$$(C') \begin{cases} \pm x = q^2a^5 - 10a^3b^2pq + 5ab^4p^2 \\ \pm y = 5q^2a^4b - 10a^2b^3pq + b^5p^2 \\ z = a^2p + b^2q \end{cases}$$

qui résultent de l'identité

$$q(q^2a^5 - 10a^3b^2pq + 5ab^4p^2)^2$$
$$+ p(5q^2a^4b - 10a^2b^3pq + b^5p^2)^2 = (a^2q + b^2p)^5.$$

Mais la généralisation de ces résultats, lorsque l'exposant de z est supposé quelconque, quoique très facile, ne peut se faire sans sortir du cadre élémentaire que nous avons fixé à cet article.

9. — Nous donnerons ici une dernière application de l'identité (B).

Considérons l'équation

$$qx^2 + py^2 = 1 \tag{6}$$

et soit $x = \theta', \quad y = \theta,$

une solution particulière; il est facile de reconnaître qu'il existe alors *une infinité de solutions entières de l'équation* (6).

On a, en effet, d'après (B),

$$q(q\theta'^3 - 3p\theta^2\theta')^2 + p(4q\theta\theta'^2 - p\theta^3)^2 = (q\theta'^2 + p\theta^2)^3;$$

mais on suppose que

$$q\theta'^2 + p\theta^2 = 1,$$

on peut donc dire que les nombres

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \theta'(q\theta'^2 - 3p\theta^2) \\ y_1 &= \theta(3q\theta'^2 - p\theta^2) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

donnent $qx_1^2 + py_1^2 = 1.$

On pourra donc ainsi calculer, de proche en proche, une infinité de solutions de l'équation (6).

Exemple. — *Soit l'équation*

$$3x^2 - 2y^2 = 1.$$

On aperçoit immédiatement la solution

$$x = \theta' = 1, \quad y = \theta = 1;$$

les formules (7) donnent

$$x_1 = 9, \quad y_1 = 11.$$

On a bien, en effet,

$$3 \times 81 - 2 \times 121 = 1.$$

On trouve ensuite

$$x_2 = 8721, \quad y_2 = 10681.$$

On peut vérifier que

$$(8721)^2 = 76055841$$
$$(10681)^2 = 114083761$$

et l'on a bien

$$3 \times 76055841 - 2 \times 114083761 = 1.$$

10. — Pour montrer, en terminant cette note, toute la délicatesse de ces questions d'analyse indéterminée qui nous paraissent, au moins par un certain côté, ressortir autant de l'algèbre élémentaire que la théorie des nombres, nous voulons faire remarquer que l'équation (6) qui vient de nous occuper ne peut pas être résolue par des formules algébriques, parce que, comme nous allons le démontrer, cette équation n'admet pas toujours une solution entière.

Considérons, en effet, l'équation particulière

$$7x^2 - 5y^2 = 1, \qquad (8)$$

nous allons reconnaître qu'elle n'admet pas de solution en nombres entiers. Observons d'abord que, pour une raison évidente, y n'est pas un multiple de 7; alors y est de l'une ou de l'autre des formes y_1, y_2, y_3;

$$y_1 = 7A \pm 1$$
$$y_2 = 7A \pm 2$$
$$y_3 = 7A \pm 3$$

(A étant un nombre entier).

On a, d'après cela,

$$5y_1^2 + 1 = 5(7A \pm 1)^2 + 1 = M \,.\, 7 + 6$$
$$5y_2^2 + 1 = 5(7A \pm 2)^2 + 1 = M \,.\, 7$$
$$5y_3^2 + 1 = 5(7A \pm 3)^2 + 1 = M \,.\, 7 + 1.$$

L'équation (8) exige donc que y soit de la forme

$$(7A \pm 2).$$

Cette remarque faite, on peut reconnaître que si l'on pose

$$5(7A \pm 2)^2 + 1 = 7 \,.\, B,$$

tous les nombres B, nombres entiers obtenus en donnant à A des valeurs entières arbitraires, sont terminés par un 8 ou par un 3.

Vérifions-le d'abord pour des valeurs particulières de A. Pour $A = 1$, on a

$$5(7 - 2)^2 + 1 = 126;$$

donc $$B = 18.$$

Pour $A = 2$ on a

$$5(14 - 2)^2 + 1 = 721;$$

donc $$B = 103.$$

Supposons donc que la propriété ait lieu pour une valeur

particulière de A, et montrons qu'elle subsiste quand on augmente A d'une unité.

On a en effet $7(A+1)-2=7A+5$ et nous supposons que

$$5(7A-2)^2=(10\alpha+3)\times 7 \qquad (9)$$

α et A étant, bien entendu, des nombres entiers. D'ailleurs

$$5(7A+5)^2+1=5(7A-2+7)^2+1$$

ou $\quad 5(7A+5)^2+1=5(7A-2)^2+70(7A-2)+246$

et d'après (9) et en observant que

$$246=7\times 34+8$$

$$5(7A+5)^2+1=M\,.\,7+8.$$

Les nombres B seront donc, alternativement, terminés par un 3 ou par un 8. L'égalité

$$7x^2=5y^2+1$$

est donc impossible, en nombres entiers, aucun nombre terminé par un 3 ou par un 8 ne pouvant être un carré parfait.

CONCOURS GÉNÉRAL DE PHILOSOPHIE 1881

Solution par M. Hadamard, élève au Lycée Louis-le-Grand.

On donne un carré inscrit ABCD (fig. 1), *et un point* I *du plan. On joint le point* I *aux quatre sommets. Les droites obtenues coupent le cercle en quatre nouveaux points* A', B', C', D'.

1° *Démontrer que dans le quadrilatère* A'B'C'D', *on a*

$$A'B'\,.\,C'D'=A'D'\,.\,B'C'.$$

2° *Étant donné le quadrilatère* A'B'C'D' *satisfaisant à cette condition, placer le point* I *de manière à retrouver le carré* ABCD.

1° Les triangles IAB, IA'B' sont semblables et donnent

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{IA'}{IB}=\frac{t}{IA\,.\,IB}$$

(t étant la puissance du point I par rapport au cercle).

De même $\qquad \dfrac{C'D'}{CD}=\dfrac{IC'}{ID}=\dfrac{t}{IC\,.\,ID};$

d'où $$\frac{\mathrm{AD\ .\ BC}}{\mathrm{A'B'\ .\ C'D'}} = \frac{t^2}{\mathrm{IA\ .\ IB\ .\ IC\ .\ ID}};$$

de même $$\frac{\mathrm{A'D'\ .\ B'C'}}{\mathrm{AD\ .\ BC}} = \frac{t^2}{\mathrm{I\ .\ A\ IB\ .\ IC\ .\ ID}}.$$

Ces deux proportions ayant les trois derniers termes égaux chacun à chacun, les premiers termes sont aussi égaux, et le théorème est démontré.

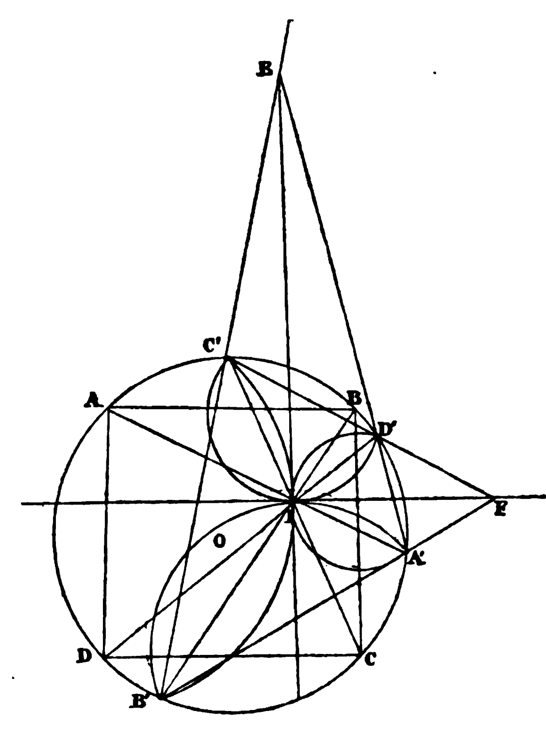


Fig. 1.

REMARQUE. — Le rapport $\frac{\mathrm{A'B'\ .\ C'D'}}{\mathrm{A'D'\ .\ B'C'}}$ est égal au rapport anharmonique (A'B'C'D') (*). On pourrait en déduire une autre démonstration du théorème précédent, puisque les points A, A'; B, B'; C, C'; D, D' divisent homographiquement le cercle, et que (ABCD) $= -1$.

2° L'angle B'IA' a pour mesure la demi-somme des arcs

(*) Car $$\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A'D'}} \cdot \frac{\mathrm{C'D'}}{\mathrm{B'C'}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ A'B'}}{\sin\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ A'D'}} : \frac{\sin\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ A'B'}}{\sin\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ C'D'}}$$

$=$ (U . A'B'C'D'), U étant un point du cercle.

AB, A'B'; il est donc égal à $45^\circ + \frac{\text{arc A'B'}}{2}$, ce qui donne un premier lieu du point I. On en a un second en décrivant sur A'D' un segment capable de $45^\circ + \frac{\text{A'D'}}{2}$. Ces deux cercles se coupent en deux points, dont l'un est le point A' et dont l'autre répond à la question. Car, en joignant IA', IB', IC', ID', on obtient les arcs AB, AD égaux chacun à un quadrant. Mais si

$$\text{A'B'} \cdot \text{C'D'} = \text{A'D'} \cdot \text{B'C'}, \text{AB} \cdot \text{CD} = \text{AD} \cdot \text{BC} \quad (1^\circ),$$

ou, puisque AB = AD, CD = CB. Le point C est donc le milieu de BD et ABCD est un carré.

Il en résulte que le point I appartient, non seulement aux cercles que nous avons décrits pour le trouver, mais encore aux cercles analogues décrits sur C'D' et C'B'. Or ces cercles, coupant le cercle donné sous les angles de 45°, sont orthogonaux; les cercles IA'B', IC'D' sont donc tangents en I, ainsi que les cercles IB'C', ID'A', et les tangentes communes sont rectangulaires. Or ces tangentes passent respectivement par les points d'intersection E, F des côtés opposés du quadrilatère A'B'C'D' (*fig. 1*); en effet, le point d'intersection E des cordes B'A', B'C', interceptées sur les cercles IA'D', IB'C' par le cercle donné, est sur l'axe radical de ces cercles, c'est-à-dire sur la tangente en I. Donc, *du point* I *on voit la droite* EF *sous un angle droit.*

Malheureusement la solution que nous venons de donner manque de la généralité désirable. Car si le point I est hors du cercle, l'angle $\overline{\text{B'IA'}}$ n'est plus égal à $45^\circ + \frac{\text{A'B'}}{2}$, mais à $\frac{\text{A'B'}}{2} - 45^\circ$ ou à $45^\circ - \frac{\text{A'B'}}{2}$. Nous allons donner une solution générale.

Elle s'appuie sur le théorème que nous venons de démontrer, mais que nous avons à démontrer à nouveau indépendamment de la position du point I.

Pour cela, il suffit de remarquer que les quatre cercles que nous avons considérés sont les inverses des côtés du carré par rapport au point I et à la puissance IA . IA',

et que par conséquent, puisque les angles du carré sont droits, ces cercles sont orthogonaux deux à deux ; le reste comme ci-dessus.

De plus, on voit du même point sous un angle droit les points de rencontre ε, φ des tangentes aux sommets opposés du quadrilatère A′B′C′D′. En effet, transformons ce quadrilatère avec le même pôle et la même puissance que ci-dessus. Le point D′ devient D et la tangente D′φ une circonférence passant par le point I et tangente au cercle O; son centre est donc sur la droite DOB. L'inverse de B′φ est de

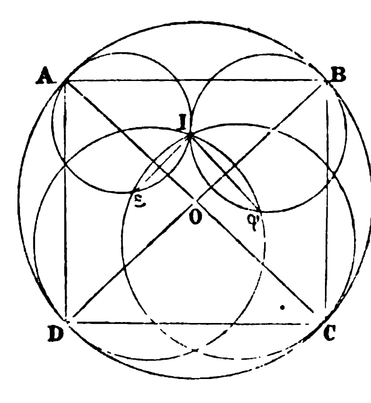


Fig. 2.

même une circonférence ayant son centre sur BD. La ligne des centres de ces deux circonférences est donc BD, et leur corde commune Iφ′ est perpendiculaire à BD. De même Iε′ est perpendiculaire à AC. Donc l'angle εIφ, égal à ε′Iφ′, est droit.

Or les points E, F sont conjugués, et il en est de même des points ε, φ. Car les points A′, B′, C′, D′, et par suite les tangentes en ces points sont en rapport harmonique. Donc $(\varepsilon KC'L) = -1$. De même $(\varepsilon K'A'L') = -1$, et la droite A′C′, polaire de ε, passe par le point φ, intersection de KK′ et de LL′.

De plus les points E, F, ε, φ sont en ligne droite. Donc *du point* I *on voit sous un angle droit les couples de points conjugués situés sur la troisième diagonale du quadrilatère* A′B′C′D′. Les points I, I′, d'où l'on voit sous un angle droit ces couples, s'obtiennent en portant sur le diamètre OH perpendiculaire à EF, de part et d'autre du point H, la distance $H^2 - n^2$, égale à la tangente HT du point H. Ces points sont conjugués par rapport au cercle, car on a $HI^2 = HT^2 = HM \,.\, HN$ (M, N étant les points d'intersection de OH avec le cercle).

Si le point I est donné, la droite EF est parfaitement

déterminée. Car I' devra être le conjugué harmonique de I par rapport à MN, et EF la perpendiculaire au milieu de II'.

Il en résulte que les points I, I' répondent tous deux à la question.

De notre démonstration il résulte que *si, le point* I *restant fixe, le carré* ABCD *tourne dans le cercle, la droite* EF *reste fixe, ainsi que son pôle, qui est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère* A'B'C'D'.

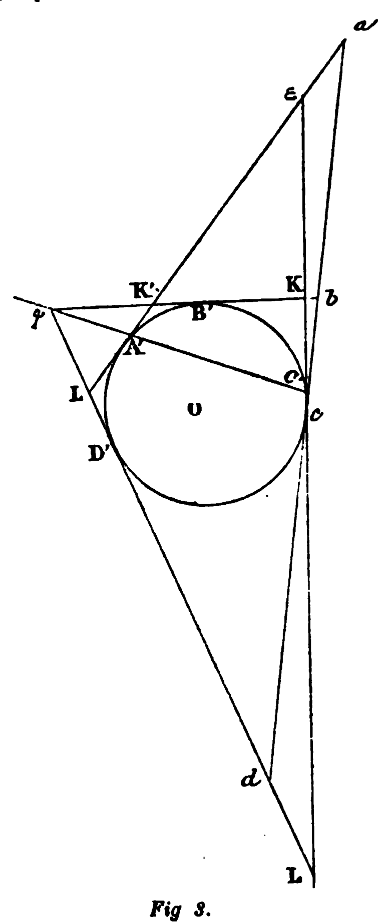


Fig 8.

Généralisation. — Appelons, dans un système de quatre points A, B, C, D, couple de lignes deux lignes telles que AC, BD où AC joint deux des quatre points, BD les deux autres, et donnons pour valeur à ce couple le produit AC.BD.

Cela posé, si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques les quatre points A, B, C, D, je dis que les rapports des couples entre eux seront conservés.

Car on montrerait comme plus haut que

$$\frac{A'C'.B'D'}{AD.BC} = \frac{t^4}{IA.IB.IC.ID} = \frac{A'D'.B'C'}{AD.BC} = \frac{A'B'.C'D'}{AB.CD}.$$

De même, dans un polygone quelconque d'un nombre de côtés pair, le rapport du produit des côtés de rang pair à celui des côtés de rang impair est conservé.

Cela posé, soient deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' tels

que $$\frac{A'C'.B'D'}{AC.BD}=\frac{A'D'.B'C'}{AD.BC}=\frac{A'B'.C'D'}{AB.CD},$$
cherchons le pôle et la puissance d'une transformation par rayons vecteurs réciproques où les points A, B, C, D deviendront des points formant un quadrilatère égal au quadrilatère A'B'C'D'.

Soit I l'origine et a^2 la puissance. On a
$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{IB.IC}{a^2};\quad \frac{AC}{A'C'}=\frac{IA.IC}{a^2}.$$
Divisant membre à membre, il vient
$$\frac{BC}{B'C'}:\frac{AC}{A'C'}=\frac{IB}{IA}.$$
De même $$\frac{AC}{A'C'}:\frac{AB}{A'B'}=\frac{IC}{IB}$$
et une troisième relation qui est satisfaite quand les deux premières le sont.

Ces deux premières nous donnent pour lieux du point I deux circonférences se coupant en deux points I et I' qui, on le démontrerait facilement, répondent à la question pour le triangle ABC, c'est-à-dire qu'en transformant ce triangle avec chacun de ces points pour origine et une puissance convenablement choisie, on obtient deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ égaux à A'B'C'. Transformons aussi le point D, nous obtenons les points δ, δ'. Si les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont égaux, on a
$$\frac{IA}{ID}=\frac{AB}{\alpha\beta}:\frac{BD}{B\delta}=\frac{AB}{\alpha'\beta'};\frac{BD}{\beta'\delta'}=\frac{I'A}{I'D}$$
ou $$\frac{IA}{I'A}=\frac{IB}{I'B}=\frac{IC}{I'C}=\frac{ID}{I'D}$$
et la circonférence lieu des points tels que le rapport de leurs distances à I et à I' soit égal à $\frac{IA}{I'A}$ passera par les points A, B, C,D. Le quadrilatère ABCD sera donc inscriptible.

Écartons pour le moment ce cas, et faisons coïncider les triangles A'B'C', $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$. Puisque les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ne sont pas égaux, les nouvelles positions δ_1, δ_1' des points δ, δ' seront distinctes. Mais on a

$$\frac{A'B'.C'D'}{A'C'.B'D'}=\frac{AB.CD}{AC.BD}=\frac{A'B'}{A'C'}\,\frac{C'\delta'_1}{B'\delta'_1}(1^{re}\text{ part.})=\frac{A'B'.C'\delta'_1}{A'C'.B'\delta'_1}$$

ou, en supprimant les facteurs communs :

$$\frac{C'D'}{B'D'}=\frac{C'\delta_1}{B'\delta_1}=\frac{C'\delta'_1}{B'\delta'_1},$$

et de même

$$\frac{A'D'}{C'D'}=\frac{A'\delta_1}{C'\delta_1}=\frac{A'\delta'_1}{C'\delta'_1}.$$

Mais il n'y a que deux points tels que leurs distances aux points A', B', C' soient proportionnelles à A'D', B'D', C'D'. Comme δ_1 et δ_1' sont distincts, D' coïncide avec un d'eux et un seul, et le problème a une solution et une seule.

Si le quadrilatère ABCD est inscriptible, le quadrilatère donné A'B'C'D' doit l'être aussi; les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont égaux entre eux et inscriptibles dans une circonférence égale à la circonférence A'B'C'D'. On en conclut aisément, en raisonnant comme ci-dessus, que le problème a deux solutions.

Le même problème peut être résolu par des considérations angulaires.

En effet l'angle AIB a pour mesure la somme ou la différence des demi-arcs AB, *ab* *a*, *b* étant les points où les droites IA IB, coupent le cercle ABC) ou la somme ou la différence des demi-arcs AB,A'B', suivant que le point I est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle ABC. Mais ces demi-arcs ont pour mesure les angles *c*, *c'* ou leurs suppléments, suivant que le point I est du même côté de BA que le point *c* ou de côtés différents. Donc l'angle AIB est égal à *c* — *c* ou à *c* + *c'* ou à *c'* — *c* ou

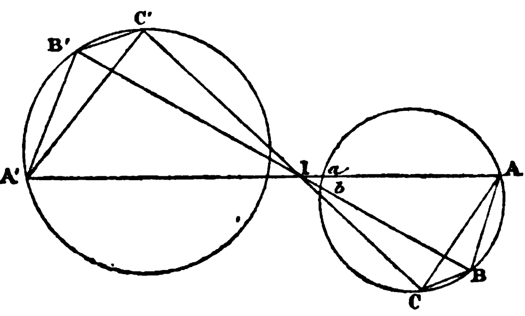


Fig. 4.

a $4d - (c + c')$. On aura ainsi des lieux du point I dont l'intersection donnera les points cherchés, si le problème est possible.

Mais la condition de possibilité est facile à exprimer. Car pour que l'angle BAC devienne égal à B'A'C', il faut que BIC soit égal A — A' ou à A' — A, ou à A + A' ou à $4d$—(A+A').
De même, pour que BDC devienne égal à B'D'C', il faut que BIC soit égal à D — D', etc., suivant la position du point I. En égalant ces valeurs de BIC dans toutes les positions du point I, on obtient une des conditions cherchées.

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, il est facile de démontrer que le problème est possible, excepté dans le cas du quadrilatère inscriptible, où ces conditions ne sont pas suffisantes.

Or, voici à quelles conditions on arrive :

Appelons demi-couple d'angles deux angles tels que ACB, ADB. *c* et D seront les sommets et AB la base. Le demi-couple de base CD sera le conjugué du précédent et leur ensemble formera un couple ayant pour base le couple de lignes l(ABCD). La valeur d'un demi-couple sera la différence de ses angles, si les sommets sont du même côté de la base, et leur somme dans le cas contraire. On verrait sur une figure que deux demi-couples conjugués sont égaux ou ont pour somme $4d$. On peut donc prendre pour la valeur λ du couple de base l, la valeur d'un de ses demi-couples.

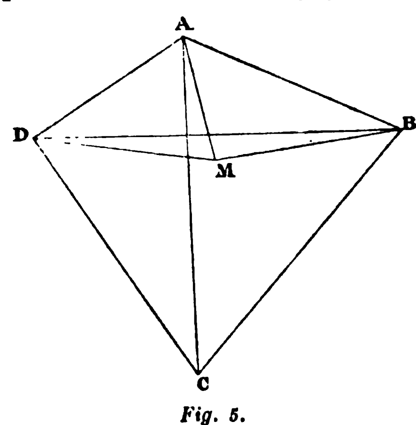


Fig. 5.

Cela posé, les conditions trouvées se réduisent à celle-ci, que les couples d'angles soient conservés.

Mais on peut établir plus rapidement cette condition en montrant qu'elle est équivalente à la relation segmentaire

trouvée plus haut, excepté dans le cas du quadrilatère inscriptible.

A cet effet prenons la figure dont on se sert pour démontrer la proposition contraire du théorème de Ptolémée.

On sait que l'on fait l'angle DAM = CAB et l'angle MDA = ACB et que l'on obtient ainsi les deux triangles DAM, ABC et AMB, DAC. Il en résulte

$$\frac{DA}{DM} = \frac{AD}{CB} \text{ ou } AD.BC = AC.DM$$

$$\frac{AB}{DM} = \frac{AC}{CD} \text{ ou } AB.CD = AC.MB.$$

D'où
$$\frac{AD.BC}{DM} = \frac{AB.CD}{MB} = \frac{AC.BD}{BD}.$$

Les trois côtés du triangle DMB sont donc proportionnels aux trois couples de lignes l, m, n du quadrilatère. Mais ses angles sont les trois couples d'angles λ, μ, ν de ce même quadrilatère. Car on a

$$DMB = DMA + AMB = ABC + ADC = \lambda$$
$$MDB = MDA - BDA = BCA - BDA = \mu$$
$$DBM = MBA - DBA = DCA - DBA = \nu.$$

On voit donc que nos deux relations segmentaire et angulaire sont toutes deux équivalentes à celle-ci, que le triangle DMB et le triangle D'M'B' construit de la même façon dans le quadrilatère A'B'C'D', sont semblables.

Dans le seul cas du quadrilatère inscriptible, la relation angulaire ne prouve pas la similitude des triangles DMB, D'M'B'', parce que deux triangles réduits à des lignes droites ne sont pas, pour cela, semblables; quoiqu'ils soient équiangles.

Le triangle DMB permet encore de voir que nos trois relations angulaires se réduisent à deux, puisque la somme des couples est toujours $2d$.

Des propriétés de ce triangle on peut aussi déduire des propriétés du quadrilatère. Pour cela, on n'aura qu'à remplacer dans les relations

$$\frac{\sin \lambda}{l} = \frac{\sin \mu}{m} = \frac{\sin \nu}{n},$$
$$l = m \cos \nu + n \cos \mu, \text{ etc.}$$

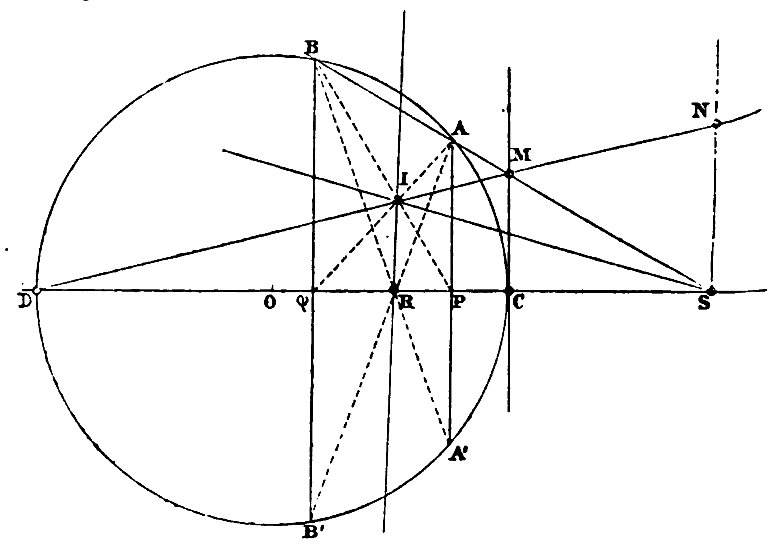
l, m, n, λ, μ, ν par leurs valeurs.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. H. Bourget, à Aix.

Théorème. — *Soit* DCS *le diamètre d'un cercle* O; BAS *une sécante. On mène les ordonnées* AP, BQ *des points* A *et* B. *On tire les lignes* AQ, BP *qui se coupent en* I. *On joint le point* I *au point* D, *la ligne* DI *coupe* BAS *en* M. *Démontrer que le point* N *est sur la tangente en* C.

Élevons par le point S une perpendiculaire DCS; et prolongeons DIM jusqu'à sa rencontre en N avec cette ligne



D'après un théorème connu, une parallèle à NS, AP par exemple, étant divisée en deux parties égales par SI, le faisceau [S, N, M, I, D] est harmonique ; donc la droite DN est divisée harmoniquement par les quatre points N, M, I, D.

Abaissons de I une perpendiculaire sur le diamètre DCS. Il est évident que si nous démontrons que la ligne DS est divisée harmoniquement par les points D,R,C,S, nous aurons

démontré le théorème, parce que le point M se trouvera sur une perpendiculaire MC à l'extrémité du diamètre.

Or il est facile de voir au moyen des lignes de la figure que RI est la polaire du point S par rapport au cercle O. Donc les quatre points divisent bien harmoniquement la droite DS. Par suite le théorème est démontré.

Corollaire 1. — *Dans une conique, si de deux points* A *et* B *on mène deux cordes conjuguées à un diamètre* DC *et qu'on cherche l'intersection* I *des diagonales du trapèze formé par ces cordes et le diamètre, et qu'on joigne le point* I *au sommet* D, *la ligne* DI *coupera* AB *en un point* M *situé sur la tangente en* C.

On obtient ce théorème par la méthode projective. La question 13 *(Journ. math. spéc.)* n'en est qu'un cas particulier.

Corollaire 2. — *Ce théorème permet de construire une conique connaissant trois points, la direction du diamètre passant par un de ses points, la direction du diamètre conjugué.*

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS — JUILLET 1882

Résoudre $$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=0.$$

—Étant donnée une sphère de rayon R, déterminer la distance OP du centre à un point P, de façon que la surface latérale du cône circonscrit à la sphère et ayant pour sommet le point P, soit équivalente à la surface de la calotte sphérique ACB, limitée par le cercle de contact et extérieure au cône.

— Calculer les valeurs de tg$a$ déterminées par l'équation

$$\operatorname{tg}(a+45)+\operatorname{tg}(a-45)=\frac{3}{2}.$$

— Soit O le centre d'une sphère de rayon R ; soit A un point extérieur à la sphère. On construit le cône circonscrit ABC, qui a pour sommet A et le cône OBC, qui a même base, et dont le sommet est au centre O de la sphère. Calculer la distance OA, sachant que la somme des volumes de ces cônes est égale aux $\frac{3}{8}$ du volume de la sphère.

— Si, dans l'expression $\frac{ax+b}{x^2+1}$, on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$, cette expression passe par un maximum et un minimum. Déterminer les nombres a et b de façon que le maximum soit $+4$, et le minimum -1.

— L'angle a étant donné par la relation $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$, calculer la valeur de $\operatorname{tg} 3a$.

— Prouver que si, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont rectangulaires, les deux dernières arêtes sont rectangulaires l'une à l'autre.

— Dans le triangle ABC, AB = 12^m ; AC = 8^m. On propose de déterminer le troisième côté BC de façon que le segment DH, intercepté entre la hauteur AH et la bissectrice AD de l'angle BAC, soit égale à 3^m.

— Déterminer les limites entre lesquelles demeurent comprises les valeurs de la fraction
$$\frac{(2x+1)^2}{x^2+1},$$
quand on fait varier x en lui attribuant des valeurs réelles quelconques.

Calculer la base et la hauteur d'un triangle isoscèle connaissant les volumes V et V' engendrés par le triangle tournant successivement autour de sa base et autour d'un autre côté.

ROUEN

Calculer en degrés, minutes et secondes les valeurs de x comprises entre o et 360, satisfaisant à l'équation
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x + \sin 2x = 0.$$

ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE L'ANNÉE 1882

Mathématiques.

1. — Trouver la somme des termes de la suite
$$1 + 2x^2 + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

2. — Résoudre l'équation
$$x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{16} + \frac{1}{32} = 0.$$

3. — Par un point fixe A on fait passer une série de droites rencontrant une droite donnée MN, et sur chaque segment tel que AB, on construit un triangle semblable à un triangle donné ; trouver le lieu des sommets P de ces triangles.

4. — Maximum et minimum de
$$\frac{x^3 - x^2 + 3x^4 - 3x^5}{3x - 3 + x^2 - x^3}.$$

Trigonométrie et calcul.

1. — Calculer les distances des deux points C et C' à la droite passant par les deux points inaccessibles A et A', connaissant

CC' = 64989^m98
ACC' = $41° 28' 37'', 42$
C'CA' = $59\ 49\ 59, 87$
AC'C = $62\ 38\ 48, 98$
CC'A' = $37\ 25\ 17, 79$.

2. — **Résoudre un triangle, et en calculer la surface, connaissant les trois angles et le rayon du cercle inscrit**

$$A = 71° 21' 45'', 36$$
$$B = 32\ 43\ 27, 92$$
$$C = 75\ 54\ 46, 72$$
$$r = 11929,\ 98.$$

QUESTION 376

Solution par

L'arête d'un dièdre donné α *est tangente à une sphère de rayon* R. *Quelle doit être, par rapport au plan diamétral de contact, la position de ce dièdre pour que la surface de sphère interceptée par le dièdre soit maxima?*

Soient x et $\alpha - x$ les angles qui font les faces du dièdre avec le plan diamétral; l'expression dont on cherche le maximum est, comme on peut facilement le reconnaître,

$$4\pi R^2 [1 - \cos^2 x - \cos^2 (\alpha - x)].$$

La quantité entre crochets peut s'écrire

$$\sin^2 x - \cos^2 (\alpha - x)$$

ou encore $$\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos^2 (\alpha - x).$$

Sous cette forme on peut facilement la transformer en un produit, et l'on trouve pour la quantité à rendre maxima, l'expression $$\cos \alpha \cos (2x - \alpha).$$

Cette expression sera maxima, quand on aura

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

Donc le plan diamétral est bissecteur de l'angle dièdre.

QUESTION 379

Solution par M. Hellot, élève au lycée Corneille, à Rouen.

Déterminer les côtés d'un triangle, connaissant le périmètre 2p, *sachant que* $bc = m^2$, *et que les médianes correspondant aux côtés* b *et* c *sont à angle droit.*

Soient β et γ les médianes correspondant aux côtés b et c;

on a, d'après des relations connues,

$$2a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = 2(\beta^2 + \gamma^2).$$

De plus, les médianes se coupant à angle droit, aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet, on a

$$\frac{4}{9}(\beta^2 + \gamma^2) = a^2.$$

On déduit de ces deux équations la relation suivante

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Donc les trois équations du problème sont

$$a + b + c = 2p$$
$$b^2 + c^2 = 5a^2$$
$$bc = m^2.$$

On élimine facilement b et c, ce qui donne l'équation

$$5a^2 + 2m^2 = (2p - a)^2$$

ou $$2a^2 + 2ap - 2p^2 + m^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$5p^2 - 2m^2 \geq 0.$$

De plus, la somme des racines étant négative, il faut, pour que le problème ait une solution, que les racines soient de signes contraires, ce qui donne la condition

$$2p^2 - m^2 \geq 0,$$

qui entraîne la précédente ; il y a alors une seule solution pour a; on en tire ensuite facilement b et c.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Derome, à Valenciennes, et Fiévet, à Lille.

QUESTION 1

Solution par M. H. BOURGET, à Aix.

Démontrer que le polynôme

$$A = n(n + 1)(n + 2)x^n - 6n.1x^{n-1} - 6(n - 1)2x^{n-2}$$
$$6(n - 2)3x^{n-3} - \ldots - 6.2(n - 1)x - 6n$$

est exactement divisible par $x - 1$ *et donner le quotient.*

(G. de Longchamps.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme

entier en x soit divisible par $x - 1$, c'est que 1 substitué à x annule le polynôme.

Substituons donc 1 à x dans le polynôme proposé, il devient

$$A = n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2 - 6(n-2)3 - \ldots - 6.2(n-1) - 6.1n.$$

D'après ce que nous venons de dire, on doit avoir

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = n.1 + (n-1)2 + (n-2)3 + \ldots + 2(n-1) + 1n.$$

Si nous développons le second membre de cette égalité nous aurons, toutes réductions faites,

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 1n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)n + n.n - [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2]$$

ou, effectuant les sommes indiquées et réduisant au même dénominateur,

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{3n(1+n)n - 3n(n-1) - (n-1)n(2n-1)}{6}$$

ou

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{3n(1+n)n - 2n(n-1)(n+1)}{6}$$

ou enfin

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Il est aisé de vérifier que le quotient est

$$[n(n+1)(n+2)]x^{n-1} + [n(n+1)(n+2) - 6n.1]x^{n-2} + [n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2]x^{n-3} + \ldots + [n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2 - \ldots - 6.2(n-1)]x + [n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2 - \ldots - 6.2(n-1) - 6.1n].$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Paul Godefroy, à Lyon.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Mécanique élémentaire, *à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences, et des candidats aux Écoles navale, militaire et forestière, par* M. Combette, *professeur au lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Germer-Baillière

Au moment de rendre compte de l'ouvrage nouveau de M. Combette, je ne crois pas devoir reprendre l'observation générale que j'ai déjà eu l'occasion de faire sur les programmes de mécanique dans l'enseignement secondaire. J'accepte, tel qu'il est, l'ordre suivi par l'auteur, et je ne puis que le féliciter de la manière dont il a développé son programme, et des détails dans lesquels il est entré. M. Combette a traité à fond, autant que le permet l'étude élémentaire de la mécanique, toutes les questions qui font partie du cours de mathématiques 2me année; mais je signalerai plus particulièrement aux lecteurs les chapitres suivants :

Réduction des forces à deux ;

Conditions d'équilibre d'un solide libre et les six équations ;

Conditions d'équilibre d'un solide qui n'est pas libre ;

Les machines, à propos desquelles M. Combette décrit les principaux types de machines simples usuelles ;

L'étude géométrique détaillée du mouvement des projectiles dans le vide ;

Le travail et la transmission du travail dans les machines.

Les exemples intéressants qui accompagnent chacune des théories importantes sont choisis de façon à bien faire comprendre l'application des divers principes à la solution des problèmes de mécanique ; les exercices qui viennent après chaque livre contiennent, ou bien des théorèmes qui sortent des limites du programme, et qu'il peut être pourtant utile de connaître, ou bien des problèmes présentant pour les élèves un grand intérêt, soit parce qu'ils donnent des résultats souvent assez simples, soit parce qu'ils proviennent de questions d'examen.

M. Combette a indiqué par un astérisque les questions qui ne font pas partie du programme du baccalauréat ; il est à désirer que même les aspirants à ce grade prennent la peine d'étudier complètement ce cours de mécanique, dont les candidats aux Écoles ne doivent négliger aucune partie, sans se préoccuper du programme.

Je terminerai cette notice en signalant aussi l'exécution matérielle de cet ouvrage ; l'éditeur a eu soin de mettre des figures très nettes, de grande dimension ; les modèles de machines ont été choisis parmi les types les plus parfaits et reproduits avec une très grande netteté ; ces avantages, joints au fond même de l'ouvrage, contribuent à en faire un traité fort recommandable.

A. M.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1882

Algèbre.

Un professeur, pour donner à ses élèves une idée succincte de la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 + px + q = 0$, les engage à remplacer x par $y - \frac{m}{y}$, ou par $m \sin \varphi$, en disposant de l'indéterminée m de telle sorte que l'équation transformée soit résoluble à la manière des équations du second degré, ou de la relation trigonométrique entre $\sin 3\varphi$ et $\sin \varphi$, et donne immédiatement une racine réelle. On en déduira les trois racines de l'équation proposée.

Appliquer ce procédé aux équations

$$x^3 + bx - 2 = 0\,; \quad x^3 - bx - 2 = 0,$$

et faire le calcul avec la précision que peuvent donner les tables à cinq décimales.

Géométrie descriptive.

Dans un plan $P\alpha P'$, perpendiculaire au plan vertical, et faisant un angle φ avec le plan horizontal, on décrit une circonférence sur la portion AB de la trace horizontale αP prise comme diamètre. Construire la surface engendrée par ce cercle tournant autour d'un axe vertical dont la projection horizontale C divise le diamètre AB en deux parties telles que

$$\frac{AC - CB}{AC + CB} = \sin \varphi.$$

Pour représenter les projections du corps ainsi engendré, on supposera que la partie située au-dessus de $P\alpha P'$ a été supprimée. (Épure à main levée.)

Mécanique.

1. — Description de l'injecteur Giffard.

2. — Engrenage à roues elliptiques, destiné à transmettre la rotation d'un axe à un autre axe parallèle dans un rapport qui varie entre des limites données.

QUESTIONS PROPOSÉES

53. — On considère l'expression

$$u = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

et on propose de la transformer en un produit de deux facteurs de la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Démontrer que la transformation n'est possible que si $a^2d = bc$, et qu'elle n'est avantageuse que si les nombres $a^2 - b$, $a^2 - c$ sont carrés parfaits.

Exemple

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + 3)}{6}$$

(G. L.)

54. — Résoudre le système d'équations à trois inconnues

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 - d^2}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{a}{d};$$

$$\frac{2y(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{2z(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{c}{d},$$

en supposant $a^2 + b^2 + c^2$ différent de d^2.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 18840-2.

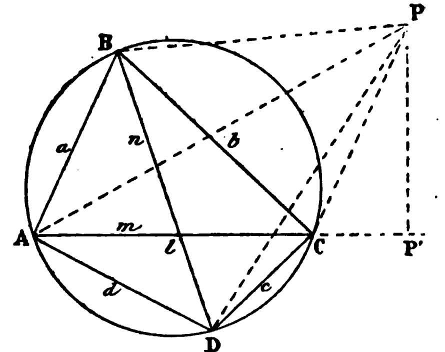
NOTE
SUR LES PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

Par M. **X. Antomari**, professeur au Lycée de Carcassonne.

Les propriétés dont il va être question sont relatives aux relations bien connues entre les côtés et les diagonales. Elles se déduisent simplement de la propriété générale suivante :

Dans tout quadrilatère inscriptible, si on multiplie l'aire du triangle formé par trois des sommets par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par une diagonale est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par l'autre diagonale.

Je sais, pour l'avoir vu à la fin du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, que cette proposition est due à Luchterhandt, qui l'a publiée dans le *Journal de Crelle*, t. XXIII. A la fin du même *Traité de Géométrie*, la démonstration de cette proposition est donnée comme application de la multiplication des déterminants. Par cela même, elle ne peut être enseignée en Mathématiques élémentaires. Nous allons en donner une simple, à la portée des commençants, et qui n'exige que la connaissance de la propriété du carré du côté d'un triangle opposé à un angle aigu ou à un angle obtus, ainsi que la propriété du produit des segments déterminés par une circonférence sur les sécantes issues d'un point.



Voici cette démonstration :

Soient ABCD le quadrilatère inscrit dans le cercle de centre O, et P un point

quelconque de son plan. Les diagonales de ce quadrilatère le partagent en quatre triangles; nous désignerons d'une manière générale l'aire de l'un de ces triangles par la lettre du sommet opposé. Par exemple, nous appellerons A l'aire du triangle BCD. Soient *a*, *b*, *c*, *d* les côtés du quadrilatère, *m* et *n* ses diagonales, enfin R le rayon du cercle circonscrit.

Remarquons d'abord que les deux triangles ABD et BCD ayant même base BD, on a

$$\frac{AI}{IC} = \frac{C}{A}$$

ou bien

$$\frac{AI}{C} = \frac{IC}{A} = \frac{m}{S}$$

en désignant par S l'aire du quadrilatère. On en déduit

$$AI = \frac{mC}{S}, \qquad (1)$$

$$IC = \frac{mA}{S}, \qquad (2)$$

Joignons le point P aux sommets du quadrilatère et au point I, et soit P' sa projection sur AC. La considération des deux triangles API et IPC donne :

$$\overline{AP}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{AI}^2 + 2AI \times IP',$$
$$\overline{CP}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IC}^2 - 2IC \times IP'.$$

Multiplions la première de ces relations par IC, la deuxième par IA et ajoutons. Nous aurons

$$IC \times \overline{AP}^2 + IA \times \overline{CP}^2 = \overline{IP}^2 \times (AI + IC) + AI \times IC \times (AI + IC),$$

relation que l'on peut écrire

$$IC \times \overline{AP}^2 + IA \times \overline{CP}^2 = m\left(\overline{IP}^2 + R^2 - \overline{OI}^2\right), \qquad (3)$$

puisque AI × IC est la puissance du point I. Enfin, si l'on tient compte des valeurs de IA et de IC données par (1) et (2), la relation (3) donne, après la suppression du facteur *m*,

$$A \times \overline{AP}^2 + C \times \overline{CP}^2 = S\left(\overline{IP}^2 + R^2 - \overline{OI}^2\right).$$

Le second membre ne dépendant que de la surface du quadrilatère et de la position du point I, on en conclut

$$A \times \overline{AP}^2 + C \times \overline{CP}^2 = B \times \overline{BP}^2 + D \times \overline{DP}^2$$
$$= S\,(IP^2 + R^2 - \overline{OI}^2) \text{ (*)} \qquad (4)$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Dans tout quadrilatère inscriptible le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Supposons en effet que le point P coïncide avec le point A par exemple, et rappelons que l'on a

$$A = \frac{bcn}{4R} \quad B = \frac{cdm}{4R} \quad C = \frac{adn}{4R} \quad D = \frac{abm}{4R}. \qquad (5)$$

D'ailleurs, on voit sur la figure que

$$AP = 0, \quad CP = m, \quad BP = a, \quad DP = d.$$

La relation (4) devient ainsi

$$\frac{adn}{4R} \times m^2 = \frac{cdm}{4R} \times a^2 + \frac{abm}{4R} \times d^2.$$

La suppression du facteur commun $\frac{adm}{4R}$ donne finalement

$$mn = ac + bd \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire II. — *Dans tout quadrilatère inscriptible le rapport des diagonales est égal au rapport des sommes des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la même diagonale.*

Supposons en effet que le point P coïncide avec le point O. Alors on a $AP = CP = BP = DP = R$. La relation (4) devient

$$A + C = B + D$$

et en tenant compte de (5) on aura

$$\frac{n}{4R}(ad + bc) = \frac{m}{4R}(ab + cd),$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Remarque. — La démonstration qu'on donne de ces deux propriétés, dans les cours de Mathématiques élémentaires, repose sur la similitude. Celle que nous venons d'indiquer

(*) On peut remarquer que la démonstration s'applique à un point quelconque de l'espace.

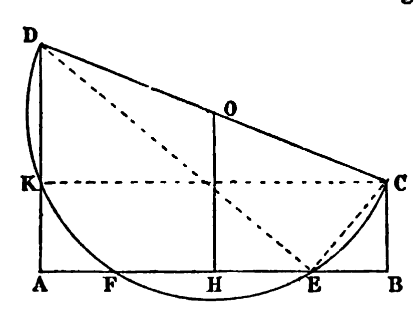
nous semble préférable parce qu'elle les fait découler d'une propriété générale; en outre, la démonstration de cette propriété générale n'exige aucun effort de mémoire pour les constructions, effort devant lequel les élèves reculent toujours, au moins pour ce qui concerne le corollaire II.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Dans le troisième livre de Géométrie élémentaire, on étudie en général deux problèmes de construction de lignes, en donnant une forme particulière à l'énoncé; nous nous proposons ici de traiter ces problèmes d'une manière plus générale, et d'en déduire les conditions de possibilité, et aussi les constructions ordinaires dans le cas particulier dont nous parlons. L'idée de cette généralisation ne nous appartient pas; nous avons trouvé, dans l'*Algèbre* de M. Burat l'indication de la construction relative au premier problème, à l'occasion d'une question d'algèbre qui n'est que la traduction de l'énoncé que nous allons indiquer.

Problème I. — *Construire deux lignes, connaissant leur somme et leur produit;* ou autrement, *construire les dimensions d'un rectangle, connaissant le périmètre et les dimensions d'un rectangle équivalant.*

Soient AB la somme des deux lignes, m et n les dimensions du rectangle donné. Au point A j'élève à AB une perpendiculaire AD égale à m, et au point B une perpendiculaire BC égale à n; ces deux perpendiculaires étant mesurées *du même côté de* AB. Je mène la ligne CD, et sur CD comme diamètre je décris une circonférence, qui, en général, coupe AB en deux points E, F; les lignes cherchées sont AE, EB, ou AF, FB.



Pour le prouver, je mène les lignes DE, EC; les deux triangles semblables DAE, ECB, me donnent immédiatement

$$\frac{AE}{CB} = \frac{AD}{EB},$$

ou

$$AE \cdot EB = mn.$$

La perpendiculaire abaissée du point O, milieu de CD, sur AB, tombe en H, milieu de AB; ce point H est aussi le milieu de la corde EF; il en résulte que AF = EB.

Pour que le problème soit possible, il faut que la circonférence CD rencontre AB; ce qui exige que OH soit inférieur à $\frac{CD}{2}$.

Or

$$OH = \frac{m+n}{2},$$

et

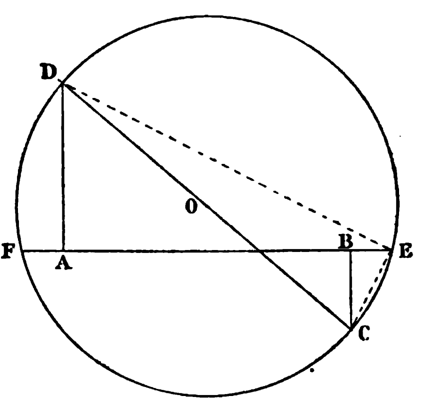
$$CD^2 = CK^2 + DK^2 = AB^2 + (m-n)^2.$$

On en tire facilement $mn < \frac{AB^2}{4}$.

Donc le carré de la demi-somme donnée doit être supérieur à la surface du rectangle.

Corollaire. — *Si* m *et* n *sont égaux entre eux,* CD *est parallèle à* AB, AD *est tangent en* D *à la circonférence, et l'on retrouve la solution ordinaire, en renversant la figure.*

Problème II. — *Trouver les côtés d'un rectangle, connaissant la différence des côtés et les dimensions d'un rectangle équivalent.*



Soient AB la différence donnée, m et n les dimensions du rectangle donné. J'élève encore aux points A et B, mais *de côtés différents de* AB, des perpendiculaires AD et BC égales respectivement à m et à n; sur CD comme diamètre je décris une circonférence qui rencontre en

E et F la ligne AB ; les lignes AE, BE sont les lignes cherchées. Je le démontrerais, comme précédemment, en considérant les triangles ADE, BCE.

Le problème est toujours possible, car il y a forcément une intersection de la droite AB avec la circonférence DC, celle-ci ayant, par la construction même, des points de part et d'autre de AB.

Corollaire. — *Si* m *et* n *sont égaux, la droite* AB *a son milieu au centre* O *de la circonférence. Si, alors, sur* AB *comme diamètre, je décris une circonférence concentrique à la première,* BC *sera tangent à cette seconde circonférence, et comme* OC *est égal à* OE, *on retrouve la construction habituelle du cours.*

AUTRE NOTE DE GÉOMÉTRIE

La propriété bien élémentaire dont nous voulons parler ici se démontre de plusieurs manières différentes ; en particulier, on peut en donner la démonstration suivante :

Théorème. — *La tangente issue d'un point à une circonférence est moyenne proportionnelle entre une sécante entière issue du même point et la partie extérieure de cette sécante.*

Pour le prouver je mène le diamètre qui passe par le point A ; j'ai d'après un théorème connu

$$AB.AC = AE.AF = (AO - R)(AO + R)$$

ou

$$AB.AD = AO^2 - R^2.$$

Soit AD la tangente issue du point A ; le triangle rectangle AOD me donne

$$AD^2 = AO^2 - OD^2 = AO^2 - R^2.$$

Donc

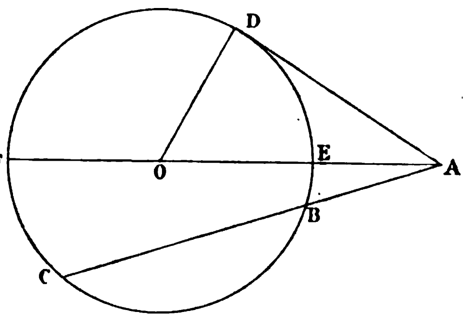
$$AD^2 = AB.AC.$$

Théorème. — *Réciproquement, deux droites se coupant au point* A, *si sur l'une on prend deux points* B, C, *du même côté de* A, *et sur l'autre un point* D, *tel que* $AD^2 = AB.AC$, *la circonférence qui passe par les points* B, C, D, *est tangente à* AD *au point* D.

Soient en effet O le centre de cette circonférence, et R son rayon; j'ai, en vertu d'un théorème connu,

$AB.AC = AO^2 - R^2$.

Mais, daprès l'hypothèse, j'ai $AB.AC = AD^2$ donc $AD^2 = AO^2 - R^2$, ou bien, puisque OD est égal au rayon, $AD^2 + OD^2 = AO^2$; par suite le triangle AOD est rectangle en D, et la ligne AD, perpendiculaire à l'extrémité du rayon, est tangente en D à la circonférence.



CONCOURS GÉNÉRAL

Solution de la question proposée en Mathématiques élémentaires,
par M. Em. Bernheim (*),
Élève au Lycée Charlemagne. (Classe de M. Launay.)

Un pentagone ABCMD *se déforme en satisfaisant aux conditions suivantes : les sommets* A *et* B *restent fixes, les cinq côtés conservent chacun la même longueur. Enfin les angles variables* ADM, BCM, *comptés dans un même sens de rotation. restent constamment égaux entre eux. Sur* MC *on construit un triangle* MCF *semblable au triangle* MDA, *le côté* MC *ayant pour homologue* BD. *Sur* MD *on construit un triangle* MDF *semblable à* MCB, *le côté* MD *ayant pour homologue* BC. *Le pentagone se déformant dans les conditions définies, on propose :*

1° D'étudier les variations de la longueur EF*;*

2° De trouver le lieu décrit par le sommet M*;*

3° De trouver les conditions nécessaires pour que M *décrive une droite* Δ *;*

(*) Premier prix.

4° De trouver les conditions nécessaires pour que la droite Δ *passe par le sommet* A ;

5° Le point M *décrivant une droite* Δ *passant par* A, *on considère le cas particulier où les deux côtés* AD, MD *du pentagone sont égaux entre eux, et l'on demande le lieu que décrit un point quelconque invariablement lié au côté mobile* MD *du pentagone.*

1. — Pour étudier les variations de la longueur de EF cherchons une expression de cette longueur.

Dans le triangle EMF on a

$$EF^2 = ME^2 + MF^2 - 2ME \,.\, MF \cos EMF. \qquad (1)$$

Or les angles EMF, AMB sont égaux. En effet on a

$$BMF = BMC - FMC = MED - MAE = AME$$

et, par suite,

$$BME + BMF = AME + EMB \text{ ou } EMF = AMB.$$

D'autre part, le triangle MCF étant par construction semblable à AMD, on a :

$$\frac{MF}{MA} = \frac{MC}{AD}$$

d'où

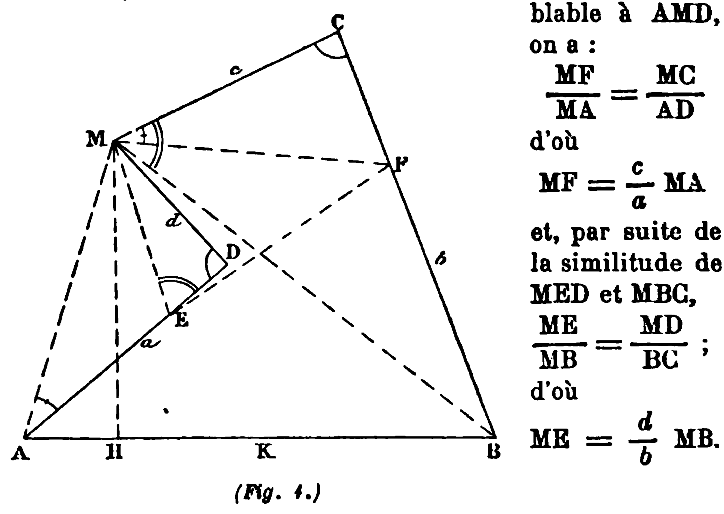
$$MF = \frac{c}{a} MA$$

et, par suite de la similitude de MED et MBC,

$$\frac{ME}{MB} = \frac{MD}{BC};$$

d'où

$$ME = \frac{d}{b} MB.$$



(Fig. 1.)

L'égalité (1) devient donc

$$EF^2 = \frac{c^2}{a^2} MA^2 + \frac{d^2}{b^2} MB^2 - 2\frac{cd}{ab} MA \,.\, MB \cos AMB.$$

Or, dans le triangle AMB, on a

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \,.\, MB \cos AMB;$$

d'où $\qquad 2MA \,.\, MB \cos AMB = MA^2 + MB^2 - K^2.$

Par suite,

$$EF^2 = \frac{c^2}{a^2} MA^2 + \frac{d^2}{b^2} MB^2 - \frac{cd}{ab}\left(MA^2 + MB^2\right) + \frac{cd}{ab} K^2$$

ou $EF^2 = \left(\frac{c}{a} - \frac{d}{b}\right)\left(\frac{c}{a} MA^2 - \frac{d}{b} MB^2\right) + \frac{cd}{ab} K^2$

ou encore

$$EF^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left[(bc - ad)(bcMA^2 - adMB^2) + abcdK^2\right].$$

D'autre part les deux triangles ADM, BCM donnent

$$AM^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos ADM$$

et $$BM^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos BCM.$$

Les angles ADM, BCM étant égaux, on a donc

$$\frac{a^2 + d^2 - AM^2}{ad} = \frac{b^2 + c^2 - BM^2}{bc}$$

ou $$bcMA^2 - adMB^2 = bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2). \quad (2)$$

Par suite l'expression de EF^2 devient

$$EF^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left[(bc - ad)[bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2)] + abcdK^2\right]$$

ou,

$$EF^2 = \frac{1}{a^2b^2}\Big[b^2c^2(a^2 + d^2) + a^2d^2(b^2 + c^2)$$
$$- abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - K^2)\Big].$$

Cette expression ne contient que les longueurs données des côtés du pentagone ; la longueur EF est donc *constante.*

2. — Cherchons le lieu du sommet M.

Pour cela abaissons du point M sur AB la perpendiculaire MH : appelons y sa longueur, x la distance de son pied H au point A. On a alors

$$MA^2 + y^2 + x^2 \quad \text{et } MB^2 = y^2 + (K - x)^2.$$

En remplaçant MA^2 et MB^2 par ces expressions dans l'égalité (2), on trouve

$$bc(y^2 + x^2) - ad\,[y^2 + (K - x)^2] = bc\,(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2)$$

ou $$(bc - ad)\,y^2 + (bc - ad)\,x^2 + 2Kadx = bc(a^2 + d^2)$$
$$- ad(b^2 + c^2) + adK^2 \quad (3)$$

Divisons les deux membres par $(bc - ad)$, en faisant abs-

traction du cas particulier où $bc - ad = 0$. Il vient

$$y^2 + x^2 + \frac{2Kad}{bc - ad}x = \frac{1}{bc - ad}\Big[bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2) + adK^2\Big].$$

ou, en complétant le carré en x,

$$y^2 + \left(x + \frac{Kad}{bc - ad}\right)^2 = \frac{1}{bc - ad}\Big[bc(a^2+d^2) - ad(b^2+c^2) + adK^2\Big] + \frac{K^2a^2d^2}{(bc - ad)^2}$$

ou,

$$y^2 + \left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(bc - ad)^2}\Big[[(bc - ad)[bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2)] + abcdK^2\Big]$$

Or si l'on appelle q la longueur constante EF, la parenthèse est précisément égale à $a^2b^2q^2$. On a donc

$$y^2 + \left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2 = \frac{a^2b^2q^2}{(bc - ad)^2}. \qquad (4)$$

Cherchons ce que signifie cette égalité. Pour cela considérons sur la droite AB un point P, tel que sa distance au point A soit égale en grandeur et en signe à $\frac{Kad}{ad - bc}$.

L'expression $\left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2$ représente le carré de HP. H étant la projection de M sur AB ; d'ailleurs y^2 est le carré de MH ; on a donc

$$MP^2 = y^2 + \left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2.$$

L'égalité (4) exprime donc que la longueur MP est constante, c'est-à-dire que le point M décrit un cercle ayant pour centre le point P et pour rayon la longueur $\frac{abq}{bc - ad}$.

Remarque. — La distance du centre P au point A a pour expression $\frac{Kad}{ad - bc}$ ou $\frac{K}{1 - \frac{bc}{ad}}$. On voit donc que si $\frac{bc}{ad} < 1$.

le centre P est à droite de B, et si $\frac{bc}{ad} > 1$, il est à gauche du point A.

Remarque II. — On peut facilement construire autant de points que l'on veut du lieu : en effet, si l'on se donne un angle α auquel doivent être égaux les angles D et C, on pourra construire les triangles ADM, BCM, et l'on connaîtra ainsi les longueurs MA, MB qui déterminent le point M, pourvu que α soit tel que l'on ait $MA + MB > AB$. En particulier, si l'on donne à α les valeurs 180° et 90°, on obtient très facilement quatre points du cercle, symétriques deux à deux par rapport à AB. Le cercle se trouve ainsi parfaitement déterminé.

3. — Pour que ce cercle, lieu du point M, se réduise à une droite, il faut que son centre s'éloigne à l'infini. Il suffit, pour cela, que l'on ait $bc = ad.$

En effet, si l'on suppose $bc = ad$, l'égalité (3) devient

$$x = \frac{1}{2K}(a^2 + d^2 + K^2 - b^2 - c^2).$$

Cette égalité exprime que tous les points M se projettent sur AB en un même point H situé à une distance du point A égale à $\frac{1}{2K}(a^2 + d^2 + K^2 - b^2 - c^2)$, c'est-à-dire que le lieu du point M est la perpendiculaire Hz élevée en H à AB.

Cette droite est la corde commune aux deux cercles qui ont respectivement pour centres les points A et B et pour rayons les longueurs $a + d$ et $b + c$. En effet, quand les angles D et C deviennent égaux à 180° les longueurs MA et MB sont respectivement égales à $a + d$ et $b + c$.

Remarque. — L'égalité $bc = ad$ exprime que les triangles BCM, ADM sont équivalents, car les angles C et D sont égaux, par hypothèse.

4. — Pour que la droite Hz passe par le point A, il faut que la distance AH soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + K^2 = 0. \qquad (5)$$

En effet, en supposant cette nouvelle condition réalisée

l'égalité (2) devient

$$MA^2 - MB^2 = -K^2 \text{ ou } MB^2 - MA^2 = K^2.$$

Cette égalité exprime bien que le lieu du point M est la perpendiculaire à AB au point A.

REMARQUE I. — L'égalité (5) peut s'écrire, en tenant compte de la relation $ad = bc$,

$$(a + d)^2 - (b + c)^2 + K^2 = o$$

ou $$K^2 = (b + c)^2 - (a + d)^2$$

ou encore $$K^2 = (b + c + a + d)(b + c - a - d).$$

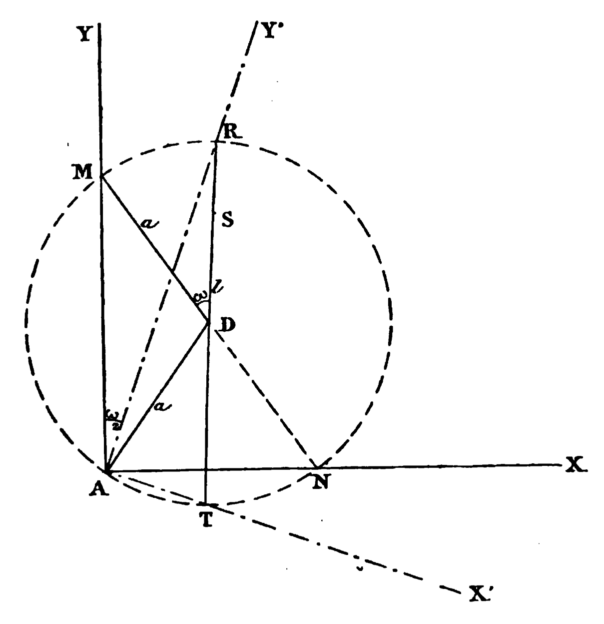
Ainsi, pour que le sommet M décrive la perpendiculaire AY à AB, il faut que la longueur du côté fixe AB soit moyenne proportionnelle entre la somme des longueurs des côtés mobiles et l'excès de la longueur de la ligne brisée BCM sur celle de la ligne brisée ADM.

REMARQUE II. — Nous avons vu que le lieu du point M est un cercle ou une droite passant par les points d'intersection des deux circonférences qui ont pour centres les points A et B et pour rayons les longueurs $a + d$ et $b + c$. Mais le point M est lié aux points A et B par des lignes brisées dont les longueurs respectives sont $a + d$ et $b + c$; les distances MA et MB ne peuvent donc être supérieures à $a + d$ et $b + c$. Par conséquent le point M ne peut décrire que la portion de circonférence ou de droite qui est située à la fois à l'intérieur des deux cercles A et B, entre leurs deux points d'intersection.

5. — Supposons maintenant que le point M parcoure la perpendiculaire AY à AB, et qu'en outre le côté MD du pentagone soit égal à AD. Soit S un point invariablement lié au côté MD: nous pouvons le supposer défini par sa distance l au point D et par l'angle ω que fait la direction DM avec DS (*fig.* 2).

Considérons une position quelconque de la ligne brisée ADM et prolongeons MD jusqu'à la rencontre de AX en N. Les triangles ADM et ADN sont isoscèles; par suite la droite MN est constamment égale à $2a$. Imaginons le cercle décrit sur MN comme diamètre : quelle que soit la position de MN, il passe toujours par le point A. Prolongeons DS jusqu'aux

points de rencontre de la circonférence en R et T : traçons les droites rectangulaires AR et AT. L'angle RAM est constant et égal à $\frac{\omega}{2}$, car il est toujours inscrit dans le cercle de rayon a et intercepte l'arc MR qui est constamment égal à $a\omega$.



(Fig. 2.)

Par suite le point R décrit la droite AY′ et le point T décrit la droite AX′ qui est perpendiculaire. D'ailleurs, la droite RT est constamment égale à $2a$. Par conséquent, le point S de la droite RT, qui est entraînée dans le mouvement de la droite MD, décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant AX′ et AY′ et ont pour longueurs respectives $2(a+l)$ et $2(a-l)$.

QUESTION 3

Résoudre l'équation

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation réciproque du quatrième degré, au sens général, signalée par M. de Longchamps dans son étude sur les équations quadratiques. On peut la résoudre très facilement et trouver les conditions de réalité des quatre racines; en effet, en divisant par x^2

et posant $$x + \frac{d}{x} = z,$$

nous avons l'équation

$$z^2 + az + b - 2d = 0.$$

Il faut d'abord que l'on ait

$$a^2 - 4b + 8d > 0;$$

puis, l'équation qui donne x en fonction de z étant

$$x^2 - zx + d = 0,$$

on doit avoir en outre $z^2 - 4d > 0$.

Ainsi, l'équation en z doit avoir ses racines réelles, et comprises en dehors de l'intervalle limité par les valeurs

$$-2\sqrt{d} + 2\sqrt{d}.$$

Toute valeur de z qui ne répond pas à ces conditions donne pour x un couple de valeurs imaginaires.

Il est à remarquer que, à chaque valeur réelle de z donnant des racines imaginaires, correspondent pour x deux valeurs imaginaires conjuguées, tandis que les valeurs de x qui proviennent d'une racine imaginaire de z ne sont pas conjuguées; l'une de ces valeurs a sa conjugée fournie par l'autre valeur de z.

NOTA. — La question a été résolue par MM. Germain, à Belley; Berthelot, à Châteauroux; Vigy, à Vitry-le-François; P. Godefroy, à Lyon; Masserand, à Passy; Sarrazin, à Besançon; A. La Chesnais, lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 8

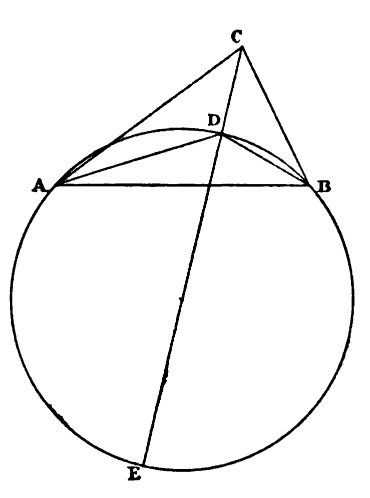
Construire géométriquement un triangle dont on connaît deux côtés et la ligne qui joint le sommet de l'angle compris au centre du cercle inscrit.

Soit ABC le triangle proposé, dont on connaît CA, CB et CD, D étant le centre du cercle inscrit. Les lignes AD, BD, CD sont les bissectrices des angles, et si l'on fait passer un cercle par les trois points A, D, B, on sait qu'il rencontre la bissectrice CD en un point E tel que l'angle DBE est droit. Maintenant, comme on a

$$CAD = DAB = BED,$$

et ACD = BCE, les triangles ACD, BCE sont semblables et donnent

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}.$$



Donc il est facile de trouver le point E; d'où cette construction:

On prend la droite CD, et sur cette ligne prolongée on prend, à partir de C, une quatrième proportionnelle CE à CD et aux côtés donnés; sur DE comme diamètre, on décrit une circonférence, et de C comme centre avec CB comme rayon, on décrit un arc de cercle, qui détermine le point B; puis, sur l'autre demi-circonférence, on déterminera le point A, à une distance CA du point C.

Nota. — Cette solution très simple est empruntée à la *Geometrical Analysis* de Benjamin Hallowell, professeur de mathématiques à Philadelphie.

QUESTION 14

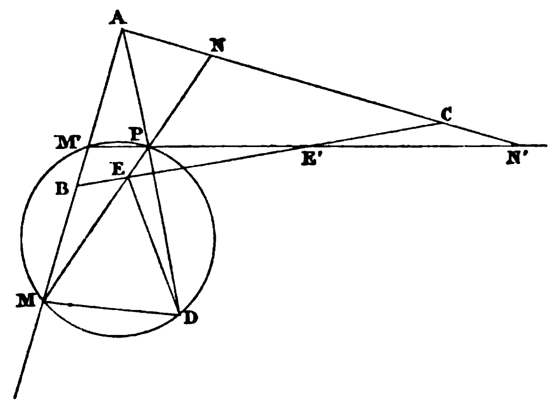
Solution par M. Pierre G. la Chesnais, à Henri IV.

Par un point pris sur la perpendiculaire abaissée dans un triangle rectangle du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, mener une droite telle que la portion comprise entre les deux côtés de l'angle droit ait son milieu sur l'hypoténuse.

(Hallowell.)

Je suppose le problème résolu.

Dans la circonférence dont le centre est en E, et qui passe en M, A, N, D (D étant le symétrique du sommet A



par rapport à l'hypoténuse), je vois que l'angle au centre MED est double de l'angle MAD :

$$\text{MED} = 2(90° - \text{B}).$$

D'ailleurs le triangle MED est isoscèle, et j'ai

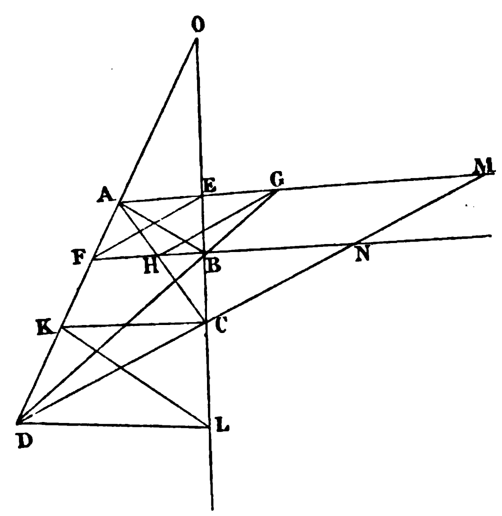
$$\text{EMD ou PMD} = \frac{180 - \text{MED}}{2} = \text{B}.$$

On obtiendrait donc le point M en construisant sur PD comme corde un segment de cercle capable de l'angle B, ce qui donne, en général, deux droites répondant à la question, MEPN, M'PE'N'.

QUESTION 24

Solution par M. DEVILLE, canonnier au régiment d'artillerie de Marine.

On donne deux triangles OAB, OCD *qui ont un angle* O *commun.* 1° *Mener par les points* A *et* B *deux parallèles* AE, BF, *qui coupent respectivement* OB *en* E, OA *en* F, *de façon que* EF *soit parallèle à* CD ; *déterminer comment varie la longueur* EF *lorsque la direction de* CD *varie.* — 2° *Le problème étant supposé résolu, on mène* BD, *qui rencontre* AE *en* G, *et* AC, *qui rencontre* BF *en* H ; *démontrer que* GH *est parallèle à* CD ; — 3° *Démontrer que deux parallèles à* AE *menées par* C *et* D *interceptent sur les deux côtés communs une droite parallèle à* AB.



Je suppose le problème résolu : j'ai alors les relations

$$\frac{OA}{OF} = \frac{OE}{OB}, \text{ et } \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OC}.$$

De ces deux proportions je tire les valeurs de OE et OF :

$$OE^2 = OA \cdot OB \cdot \frac{OC}{OD}; \quad OF^2 = OA \cdot OB \cdot \frac{OD}{OC}.$$

Je puis donc facilement construire le point E ou le point F.

J'ai de plus $$EF = CD \cdot \frac{OE}{OC};$$

par suite, en remplaçant OE par sa valeur,

$$EF^2 = OA \cdot OB \cdot \frac{CD^2}{OC \cdot OD}.$$

Or, on a

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos O.$$

Donc $$EF^2 = OA \cdot OB \cdot \left(\frac{OC}{OD} + \frac{OD}{OC} - 2\cos O\right).$$

Posant $$\frac{OC}{OD} = x,$$

le tout revient à chercher les variations de $x + \frac{1}{x}$; or, x étant positif, on sait que cette expression passe par un minimum pour $x = 1$; ce minimum donne

$$EF^2 = 2\,OA \cdot OB\,(1 - \cos O) = 4\,OA \cdot OB \sin^2 \frac{O}{2}.$$

2. Soient M et N les points où CD rencontre AE et BF; j'ai les égalités $$\frac{AG}{AM} = \frac{FB}{FN} = \frac{EB}{EC} = \frac{AH}{AC}.$$

Donc, en vertu de l'égalité du premier et du dernier rapport, GH et CD sont parallèles.

3. Soient K et L les points où les parallèles CK, DL à AE rencontrent les côtés de l'angle; j'ai la suite de rapports égaux

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OC}{OE} = \frac{OD}{OF} = \frac{OL}{OB}.$$

Donc, en vertu de l'égalité du premier et du dernier rapport, KL et AB sont parallèles.

QUESTION 29

Solution par M. Deville, canonnier au régiment d'artillerie de Marine.

Les diagonales 2a *et* 2b *d'un losange sont vues sous des angles* α *et* β *d'un point dont la distance au centre est* c. *Prouver que l'on a :*

$$b^2(a^2 - c^2)^2\, tg^2\, \alpha + a^2(b^2 - c^2)^2\, tg^2\, \beta = 4a^2b^2c^2.$$

Soit O le centre du losange(*); $OA = OA' = a$; $OB = OB'$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$= b$; P le point donné tel que $APA' = \alpha$, $BPB' = \beta$. J'abaisse PS perpendiculaire sur AA'; j'ai

$$AA'^2 = AP^2 + A'P^2 - 2AP.A'P \cos\alpha.$$

En posant $OS = x$, $PS = y$,

je trouve facilement, en remplaçant AP, A'P par leurs valeurs et élevant au carré,

$$[y^2 + (x+a)^2][y^2 + (x-a)^2] \cos^2\alpha = (a^2 - c^2)^2,$$

Mais $x^2 + y^2 = c^2$;

j'en tire

$$\cos^2\alpha = \frac{(a^2 - c^2)^2}{(a^2 + c^2)^2 - 4a^2x^2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{4a^2(c^2 - x^2)}{(a^2 + c^2)^2 - 4a^2x^2}$$

et

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{4a^2(c^2 - x^2)}{(a^2 - c^2)^2}.$$

J'aurai de même $\mathrm{tg}^2\,\beta = \dfrac{4b^2(c^2 - y^2)}{(b^2 - c^2)^2}$.

J'en tire

$$c^2 - x^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{4a^2}; \quad c^2 - y^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta}{4b^2}.$$

et en ajoutant ces égalités membre à membre, j'aurai la relation énoncée.

Nota. — La même question a été résolue par M. Puig, de Montpellier.

QUESTION 30

Solution par M. Maystre, élève au Collège du Vigan (Gard).

Trois cercles A, B, C *se touchent deux à deux, et une tangente commune à* A *et* B *est parallèle à une tangente commune à* A *et* C *; prouver que si* a, b, c *sont les rayons et* p, q *les distances des centres de* B *et* C *au diamètre de* A *qui est normal aux deux tangentes, on a* $pq = 2a^2 = 8bc$. (Wolstenholme.)

Menons CK perpendiculaire sur MB. On a

$$AM^2 = AB^2 - \overline{MB}^2 = (a + b)^2 - p^2 \qquad (1)$$
$$AN^2 = AC^2 - NC^2 = (a + c^2) - q^2. \qquad (2)$$

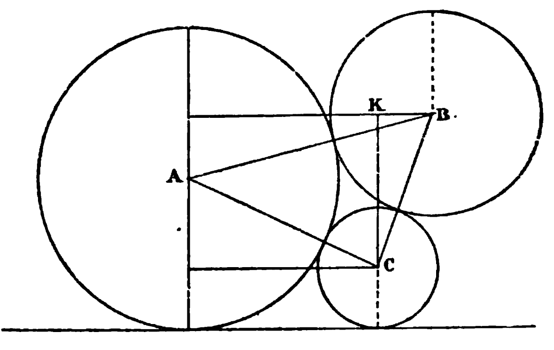
Or $AM = (a - b)$, $AN = (a - c)$, remplaçons dans (1) et (2), on a après simplifications

$$4ab = p^2,$$
$$4ac = q^2;$$

par suite $$pq = 4a\sqrt{bc}.$$

Le triangle KBC donne

$$BK^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CK}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{MN}^2$$
$$(p - q)^2 = (b + c)^2 - (2a - (b + c))^2.$$



Développant cette dernière égalité, remplaçant p^2, q^2 par les valeurs trouvées précédemment, on a

$$pq = 2a^2.$$

Nous avons trouvé $pq = 4a\sqrt{bc}$; d'après la relation précédente on a $$2a^2 = 4a\sqrt{bc}$$
ou $$a^2 = 4bc;$$
par suite $$2a^2 = 8bc;$$
donc $$pq = 2a^2 = 8bc.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Musy, collège de Pontarlier; G. Pigeaud et G. Berthelot, à Châteauroux; Vigy, à Vitry-le-François; Colin, à Bar-le-Duc; Deville, à Lorient; A. La Chesnais, lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 31

Solution par M. PUIG, élève du Lycée de Montpellier.

Déterminer le minimum du rapport de la somme des volumes engendrés par un riangle rectangle tournant successivement autour des côtés de l'angle droit, au volume engendré par le

triangle tournant autour de l'hypoténuse, en supposant que le périmètre du triangle soit constant, les côtés étant variables.

Soient a l'hypoténuse, b et c les autres côtés; h la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse; le volume engendré par le triangle tournant autour de l'hypoténuse est

$$\frac{1}{3}\pi a h^2;$$

la somme des volumes engendrés par le triangle tournant successivement autour des côtés est

$$\frac{1}{3}\pi bc\,(b+c).$$

Donc, l'expression dont on cherche le maximum est

$$\frac{bc\,(b+c)}{ah^2},$$

les quantités a, b, c, h étant liées par les relations

$$b^2+c^2=a^2,$$
$$bc=ah,$$
$$a+b+c=2p.$$

De ces équations on tire facilement b, c, h en fonction de a, et on est amené à chercher le minimum de l'expression

$$\frac{a\,(2p-a)}{2p\,(p-a)};$$

or, on sait, par la nature du problème, que a doit être positif et inférieur à p; de plus, dans ces conditions, le numérateur augmente, et le dénominateur diminue, lorsque a augmente; il en résulte que le rapport augmente pour ces deux raisons. Donc, le minimum du rapport aura lieu lorsque nous donnerons à a la plus petite des valeurs qu'il puisse prendre pour donner pour b et c des valeurs réelles.

Or, nous avons

$$b+c=2p-a; \qquad bc=(b+c)^2-a^2=2p\,(p-a).$$

Donc, b et c sont racines de l'équation

$$X^2-(2p-a)\,X+2p\,(p-a)=0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut que nous ayons $\quad (2p-a)^2-8p\,(p-a)\geq 0$

ou $\quad a^2+4pa-4p^2\geq 0.$

Comme a doit être positif, nous trouverons comme condition
$$a \geq 2p\left(\sqrt{2}-1\right).$$
Donc, le minimum de a a lieu pour
$$a = 2p\left(\sqrt{2}-1\right).$$
En portant cette valeur dans le rapport dont on cherche le minimum, on trouve $\dfrac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{3-2\sqrt{2}}$.

Or, le dénominateur étant précisément égal à $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$, le minimum du rapport est $2\sqrt{2}$, et alors le triangle est isoscèle. Ses côtés sont
$$a = 2p\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$b = c = p\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Varnier, à Bar-le-Duc; Jacquemet, Vail et Lenoir, école Albert-le-Grand, à Arcueil.

QUESTION 33

Solution par M. AURIC, au Collège d'Orange.

Trouver les côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique, que si l'on augmente chaque côté de 50 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 17 mètres, et que si chaque côté croît de 60 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 20 mètres.

Soient a le côté moyen du triangle, r la raison de la progression et x le rayon du cercle inscrit.

Les côtés du triangle sont évidemment $a+r$, a, $a-r$.

On a
$$p = \frac{3a}{2},\ p-a = \frac{a-2r}{2},\ p-b = \frac{a}{2},\ p-c = \frac{a+2r}{2}.$$
Or,
$$x = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$
ou, après réduction
$$x = \sqrt{\frac{a^2-4r^2}{12}}. \qquad (1)$$

Les énoncés nous donnent

$$x + 17 = \sqrt{\frac{(a+50)^2 - 4r^2}{12}} \qquad (2)$$

et
$$x + 20 = \sqrt{\frac{(a+60)^2 - 4r^2}{12}}. \qquad (3)$$

De (1) on tire $\quad 4r^2 = a^2 - 12x^2. \qquad (4)$

Élevant (2) et (3) au carré, on a

$$(x+17)^2 \times 12 = (a+50)^2 - 4r^2 = a^2 + 100a + 2500 - 4r^2$$

ce qui donne $\quad 408x = 100a - 968. \qquad (5)$

De même

$$(x+20)^2 \times 12 = (a+60)^2 - 4r^2 = a^2 + 120a + 3600 - r4^2$$

$$480x = 120a - 1200. \qquad (6)$$

Résolvant les équations (5) et (6) on a

x = rayon du cercle inscrit = 4 mètres.

a = côté moyen du triangle = 26 mètres.

En remplaçant dans (4) on trouve

r = raison de la progression = 11 mètres.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, au collège d'Épinal; Marsy, à Valenciennes; Mosnet, à Thiers.

QUESTIONS PROPOSÉES

55. — On considère deux droites rectangulaires, Ox, Oy, et dans un plan une courbe φ quelconque, mais symétrique par rapport à Ox. Soit M un point de cette courbe; on mène la normale en M à la courbe φ; puis, ayant pris le point M′, symétrique de M par rapport à Ox, point qui est situé sur φ, par hypothèse, on mène la tangente à φ en ce point; cette tangente et la normale en M donnent deux droites. On considère les bissectrices de leur angle; et du point O on abaisse des perpendiculaires sur ces bissectrices; lieu des pieds de ces perpendiculaires. *(G. L.)*

56. — On considère un cercle C de centre O; soit AB un diamètre fixe de ce cercle; par le point O, on mène une circonférence C′ tangente à AB; puis on mène une tangente

commune aux cercles C et C'; on propose de trouver le lieu des points de contact de cette dernière droite avec C', lieu qui se compose de deux droites parallèles. *(G. L.)*

57. — On considère un cercle C, et une droite D, tangente à C au point O; sur D, on prend deux points A et B tels que $OA.OB = K^2$, K étant une ligne donnée ; par ces points A et B, on mène à C des tangentes; soient A' et B' les points de contact. D'un point fixe P, pris dans l'espace, on abaisse sur A'B' une perpendiculaire PI; trouver le lieu décrit par le point I. *(G. L.)*

58. — On considère l'équation du quatrième degré
$$(x+\alpha)(x+\alpha+1)(x+\alpha+2)(x+\alpha+3)+h=0.$$
On propose de résoudre cette équation, et de montrer que ses racines sont imaginaires si h est supérieure à 1, deux à deux coïncidentes si $h = 1$, et réelles si h est inférieur à 1. *(G. L.)*

59. — Résoudre l'équation
$$x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta)+h=0.$$

60. — Résoudre l'équation
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0,$$
et plus généralement
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$
on fera voir que les trois racines sont toujours réelles, et même toujours commensurables si a^2+b^2 est un carré. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE. — 21308-2.

NOTE SUR LA DIFFÉRENCE

ENTRE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET LA MOYENNE GÉOMÉTRIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

Par M. **J. Bourget.**

(*Suite*, voir page 79.)

Théorème. — *La moyenne arithmétique de quantités positives dont deux au moins sont inégales, est supérieure à la moyenne arithmétique de la somme des racines* r^{es} *de leurs produits* r *à* r.

Soient $$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$$
n quantités positives qui ne soient pas toutes égales. Désignons par S'_r, $S''_r \ldots$ les sommes de ces quantités prises r à r et par P'_r, $P''_r \ldots$ les produits r à r correspondants de ces mêmes quantités ; $P^{(h)}_r$ renferme les mêmes lettres que $S^{(h)}_r$.

Le théorème fondamental nous donne la série des inégalités suivantes:
$$\frac{S'_r}{r} > \sqrt[r]{P'_r},$$
$$\frac{S''_r}{r} > \sqrt[r]{P''_r}.$$
$$\ldots\ldots$$

Quelques-unes de ces inégalités peuvent être des égalités. Ajoutons membre à membre, nous aurons
$$\frac{S'_r + S''_r + S'''_r \ldots}{r} > \sqrt[r]{P'_r} + \sqrt[r]{P''_r} + \sqrt[r]{P'''_r} + \ldots$$

Mais au numérateur du premier membre chaque quantité a sera répétée autant de fois qu'il y a de combinaisons de $n - 1$ lettres $(r - 1)$ à $(r - 1)$, nombre que nous désignerons avec Cauchy par $(n - 1)_{r-1}$; donc l'inégalité ci-dessus devient
$$(n - 1)_{r-1} \cdot \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{r} > \sqrt[r]{P'_r} + \sqrt[r]{P''}$$
$$+ \sqrt[r]{P'''_r} + \ldots$$

$$\text{Mais } (n)_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \quad 3 \cdot \;\dots\; r}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \dots (r-1)} \cdot \frac{n}{r} = (n-1)_{r-1} \frac{n}{r}.$$

Donc on peut écrire l'inégalité ci-dessus sous la forme

$$\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} > \frac{\sqrt[r]{P'_r} + \sqrt[r]{P''_r} + \sqrt[r]{P'''_r} + \dots}{(n)_r}$$

C'est le théorème qu'il s'agissait de démontrer, car les quantités P sont au nombre de $(n)_r$.

Dans le cas où tous les nombres seraient égaux, cette inégalité deviendrait une égalité.

Corollaire. — Posons

$$A_1 = b_1^r,\ A_2 = b_2^r\ A_3 = b_3^r\ \dots$$

l'inégalité devient

$$\frac{b_1^r + b_2^r + \dots + b_n^r}{n} > \frac{Q'_r + Q''_r + Q'''_r \dots}{(n)_r}$$

en nommant $Q'_r, Q''_r \dots$ les produits r à r des quantités b_1, $b_2 \dots b_n$; et nous pouvons formuler le théorème suivant:

La moyenne arithmétique des puissances r *de* n *quantités, non toutes égales, est supérieure à la moyenne arithmétique de leurs produits* r *à* r.

Cas particuliers. — Nous tirons de ce théorème général les cas particuliers suivants, qui peuvent être utiles :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} > \frac{yz + zx + xy}{3}$$

ou bien $\quad x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy, \quad$ (a)

puis $\quad x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz. \quad$ (b)

De l'inégalité (a) on peut facilement conclure les deux théorèmes géométriques:

1° *De tous les parallélépipèdes rectangles de même surface, le cube est celui qui a la plus petite diagonale ;*

2° *De tous les parallélépipèdes rectangles de même diagonale, le cube est celui qui a la plus grande surface.*

Théorème. — *La moyenne arithmétique de la somme des produits* r *à* r *de* n *quantités positives, non toutes égales, est moindre que la* r[e] *puissance de leur moyenne arithmétique.*

Soient $$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots\ a_n$$
n quantités positives, non toutes égales. Désignons par la notation $S_{n,r}$ la somme de leurs produits r à r; la somme des quantités sera désignée par $S_{n,1}$, et il s'agit de démontrer

que $$\frac{S_{n,r}}{(n)_r} < \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r$$

ou bien que $$S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r$$

1° Admettons que l'on ait
$$S_{n-1,r} < (n-1)_r \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^r \qquad (1)$$
$$S_{n-1,r-1} \leqq (n-1)_{r-1} \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^{r-1} \qquad (2)$$
le signe $=$ de la relation (2) se rapportant au cas où $r = 2$. Je dis qu'on peut en conclure
$$S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r \qquad (3)$$

En effet, nous avons identiquement:
$$S_{n,r} = a_n S_{n-1,r-1} + S_{n-1,r};$$
ou, ce qui es tla même chose,
$$S_{n,r} = (S_{n,1} - S_{n-1,1})\, S_{n-1,r-1} + S_{n-1,r}$$
de là et des hypothèses (1) et (2), on déduit
$$S_{n,r} < (S_{n,} - S_{n-1,1})\,(n-1)_{r-1} \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^{r-1}$$
$$+ (n-1)_r \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^r.$$

Posons maintenant
$$\frac{}{n} = x\,\frac{S_{n-1,1}}{1-n},$$
nous obtiendrons, après quelques transformations faciles,
$$S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r \frac{rx - r + 1}{x^r}.$$

Or, nous avons démontré (p. 80) que, si x est différent de

l'unité, $$\frac{rx - r + 1}{x^r} < 1;$$

donc, dans ce cas, $S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)$.

Si $x = 1$, la fraction se réduit à l'unité et l'on a encore la même relation.

Admettons que $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1}$
et que a_n diffère de ces premières quantités. Nous aurons au lieu de (1) et (2) les égalités

$$S_{n-1,} = (n-1)_r \left(\frac{S_{n-1,r}}{n-1}\right)$$

$$S_{n-1,r-1} = (n-1)_{r-1} \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^{r-};$$

par suite on arriverait à l'égalite

$$S_{n,r} = (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r \frac{rx - r + 1}{x_r};$$

mais, a_n étant différent de $a_1 = a_2 = \ldots$, x ne peut pas être égal à 1, donc $\dfrac{rx - r + 1}{x^r}$ est moindre que 1;

donc encore $\quad S_{n,r} < (n)_r \left(\dfrac{S_{n,1}}{n}\right)^r.$

2° La relation (3) étant démontrée dans les hypothèses (1) et (2), et l'inégalité

$$S_{r,r} < (r)_r \left(\frac{S_{r,1}}{r}\right)^r$$

étant évidente d'après le théorème fondamental de la page 79. nous avons donc les deux relations

$$S_{2,2} < (2)_2 \left(\frac{S_{2,1}}{2}\right)^2.$$

$$S_{2,1} = (2)_1 \left(\frac{S_{2,1}}{2}\right)^1.$$

Nous en concluons

$$S_{3,2} < (3)_2 \left(\frac{S_{3,1}}{3}\right)^2$$

par le théorème que nous venons de démontrer.

Des relations $\quad S_{3,3} < (3)_3 \left(\dfrac{S_{3,1}}{3}\right)^3$

$$S_{3,2} < (3)_2 \left(\frac{S_{3,2}}{3}\right)^2$$

$$S_{3,1} = (3)_1 \left(\frac{S_{3,1}}{3}\right)^1$$

nous pouvons passer, par le même théorème, aux relations

$$S_{4,4} < (4)_4 \left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^4$$

$$S_{4,3} < (4)_3 \left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^3$$

$$S_{4,2} < (4)_2 \left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^2$$

$$S_{4,1} = (4)_1 \left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^1$$

puis de là tirer

$$S_{5,5} < (5)_5 \left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^5$$

$$S_{5,4} < (5)_4 \left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^4$$

$$S_{5,3} < (5)_3 \left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^3$$

$$S_{5,2} < (5)_2 \left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^2$$

$$S_{5,1} = (5)_1 \left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^1 \quad \text{etc...}$$

On arrive donc de proche en proche à démontrer que n et r étant quelconques, on a

$$S_{n,r} < (n)_n \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r.$$

C. Q. F. P.

Ce théorème comprend le théorème fondamental comme cas particulier; la démonstration que nous avons développée en suivant l'analyse de Besso est ingénieuse et simple. Il nous paraît difficile de l'aborder directement, même pour des cas particuliers. Pourrait-on faire voir simplement, par exemple, que

$$\frac{xyz + xyt + xyu + \dots}{10} \leq \left(\frac{x + y + z + t + u}{5}\right)^3 ?$$

Corollaire. — De ce théorème on peut conclure:

1° Le maximum de la somme des produits r *à* r *de quantités positives dont la somme est constante;*

2° Le maximum de la somme de quantités positives dont la somme des produits r *à* r *est constante.*

Remarque. — Nous avons démontré à la page 81, en nous appuyant sur le théorème fondamental, que

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta\left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma\cdots<\left(\frac{x+y+z+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

si $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}$ ne sont pas tous égaux.

De ce théorème on déduit immédiatement :

1° *Que le maximum du produit* $x^\alpha y^\beta z^\gamma\ldots$, *quand* $x + y + z\ldots$ *reste constant, a lieu quand*

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\ldots$$

2° *Que le minimum de la somme* $x + y + z\ldots$, *quand le produit* $x^\alpha y^\beta z^\gamma\ldots$ *reste constant, a lieu aussi lorsque*

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\ldots$$

Cette démonstration est à l'abri de toute objection. La démonstration habituelle, au contraire, présente cette difficulté que le théorème sur lequel on s'appuie suppose que les facteurs du produit ne sont assujettis qu'à une condition, et, dans le cas où on l'applique, les facteurs sont assujettis non seulement à ce que leur somme soit constante, mais encore à cette autre condition que α soient égaux entre eux, β égaux entre eux, γ égaux entre eux, etc.

SUR
UNE THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA PARABOLE

Par M. J. Marchand, ancien élève de l'École Polytechnique.

1. — Soit OX un axe de projection, et AB une droite limitée; par les extrémités A et B, et dans le même sens, on mène deux droites faisant avec AB un angle fixe α. Nous donnerons le nom d'*obliques* aux parties AR, BR″ de ces droites comprises entre AB et OX, ainsi qu'à toute autre portion analogue de parallèle à leur commune direction, issue d'un point quelconque de AB.

Cela posé, faisons la construction pour le point C milieu de AB, et considérons les projections des trois obliques sur OX. La proposition suivante est évidente : Si l'on regarde comme positives les projections dirigées dans le même sens que celle de l'oblique du point milieu C ou oblique moyenne, comme négatives celles qui sont dirigées en sens contraire (en marchant de P′ vers R′ par exemple), la projection de l'oblique moyenne est la moyenne arithmétique des projections des obliques des points extrêmes.

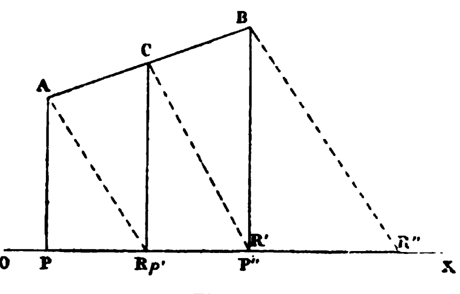


Fig. 1.

Ainsi on a toujours $P'R' = \dfrac{PR + P''R''}{2}$.

En particulier si le point A est sur l'axe, il vient

$$P'R' = \frac{P''R''}{2}.$$

Réciproquement, se donnant C comme centre et sur AB de part et d'autre des longueurs égales, quelles que soient ces longueurs, on aura $RP + R''P'' = 2P'R'$.

La somme des projections est donc absolument indépendante de la valeur de la demi-longueur CA.

2. — Lemme. — *Dans une série de parallèles, telles que la somme des projections sur un axe déterminé des obliques menées par leurs extrémités soit constante, le lieu des milieux de ces cordes est une droite parallèle à l'axe.*

Alors, en effet, le triangle CP′R′ est invariable, et le lieu cherché est décrit par le point C, lorsque CP′R′ glisse le long de OX.

Remarques. — 1° La tangente à l'extrémité du diamètre étant la corde dont les deux extrémités deviennent indéfini-

ment voisines, elle reste parallèle a la direction commune des cordes, et si du point de contact on mène une oblique, la projection de celle-ci sera la demi-somme des obliques issues des extrémités d'une corde quelconque.

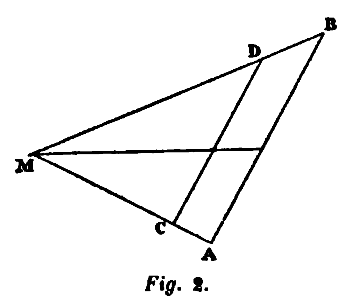


Fig. 2.

2° Les droites AC. DB obtenues en joignant les extrémités de deux cordes parallèles quelconques couperont le diamètre en un point M : à la limite quand CD se confond avec AB. la proposition s'appliquera encore aux tangentes issues des points A et B.

3. — Si nous supposons maintenant l'angle α égal à 90°, les obliques deviendront normales aux cordes et, ainsi, la sous-normale de la tangente menée à l'extrémité du diamètre sera la demi-somme des sous-normales issues des extrémités d'une corde quelconque du système et égale à la sous-normale issue d'un point quelconque du diamètre linéaire de ce même système.

4. — Cela posé, soient deux axes rectangulaires OX et OY : par l'origine je mène une droite OM faisant avec OX un angle quelconque, j'abaisse MP perpendiculaire sur OX et j'élève la normale à la corde OM ; je suppose enfin la sous-normale PR constante et égale à $2p$, et je me propose de déterminer les propriétés de la courbe ainsi définie.

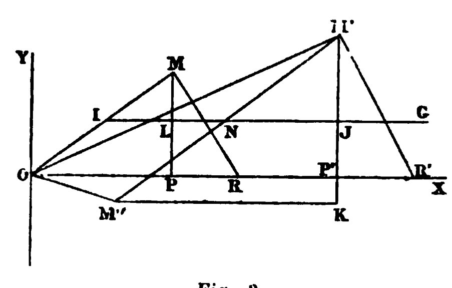


Fig. 3.

Je prends pour cela un deuxième point M' du lieu cherché, et j'y effectue les constructions précédentes ; adoptant maintenant OM, pour direction de cordes, et pour diamètre

IG la parallèle à OX issue du point milieu de OM, je trace M'M″ en prenant NM″ = NM' : cette corde est telle que la somme des sous-normales issues de ses extrémités est égale à $2p$, et je dis que M″ est un point du lieu.

Nous remarquerons, pour le prouver, qu'à chaque point du lieu correspond un triangle rectangle tel que OMR, qui donne pour M et M' : $OP \times 2p = \overline{MP}^2$, (1)

$$OP' \times 2p = \overline{M'P'}^2, \quad (2)$$

et devra donner par conséquent pour M″ :

$$OP'' \times 2p = \overline{M''P''}^2; \quad (3)$$

or si par M″ on mène une parallèle à l'axe jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de M'P' en K, comme M'J = JK, en posant $M'J = \varepsilon$, il viendra

$$M'K = 2\varepsilon;$$

comme aussi ML = LP, on pourra écrire en posant $ML = u$:

$$MP = 2u, \quad M'P' = \varepsilon + u, \quad M''P'' = \varepsilon - u;$$

substituant ces valeurs dans (2) et (3) et retranchant membre à membre, l'équation (3) de condition deviendra

$$2p \times P'P'' = 4\varepsilon u;$$

à cause de $P'P'' = M''K$, elle peut s'écrire

$$2p = \frac{2\varepsilon}{M''K} \cdot 2u;$$

or les triangles semblables M'M″K, OMP donnent

$$\frac{M'K}{M''K} = \frac{MP}{OP}.$$

Donc finalement il vient

$$2p \times OP = \overline{MP}^2,$$

c'est-à-dire la relation (1) déjà connue ainsi ; M″ est un point du lieu.

Corollaires. — *1° L'équation du lieu est :*

$$y^2 = 2px.$$

2° La somme des sous-normales aux extrémités d'un système quelconque de cordes parallèles tracées dans la courbe est constante et égale à 2p ;

3° Un système quelconque de cordes a pour diamètre une droite parallèle à OX ;

4° La sous-normale au point où une corde coupe son diamètre

est constante et égale à p; *et la sous-normale à la tangente en son point de contact est par suite constante et égale à* p;

5° *Inversement à (4°) toute droite parallèle à* OX *est un diamètre de la courbe,* car si en O nous élevons OY perpendiculaire sur OX, et si nous prenons à partir du point O une longueur $O\varphi = p$, en joignant φ au point I, intersection de OY avec ID diamètre supposé, la perpendiculaire OJ à $I\varphi$ sera la direction des cordes conjuguées;

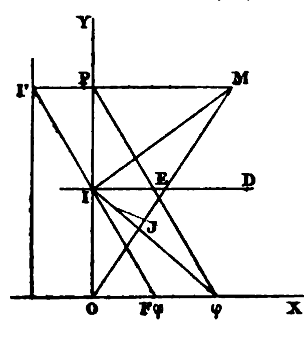


Fig. 4.

6° *Si on prolonge* OJ *jusqu'en* E *sur* ID, *en prenant* EM = OE, *le point* M *ainsi déterminé est un point du lieu; de là par conséquent une construction de la parabole par points. — La même construction donnera, si l'on connaît la direction des cordes, la position du diamètre conjugué;*

7° *Dans la précédente figure, si l'on fait tourner* OM *autour du point* O, *de manière à tendre vers* OY, ID *se rapprochera indéfiniment de* OX, *et à la limite se confondra avec lui.* OX *est donc le diamètre conjugué des cordes qui lui sont perpendiculaires, c'est-à-dire l'axe unique de symétrie de la courbe; d'après cette discussion même, la perpendiculaire* OY *est par suite tangente à la courbe au point* O, *c'est-à-dire la tangente au sommet;*

8° *Une remarque analogue prouve que si nous menons* IM, *cette droite sera tangente à la courbe au point* M; *on résout ainsi le problème de la tangente par un point donné de la courbe; on peut reconnaître par cette même construction si une droite* IM *est une tangente, et déterminer alors son point de contact.*

9° *Si de* M *on abaisse* MP *perpendiculaire sur* OY, PL *sera égale à* IO, *ce qui prouve que* IM, *c'est-à-dire la tangente à l'extrémité d'un diamètre coupe la tangente à la demi-distance entre le sommet et le point où le diamètre conjugué de la tangente rencontre lui-même la tangente au sommet (on peut dire aussi que l'ordonnée à l'origine de la tangente est la moitié de l'ordonnée* MQ *du point de contact). On voit enfin que si l'on joint*

$P\varphi$, *cette droite sera perpendiculaire à* IM, *ce qui nous permet de mener une tangente à la parabole parallèle à une direction donnée;*

10° *Menons maintenant, par* I, IF *parallèle à* $P\varphi$; IF *sera égale à* $\frac{P\varphi}{2}$, *coupera* OX *en un point* F *milieu de* $O\varphi$, *à une distance du sommet égale à* $\frac{p}{2}$ *et sera perpendiculaire à* IM; *donc, si du point de rencontre de la tangente au sommet avec une tangente quelconque on élève une perpendiculaire à celle-ci, cette perpendiculaire passera par un point fixe, situé sur l'axe et à une distance égale à* $\frac{p}{2}$ *du sommet de la courbe; inversement, si d'un point situé sur l'axe à une distance* $\frac{p}{2}$ *du sommet, on abaisse des perpendiculaires aux tangentes menées par les différents points de la courbe, le lieu décrit par les pieds de ces perpendiculaires sera la tangente au sommet;*

11° *Prolongeons maintenant* IF *jusqu'à sa rencontre en* I' *avec* MP *prolongée également, les triangles* F'PI, IOF *seront égaux; d'où suit que* $PI' = OF = \frac{p}{2}$; *donc le lieu de* I' *sera une perpendiculaire* I'F' *à l'axe, dont le pied* F' *est le symétrique du foyer par rapport au sommet. D'ailleurs* I'I *étant égal à* IF, IM *est perpendiculaire sur le milieu de la droite* I'F; *donc si nous joignons* MF, *on aura* MF = F'M : *par conséquent* 1° *le foyer est un point tel que si nous le joignons au point* M *quelconque pris sur la courbe, cette distance est égale à la distance du point* M *à la droite menée perpendiculairement à l'axe par le symétrique* F' *du foyer par rapport au point* O *(cette droite prend le nom de* DIRECTRICE*)*; 2° *l'angle formé par la perpendiculaire, abaissée du point* M *sur la directrice, et la droite joignant le point* M *au foyer, est bissecté par la tangente à la courbe au point* M; 3° *la distance du foyer à un point quelconque de la courbe, en appelant* x *l'abscisse du point* M, *aura pour expression* $FM = F'M = x + \frac{p}{2}$;

12° En remarquant que angle FMT = *angle* MTF, *on obtient également* $\varphi M = TF = x + \frac{p}{2}$; *d'où on déduit* OT = x, *c'est-à-dire que la sous-tangente est égale à* 2 x. *Notons enfin qu'en appelant* m *la tangente de l'angle* ITO *on a*

$$\frac{\frac{p}{2}}{\frac{y_0}{2}} = m.$$

D'où

$$p = my_0.$$

5. — La théorie de la parabole étant complètement ramenée à sa définition ordinaire, il n'y a pas lieu d'y insister davantage. Nous ferons remarquer toutefois qu'en abordant la question comme nous l'avons fait, on obtient immédiatement une construction de la courbe par points : en effet par le point φ_1 tel que $O\varphi_1 = 2p$, élevons une perpendiculaire sur OX; d'un point R arbitraire sur OX avec un rayon égal à OR décrivons une circonférence; par le point M' de rencontre de la perpendiculaire $\varphi_1 M'$ avec cette circonférence menons une parallèle à OX, le point M obtenu par cette nouvelle intersection sera un point de la parabole.

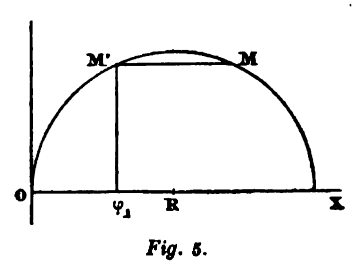


Fig. 5.

6. — Comme dernière question nous nous proposerons de démontrer le théorème suivant :

Dans une parabole l'enveloppe des normales aux cordes menées du sommet aux différents points de la parabole et passant par ces points, est la développée de la parabole qui a même axe que la proposée, le foyer placé en son sommet, et un paramètre quatre fois moindre.

Pour le montrer, soit M un point d'une parabole rapportée à son axe OX et à sa tangente au sommet OY; construisons son ordonnée MP, sa tangente MI, sa normale MS; joignons enfin le foyer F à l'extrémité I de l'ordonnée à l'origine de

la tangente et au milieu M′ de la normale : la figure IFMM est un parallélogramme, et FM′ égale et parallèle à MI est perpendiculaire sur le milieu de MS. D'ailleurs, comme la sous-normale à la corde FM′, P′S, est constante et égale à $\frac{p}{2}$, on voit que le lieu du point M′ est, d'après un théorème démontré ci-dessus, une parabole dont l'axe est OX, le sommet le foyer de la proposée, et le paramètre le quart de celui de la proposée. Ce qui établit la proposition énoncée.

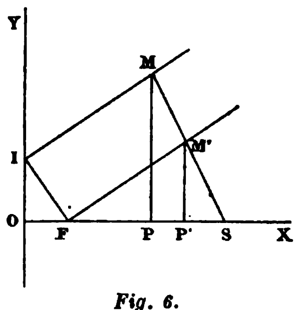


Fig. 6.

QUESTION 35

Solution par M. Vazou, élève au Collège Rollin.

Soit K *le point de rencontre des hauteurs d'un triangle,* P *un point du cercle circonscrit; la ligne* PK *rencontre en* Q *la droite de Simson relative au point* P *; démontrer que, si le point* P *se déplace sur la circonférence, le lieu du point* Q *est le cercle des neufs points du triangle.* (G. L.)

Ce théorème résulte immédiatement des deux suivants :

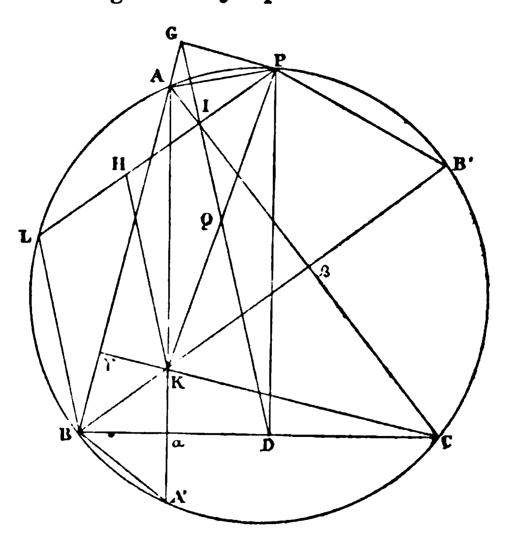
I. — *Lorsqu'on prolonge les hauteurs d'un triangle jusqu'à la circonférence du cercle circonscrit, la portion de la hauteur extérieure au triangle est égale à la longueur de cette hauteur comprise entre la base correspondante et le point de rencontre des hauteurs.*

En effet, joignons BA′, l'angle BAα = C puisque ces deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; l'angle BA′K = C comme ayant même mesure ; donc BKα = BA′K, par suite Kα = A′α.

II. — *Si l'on joint un point* P *de la circonférence circonscrite à un triangle au point de rencontre* K *des hauteurs de ce triangle,*

la droite de Simson relative au point P *partage en deux parties égales la ligne* PK.

Prolongeons PI jusqu'à sa rencontre en I avec la circonférence, prenons IH = IP et menons PB', KH et BL. La droite βI étant perpendiculaire sur les milieux des bases du trapèze PHKB', ce trapèze est isoscèle et l'on a HKB' = PB'K; mais PB'K = LBB' donc HK est parallèle à LB ; or cette dernière droite est parallèle à la droite de Simson, puisque LBA = APL = AGI ; donc HK est parallèle à la droite de Simson et par conséquent cette dernière droite GID, parallèle à HK et passant par le milieu I de HP, partage la droite KP en deux parties égales.



Revenant maintenant au théorème proposé, nous voyons que le lieu du point Q est homothétique du lieu du point P. K étant le centre d'homothétie et 1/2 le rapport d'homothétie. C'est donc un cercle. Or, d'après (I) ce cercle passe par les points α, β, γ; c'est donc le cercle des neufs points du triangle.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Deville, à Lorient. P. Godefroy, à Lyon ; Puig, à Montpellier.

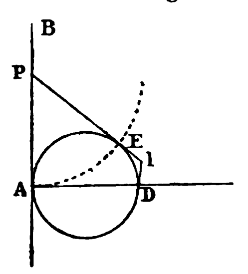
QUESTION 36

Solution, par M. R. Godefroy, au Lycée de Lyon.

On considère deux droites rectangulaires AB, AC *et au point* A *un cercle* Δ *tangent à la droite* AB. *Soit* D *le second point de rencontre de* Δ *avec* AC; *si par un point fixe* P *de* AB *on mène une tangente à* Δ, *cette droite rencontre la parallèle à* AB *menée par le point* D *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand on fait varier le cercle* Δ.

Soit E le point de contact de la tangente PI et du cercle Δ.

Quel que soit le cercle Δ on a PE = PA comme tangentes à une circonférence issues d'un même point; or le point P est fixe et la longueur PA est constante. Le lieu des points E est donc une circonférence de centre P, de rayon PA tangente en A à la droite AC. On a aussi, quel que soit le cercle Δ, IE = ID (tangentes issues d'un même point à une circonférence). Le lieu des points I est donc le lieu des points équidistants d'une circonférence et d'une de ses tangentes. On sait que c'est une parabole de foyer P dont la directrice parallèle à AC en est distante d'une longueur égale à PA du côté opposé à P par rapport à AC.



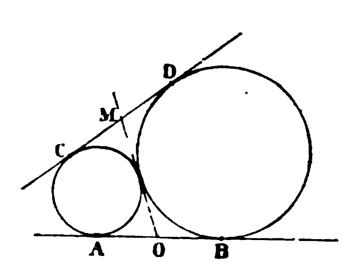
Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Épinal; Plantif, à Constantine; Quintard, à Arbois; Berthelot Pigeaud, à Châteauroux, Puig, à Montpellier; Kœhl, à Grenoble; Paillard, Vail et Lenoir, école Albert-le-Grand (Arcueil); Ambert, à Bordeaux; Blessel, à Paris; Bordier, à Blanzac; Auric, à Orange; Mary, à Perpignan; P. Godefroy, à Lyon; Deville, à Lorient; Lachesnais, lycée Henri IV, à Paris; Vazou, collège Rollin, à Paris.

QUESTION 37

Solution, par M. R. Godefroy, au Lycée de Lyon.

On considère une droite **AB** *et par deux points fixes* **A** *et* **B** *pris sur cette droite on mène des cercles tangents à cette droite et tangents entre eux. A ces cercles on mène une tangente commune extérieure. Trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de cette tangente commune.* (G. L.)

Soient AB et CD les deux tangentes communes extérieures, dont l'une AB est fixe et constante. La tangente commune intérieure, étant l'axe radical des 2 cercles, passe par le milieu O de AB, qui est fixe et par le point variable M, milieu de CD. Le point de contact de la tangente commune intérieure partage cette droite en deux parties chacune égale à la moitié de l'une des tangentes communes. Ces deux tangentes étant égales, on aura enfin MO = AB = const. Le point O étant fixe, le lieu du point M est une circonférence ayant pour centre le milieu de AB et pour rayon AB lui-même.



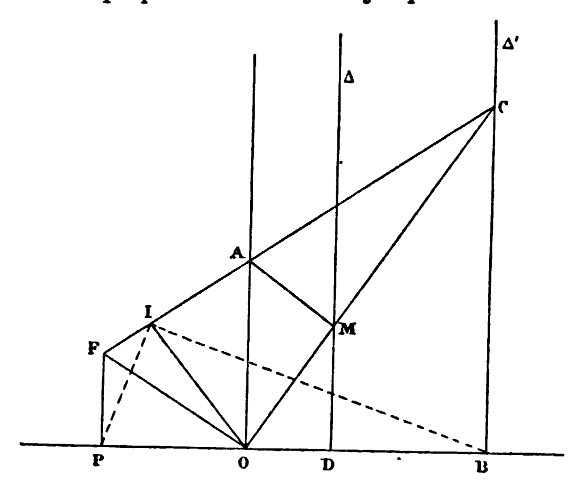
Nota. — La même question a été résolue par MM. des Essarts, Vail, Paillard et Lenoir, à l'école Albert-le-Grand (Arcueil); Ambert, à Bordeaux; Pigeaud, à Châteauroux; Bablon, à Épinal; Quintard, à Arbois; Puig, à Montpellier; Auric, à Orange; Vigy, à Vitry-le-François; P. Godefroy, à Lyon; Varnier, à Bar-le-Duc; Deville, à Lorient; Vazou, collège Rollin, à Paris; P. La Chesnais, lycée Henri IV, à Paris.

QUESTION 39

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

On donne deux droites rectangulaires OA *et* OB, *et deux droites* Δ, Δ', *parallèles à* OA. *Soit* M *un point pris sur* Δ, *et supposé mobile sur cette droite. Élevons au point* M *une perpendiculaire à* OM, *qui rencontre* OA *au point* A; *joignons celui-ci au point* C *de rencontre de* Δ' *et de* OM, *et sur cette droite* AC *abaissons de* O *une perpendiculaire* OI. *Démontrer que le lieu du point* I *est une circonférence.* (G. L.)

Menons OF perpendiculaire à OM jusqu'à sa rencontre en



F avec CA, et FP perpendiculaire à OB. Les triangles semblables OCB, OFP donnent

$$\frac{OP}{OF} = \frac{CB}{OC} = \frac{MD}{OM}.$$

Or $$OF = \frac{OC.AM}{MC}.$$

Donc $$OP = \frac{MD.AM}{OM} \cdot \frac{OC}{MC}.$$

Or, on a $$\frac{MD.AM}{OM} = OD;$$

donc $$OP = \frac{OD.OC}{MC} = \frac{OD.OB}{DB} = \frac{bc}{b-c}.$$

Donc le point P est fixe, et la droite BP est constante. On voit que le lieu du point F est la parallèle à OA menée par un point fixe P.

Joignons le point I aux points P et B; les quadrilatères inscriptibles IOPF, ICBO nous font voir que l'angle IPO est égal à IFO, et que IBO est égal à ICO. Donc, le triangle FOI étant rectangle, il en est de même du triangle PIB; par suite le lieu du point I est la circonférence décrite sur PB comme diamètre.

QUESTION 47

Solution par M. F. Landry.

Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les aiguilles d'une horloge, de telle sorte que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge?

(Laisant.)

Cette intéressante question peut être résolue ainsi :

De o h. à 12 h. la petite aiguille prend toutes les positions sur le cadran. A chacune de ces positions correspond une position de la grande aiguille, une seule; et cette position est déterminée par sa vitesse, qui est égale à douze fois celle de la petite aiguille.

Cela posé, soit exprimée en minutes par e la position de la petite aiguille à un moment donné, celle de la grande aiguille sera donnée par $12e$ dont il faudra seulement défalquer les tours complets, s'il y a lieu.

La permutation des aiguilles entre elles fera que la nouvelle position de la petite aiguille sur le cadran sera déterminée par $12e$ et que celle de la grande sera e.

Or, pour satisfaire à la loi des vitesses relatives, il faudra

que le nombre e qui marque la nouvelle position de la grande aiguille, soit égal, sauf la suppression qui devra être faite des tours complets, à 12 fois le nombre $12e$ qui marque la position nouvelle de la petite aiguille. C'est-à-dire que la différence entre les deux nombres $12.12e$ et e devra être un multiple exact de 60.

Il en résulte donc $144e = e + 60K$,

d'où $$e = \frac{60K}{143}.$$

Comme K ne peut être qu'un nombre entier, on trouvera les diverses positions e de la petite aiguille, en donnant successivement à K les valeurs 1, 2, 3,.. 143. Au-delà on retomberait sur les mêmes positions.

Ainsi la question comporte 143 solutions distinctes.

Les positions correspondantes de la grande aiguille seraient données par $12e$, pour chaque valeur de e.

QUESTION 48

Solution par M. A. Fleurot, élève au Lycée de Marseille.

On donne une circonférence et dans cette circonférence une *orde fixe* AB. *Soit* C *le point* *le rencontre des tangentes en* A *et* B *à la circonférence; on* *rend un point* M *quelconque* *sur la circonférence, on mè-* *ie les droites* MA, MB, *et par* *e point* C *une parallèle à la* *angente en* M; *cette parallèle* *encontre* MA *au point* P, MB *u point* Q; *démontrer que* PQ *st constant.* (Mannheim)

Le triangle ACP est isocèle; en effet, on a : angle .PC = angle RMA comme lternes-internes, et angle RM = angle RAM = angle PAC.

Donc PC $=$ AC.

On démontrerait de même que le triangle BCQ est aussi isoscèle, et que l'on a CQ $=$ BC.

Donc PC $+$ CQ ou PQ $=$ AC $+$ BC $=$ constante, C. Q. F. D.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Mosnat, à Thiers; R... Prémorant, lycée Saint-Louis, à Paris; Collinet, à la Ferté-Gaucher; P. L... Chesnais, lycée Henri IV, à Paris; Puig, à Montpellier; Bordier, à Blanzac; Vazou, collège Rollin, à Paris; Deville, à Lorient.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR CHARLES BRIOT

Charles Briot, qui a pris au mouvement scientifique moderne une si large part, est mort le 20 septembre dernier au bourg d'Ault (Somme), à l'âge de soixante-cinq ans. Nous voulons essayer de résumer ici la vie et les travaux de ce savant regretté. C'est un hommage naturel que ce journal doit à tous ceux qui, comme Charles Briot, meurent après avoir aimé et honoré la science mathématique.

Rien n'est plus touchant que le début de cette vie qui devait être si bien remplie. Charles Briot était fils d'un tanneur et son père, après lui avoir fait donner un commencement d'instruction, songeait à l'occuper dans sa maison. Briot s'étant un jour cassé le bras, il fallut abandonner cette idée et songer à une autre carrière. « Je n'étais bon à rien, avec mon bras cassé, disait plaisamment Briot, quand il parlait de sa jeunesse; mon père ne sachant que faire de moi, ni comment m'occuper, ne s'opposa pas à la continuation de mes études. »

C'est l'institution Barbet qui reçut le jeune Briot à sa sortie de Sainte-Hippolyte (Doubs), sa ville natale. On ne peut écrire cette notice sans rendre justice à tous ceux qui ont aidé Briot dans ses premiers pas. M. Barbet l'accueillit généreusement et il ajouta à ce bienfait en entourant son jeune élève d'une affectueuse sympathie et d'une sollicitude dont Briot a, pendant toute sa vie, gardé le plus vif souvenir.

Un autre homme, M. Régnier, était dans la pensée recon-

naissante de Briot lié aux souvenirs de son arrivée à Paris et des difficultés qu'il avait rencontrées à cette époque de sa jeunesse. Briot avait alors 15 ou 16 ans : il ne possédait guère, en débarquant de Saint-Hippolyte, qu'une forte instruction primaire et il avait à peine commencé les études latines. Il pouvait être de la force d'un élève de sixième ; mais il était trop âgé pour qu'on songeât à le mettre dans cette classe. « M. Barbet, nous a raconté M. Régnier qui, aujourd'hui membre de l'Institut, était alors professeur de seconde au lycée Saint-Louis, plein de confiance dans les facultés extraordinaires de son protégé, vint me le présenter et m'exposa la situation. — Je n'ai jamais vu, me disait M. Barbet, une pareille facilité ; le passé répond pour moi de l'avenir : il faut tenter l'aventure. Je ne partageais pas entièrement la confiance de M. Barbet ; mais je me suis prêté à l'essai et je n'ai pas eu à le regretter. — C'était, ajoutait M. Régnier, un de ces rares et bons esprits presque aussi aptes aux lettres qu'aux sciences, et, dans ma longue carrière où j'ai rencontré plus d'une intelligence d'élite, je n'ai jamais vu aucun exemple d'une telle marche. »

Briot fit ainsi, sous la direction de M. Régnier, trois ou quatre classes en un an. Les lacunes du passé ainsi réparées, il put reprendre son rang parmi les jeunes gens de son âge, à la tête desquels il devait marcher désormais. En mathématiques élémentaires il remporta le premier prix au concours général et, bientôt après, en 1838, Briot entrait à l'École normale, le premier de sa promotion. Reçu agrégé à sa sortie de l'École en 1841, il prit l'année suivante le grade de docteur ès sciences mathématiques.

La vie universitaire de Briot a été bien remplie depuis cette époque jusqu'à sa mort. D'abord professeur à Reims, puis à Orléans, il passa du lycée de cette ville à la faculté de Lyon. C'est au mois d'octobre 1848 qu'il vint à Paris, d'abord comme professeur au lycée Fontanes, puis comme professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Il occupa cette chaire importante pendant de longues années, entouré de nombreux élèves qu'attiraient, auprès de ce maître distingué, des succès toujours croissants. Il ne quitta le lycée

Saint-Louis que pour entrer à la Sorbonne, où il professa successivement l'astronomie et la physique mathématique. Il faut ajouter, pour être complet dans cette nomenclature, que Briot fut, dans l'intervalle, en 1855, maître de conférences à l'École normale et, en 1864, examinateur d'admission à l'École polytechnique.

Les travaux scientifiques de Charles Briot sont nombreux; ils ont tous une importance réelle et quelques-uns, comme la *Théorie des Fonctions abéliennes*, à laquelle l'Académie des sciences accorda dernièrement le prix Poncelet, suffiraient pour rendre le nom de Briot impérissable près des mathématiciens de l'avenir.

Voici une liste, aussi complète qu'il nous a été possible de la faire, des livres et mémoires publiés par Briot.

1. *Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.* (Liouville, tome VII, 1842, 15 pages.)

2. *Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques.* (Liouville, tome X, 1845, 10 pages.)

3. *Note sur l'attraction.* (Liouville, tome XI, 1845, 10 pages.)

4. *Note sur un thermomètre à indication continue.* (Lyon, Société agricole, tome IX, 1846, 2 pages.)

5. *Note sur un perfectionnement dans la méthode en Géométrie.* (Lyon, Mémoires de l'Académie, tome II, 1847, 3 pages.)

6. *Sur la théorie mathématique de la lumière.* (Comptes rendus, 1859, 1860, 1861, 1863, 1867, 1868.)

7. *Essai sur la théorie mathématique de la lumière.*

8. *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.* (Comptes rendus, 1854.)

9. *Recherches sur les fonctions doublement périodiques.* (Comptes rendus, 1855.)

10. *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.* (Comptes rendus, 1855.)

11. *Étude des fonctions d'une variable imaginaire.* (Paris, Journal de l'École polytechnique, 1856, cahier 36.)

12. *De la mesure des petites forces au moyen du pendule.* (Comptes rendus, 1865.)

13. *Théorie mécanique de la chaleur.*

14. *Théorie des fonctions elliptiques.*

15. *Théorie des fonctions abéliennes.*

En outre, M. Briot a publié un grand nombre d'ouvrages estinés à l'enseignement classique : *Arithmétique*, *Géométrie*, *llgèbre*, *Trigonométrie*, *Géométrie analytique*, *Mécanique*. On ait que parmi ces livres et ces mémoires quelques-uns ont té écrits en collaboration avec M. Bouquet, et le Mémoire ι° 12 a été composé en collaboration avec M. Jamin.

C'est par cette longue suite de travaux, par ces publications liverses et aussi par son enseignement à l'École normale :t à la Sorbonne que Briot avait pris, sur la génération ›résente des professeurs de mathématiques, une si grande :t si légitime influence. Un journal (*le XIXe Siècle*, n° du i octobre 1882), consacrant un article à la mémoire de Charles Briot, disait, en parlant de ces professeurs et en appelant cette influence : « Chez ces jeunes maîtres, on rouverait encore autre chose, le souvenir et la reconnaissance d'avoir été aimés par Briot comme des enfants, d'avoir :té conseillés, soutenus, poussés par lui dans les commen:ements de leur carrière. Briot ne considérait que comme ın prêt les services qu'il avait reçus de M. Barbet, et c'était ıne de ses joies d'homme et de citoyen de pouvoir en ·ondre à bon escient de tout pareils aux autres. » Nous enons à nous associer ici à ce langage. C'est celui de la ʳérité, et son exactitude sera reconnue par tous ceux qui, :omme nous, ont eu le bonheur de recevoir les leçons et les :onseils de Briot. « Si vous saviez, disait-il un jour à quel[u'un de notre connaissance, comme nous aimons les proesseurs qui travaillent ! »

Tels ont été la vie et les travaux de ce maître, un des :sprits les plus justes et les plus excellents que nous ayons :onnus. Les circonstances ont voulu que nous fussions, dans :e petit village d'Ault où il est venu s'éteindre, le témoin ttristé des derniers jours de Briot. Nous pouvons dire, 'ayant vu, que Briot a su mourir aussi bien qu'il avait su vivre. l a vu venir la mort avec calme, et s'est préparé en phiosophe et en sage à cette suprême épreuve. Ses dernières ›ensées, après celles qu'il devait aux siens, ont été pour ette École normale qu'il aimait si profondément et dont il

a été un des élèves les plus illustres. Il manifesta le regret de quitter la vie sans avoir pu contribuer à faire prévaloir certaines réformes qui lui paraissaient utiles au bon recrutement de cette école. Fidèle aux principes de toute sa vie, il ne voulut avoir à son enterrement ni cérémonies, ni représentation de corps, ni discours; mais seulement ses proches, ses amis et les habitants de ce petit village de Châtenay, où il passait la plus grande partie de son existence.

(G. L.)

QUESTIONS PROPOSÉES

61. — Résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x+2}+\frac{3x}{x+3}+\frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0.$$

(G. L.)

62. — On considère un cercle O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD. A partir du point A on prend un arc AQ, et dans l'autre sens un arc AP tel que

$$\text{arc AP} = 2\,\text{arc AQ}.$$

Soit Q' le symétrique de Q par rapport à CD. On demande le lieu géométrique décrit par le point I, commun aux droites PQ' et BQ.

(G. L.)

63. — Les premiers termes d'une série sont 1, 7, 19... mais on a perdu la loi de récurrence des termes de cette série; on sait seulement que le terme général u_n était une fonction entière et de second degré en n. Retrouver cette série, et démontrer que la somme des n premiers termes est égale à n^3.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX. RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23864-2.

ÉQUATIONS RÉCIPROQUES

DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ (SENS GÉNÉRAL)

Par **M. G. de Longchamps.**

1. — Nous avons déjà indiqué dans ce journal (*), en traitant quelques équations quadratiques, ce que nous entendions, dans un sens plus général que celui qui est ordinairement adopté, par *équation réciproque du quatrième degré.* Nous nous proposons de revenir sur ce point, parce que la définition que nous avons donnée de l'équation réciproque, comme celle qui est ordinairement employée, renferme une pétition de principe dont il est facile de la débarrasser, comme nous allons le montrer. Nous avons dit qu'une équation était réciproque lorsque, admettant la racine x', elle admettait aussi, et nécessairement, la racine $\frac{k}{x'}$. Mais cette définition suppose l'existence d'une racine, c'est-à-dire le théorème de d'Alembert. Il n'y a évidemment aucun inconvénient à envisager de la sorte les équations réciproques dans les cours de Mathématiques spéciales où l'on donne la démonstration de ce théorème. Il n'en est plus de même dans les cours de Mathématiques élémentaires. Ici il nous paraît nécessaire de ne pas préjuger, dans une définition, l'existence, *non démontrée*, des racines d'une équation du quatrième degré. Pour ce motif nous voulons revenir ici rapidement sur le sujet déjà traité dans l'article cité, et donner, des équations réciproques du quatrième et du troisième degré, dans le sens général que nous donnons à cette expression, une théorie qui nous paraît à l'abri de toute objection.

2. — Nous dirons *qu'une équation de degré* m, f(x) = o *est réciproque lorsque l'on a identiquement*

(*) Juillet 1882, *Mathématiques élémentaires*, p. 156.

$$f(x) = \lambda x^m f\left(\frac{k}{x}\right) \qquad (1)$$

pour des valeurs convenablement choisies de λ et de k.

Si l'on applique cette définition à l'équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o,$$

on trouve, par un calcul facile, la condition unique

$$AD^2 = B^2E,$$

que nous avons donnée dans l'article cité.

Cette condition étant établie, on décompose comme nous l'avons fait voir (*) l'équation donnée en deux trinômes du second degré, et c'est cette décomposition même qui prouve que l'équation proposée a quatre racines. On évite ainsi: 1° *de faire reposer la définition des équations réciproques sur une hypothèse; 2° on n'a pas à distinguer des équations réciproques de première ou de seconde espèce* (**) *et l'on traite un problème qui renferme les unes et les autres, et, avec celles-ci, toutes les équations réciproques dans le sens général que nous donnons à ce mot.*

Il faut d'ailleurs observer que, l'existence des racines une fois établie, il résulte de la définition (1) que si x_1 est une racine, $\frac{k}{x_1}$ est aussi une racine : appelant celle-ci x_2 on a donc $x_1 x_2 = k$.

Soit x_3 une troisième racine, $\frac{k}{x_3}$ est la quatrième racine; on peut donc dire que $x_3 x_4 = k$
et, par suite, $x_1 x_2 = x_3 x_4$.

Cette propriété des racines, en adoptant notre manière de voir, est donc une conséquence de la définition donnée plus haut, et ne doit pas être prise comme définition, pour ne pas admettre l'existence même des racines.

3. — On trouvera, à l'article déjà cité, tous les détails que nous avons donnés pour résoudre l'équation réciproque du quatrième degré. Nous ajouterons ici seulement quelques mots relatifs à l'équation du troisième degré.

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires*, p. 169.
(**) Algèbre de M. Combette, p. 370.

Soit $$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
une équation réciproque (sens général) du troisième degré. On a donc identiquement, par définition :
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \lambda (Ak^3 + Bk^2x + Ckx^2 + Dx^3);$$
et, par suite,
$$A = \lambda D$$
$$B = \lambda Ck$$
$$C = \lambda Bk^2$$
$$D = \lambda Ak^3.$$
En éliminant λ et k entre ces relations on trouve entre les coefficients la condition unique
$$AC^3 = B^3D.$$
L'équation peut alors s'écrire
$$A\left(x^3 + \frac{C^3}{B^3}\right) + Bx\left(x + \frac{C}{B}\right) = 0.$$
On aperçoit la racine $\quad x_1 = -\frac{C}{B}$

et l'équation, débarrassée du facteur $x + \frac{C}{B}$, est
$$Ax^2 + x\left(B - \frac{AC}{B}\right) + A\frac{C^2}{B^2} = 0.$$
On peut facilement résoudre et discuter cette équation.

4. — Les idées et les calculs qui précèdent s'étendent sans difficulté aux équations de degré quelconque; mais nous ne voulons pas entrer ici dans une généralisation facile à faire et qui s'adresserait plus particulièrement à l'autre partie de ce journal. Nous ajouterons seulement quelques mots pour bien préciser notre pensée et montrer ce qui la différencie de celle qui préside ordinairement à cette théorie des équations réciproques. Pour nous, des équations réciproques, dans le sens que nous attachons à ce mot, ne sont pas seulement celles dont les racines, groupées deux à deux convenablement, jouissent de la propriété de former, dans ces groupes, un produit toujours égal à $+1$ ou à -1; mais, plus généralement, dont le produit est toujours égal à un nombre donné k.

Nous irons même plus loin dans cette voie, et nous estimons qu'on devrait nommer *équations réciproques*, *celles dont*

les racines, groupées deux à deux convenablement, satisfont à une même équation homographique en involution ; de telle sorte enfin que les racines x_1, x'_1; x_2, x'_2; ... x_p, x'_p de l'équation proposée (groupées convenablement) donneraient les relations :

$$Ax_1x'_1 + B(x_1 + x'_1) + C = 0$$
$$Ax_2x'_2 + B(x_2 + x'_2) + C = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Ax_px' + B(x_p + x_p + C = 0.$$

Si l'on suppose $B = 0$ on retombe dans le cas qui vient de nous occuper, celui où deux racines ont un produit constant : si $A = 0$ on a un autre cas d'abaissement bien connu et dont nous avons dit un mot relativement au quatrième degré (voir *Journal des Mathématiques*, p. 172). Enfin si l'on suppose A et B différents de zéro, ce qui est le cas général. on ramène facilement ce cas à celui des équations réciproques (sens général), en observant que la relation homographique en involution $Axx' + B(x + x') + C = 0$ peut s'écrire

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)\left(x' + \frac{B}{A}\right) = \frac{B^2 - AC}{A^2}.$$

Si l'on change alors d'inconnue, en posant

$$X = x + \frac{B}{A},$$

la nouvelle équation en X sera réciproque, dans le sens que nous donnons à ce mot.

QUESTION 347

Dans un parallélogramme on donne la somme des côtés et des diagonales 2a, un angle β et l'angle des diagonales α, trouver les côtés et les diagonales.

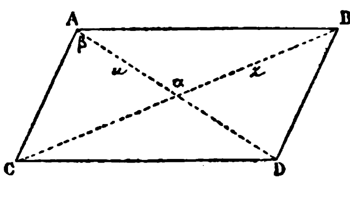
La figure ci-après donne

$$x + y + z + u = a, \tag{1}$$
$$u^2 + z^2 - 2uz \cos \alpha = x^2, \tag{2}$$

$$u^2 + z^2 + 2uz \cos\alpha = y^2, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 - 2xy \cos\beta = 4z^2. \tag{4}$$

Pour résoudre ce système, posons

$$x = r\sqrt{2}\sin\varphi,$$
$$y = r\sqrt{2}\cos\varphi,$$
$$u = r'\sin\theta,$$
$$z = r'\cos\theta.$$



Or si on ajoute (2) et (3) et si l'on remplace x, y, z, u par leurs valeurs, on trouve

$$r = r'.$$

Cela posé, substituons dans (2), (3), (4), il vient

$$1 - \sin 2\theta \cos\alpha = 2\sin^2\varphi, \tag{5}$$
$$1 + \sin 2\theta \cos\alpha = 2\cos^2\varphi, \tag{6}$$
$$1 - \sin 2\varphi \cos\beta = 2\cos^2\theta. \tag{7}$$

Multiplions (5) par (6), il vient

$$1 - \sin^2 2\theta \cos^2\alpha = \sin^2 2\varphi$$

et (7) peut s'écrire

$$\sin 2\varphi \cos\beta = \cos 2\theta.$$

Éliminons $\sin 2\varphi$ entre ces deux dernières équations, il vient $\quad \cos^2\beta - \sin^2 2\theta \cos^2\alpha \cos^2\beta = \cos^2 2\theta,$

d'où
$$\cot g\, 2\theta = \sin\alpha \cot g\, \beta. \tag{8}$$

De même
$$\cot g\, 2\varphi = \sin\beta \cot g\, \alpha. \tag{9}$$

Or (1) donne

$$r\left[\sqrt{2}\,(\sin\varphi + \cos\varphi) + \sin\theta + \cos\theta\right] = a$$

et en appliquant la formule

$$\sin\mu + \cos\mu = 2\sin 45\cos(\mu - 45) = \sqrt{2}\,\cos(\mu - 45),$$

on a $\quad r\sqrt{2}\left[\sqrt{2}\,\cos(\varphi - 45) + \cos(\theta - 45)\right] = a,$

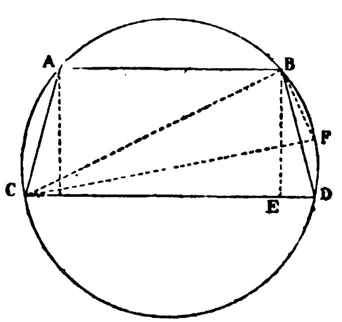
d'où $\quad r = \dfrac{a}{\sqrt{2}\left[\sqrt{2}\cos(\varphi - 45) + \cos(\theta - 45)\right]}.$

Les équations (8) et (9) donnent θ et φ; par suite r est connu par suite aussi x, y, z, u.

QUESTION 391

Calculer les éléments d'un trapèze inscrit dans un cercle, connaissant un angle et la surface.

Soit α l'angle donné BDC, R le rayon du cercle circonscrit, m^2 la surface.



Soient en outre

$$BD = x,\ CD = y,$$

on a

$$AB = y - 2ED = y - 2x \cos \alpha$$

$$BE = x \sin \alpha.$$

$$\text{Or } m^2 = \frac{AB + CD}{2} \cdot BE\ ;$$

donc en remplaçant

$$m^2 = \frac{2y - 2x \cos \alpha}{2} x \sin \alpha$$

ou

$$m^2 = xy \sin \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha. \qquad (1)$$

D'un autre côté en joignant BC, on a

$$\overline{BC}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

Menant le diamètre CF, et remarquant que l'angle en F est égal à α, on a

$$BC = 2R \sin \alpha\ ;$$

dès lors

$$4R^2 \sin^2 \alpha = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) résolvent la question.

De (1) on tire $y = \dfrac{m^2 + x^2 \sin \alpha \cos \alpha}{x \sin \alpha}$;

portant cette valeur dans (2) et réduisant, il vient

$$x^4 \sin^4 \alpha - 4R^2x^2 \sin^2 \alpha + m^4 = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de discuter cette équation et de calculer y.

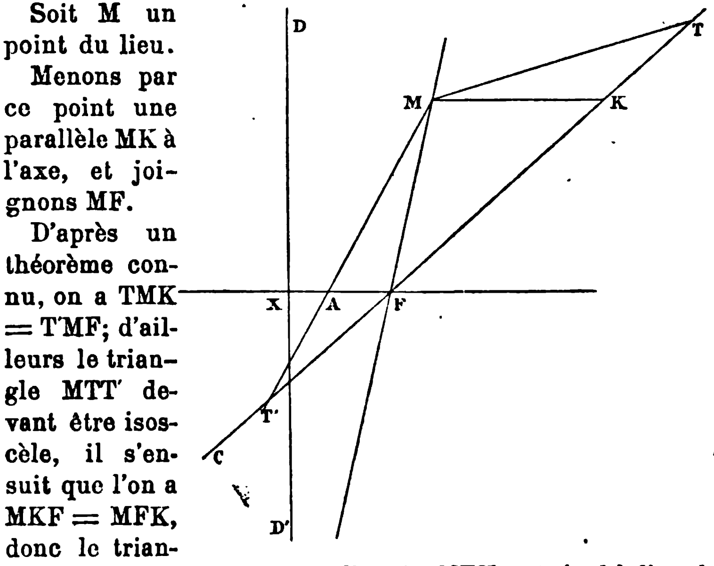
QUESTION 40

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Trouver le lieu des points tels que si de ces points on mène des tangentes à une parabole, elles forment avec une droite fixe un triangle isoscèle.

On peut toujours faire passer la droite fixe par le foyer: car si elle n'y passait pas, on lui mènerait une parallèle par le foyer.

Soit M un point du lieu. Menons par ce point une parallèle MK à l'axe, et joignons MF.



D'après un théorème connu, on a TMK = T'MF; d'ailleurs le triangle MTT' devant être isoscèle, il s'ensuit que l'on a MKF = MFK, donc le triangle MFK est aussi isoscèle; l'angle MFK est égal à l'angle TED que fait la droite fixe avec l'axe, donc la droite FM a une direction fixe, et le lieu du point M est la droite FM déterminée de façon qu'elle fasse avec l'axe un angle double de l'angle de TT' avec l'axe.

QUESTION 41

Solution par M. Devin, élève au Lycée Charlemagne.

Si l'on considère une parabole rapportée à son axe Ox *et à sa tangente au sommet* Oy; *la normale en un point quelconque* M *de cette parabole rencontre l'axe en* B *et la tangente au sommet en* I; *soit* C *le milieu de* MB; *si l'on joint* OC, *la hauteur* IH *du triangle* OIC *est la polaire de l'origine par rapport au cercle décrit sur* MB *comme diamètre.*

Menons la tangente MT au point M à la parabole ; elle rencontre la tangente au sommet en A.

De M abaissons la perpendiculaire MP sur l'axe Ox

On a $OT = OP$ par suite $AM = AT$ et, si l'on joint AC, $MH = HP$

Or, MT est aussi la tangente en M au cercle décrit sur MB; par suite MP est la polaire de A par rapport à ce cercle.

Alors H, milieu de MP, est le pôle de Oy et la droite IH, qui passe par H et qui est perpendiculaire sur OC est bien la polaire de l'origine O par rapport au cercle décrit sur M.

Remarque. — Ceci prouve que le point I décrit la droite Oy quand le point M parcourt la parabole.

D'où l'on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on décrit le cercle sur la normale* MB *en un point quelconque* M *d'une parabole, cette normale et la polaire du sommet de la parabole par rapport à ce cercle se coupent sur la tangente au sommet.*

NOTA. — La même question à été résolue par M. Puig, à Montpellier.

QUESTION 42

Solution par M. MOSNAT, à Thiers.

On considère une parabole P; *d'un point* M, *mobile sur cette courbe, on abaisse une perpendiculaire* MA *sur son axe.* O *étan le sommet de la courbe, on imagine une ellipse ayant pour axes, en grandeur et en position,* OA *et* MA. *Trouver le lieu des foyers de cette ellipse.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

(G. L.)

Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — OA est le petit axe de l'ellipse. Pour obtenir les foyers, il faut alors décrire, de O comme centre, avec MA comme rayon, un arc de cercle qui coupe MA aux deux points cherchés : soient F et F′ ces deux points.

Le triangle rectangle OAF donne $\overline{AF}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OA}^2$.

Mais $OF = MA$ et $\overline{MA}^2 = 2p\ .\ OA$, par conséquent

$$\overline{AF}^2 = OA\,(2p - OA) = OA.O'A,$$

si nous prenons $OO' = 2p$.

Le lieu cherché est donc un cercle décrit sur OO′ comme diamètre.

Deuxième cas. — OA est le grand axe et par suite le lieu des foyers.

Le lieu se compose du cercle décrit sur OO′ comme diamètre et de la droite O′X.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Puig, à Montpellier Gaullaider, au lycée Saint-Louis, à Paris.

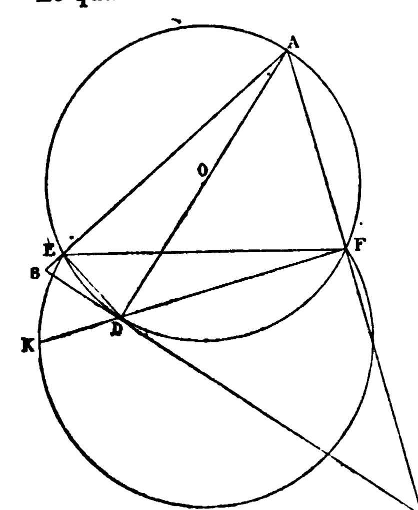
QUESTION 49

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Construire un triangle dont on connaît un angle, la hauteur issue du sommet de cet angle, et la somme des perpendiculaires abaissées du pied de cette hauteur sur les deux autres côtés.

(Hallowell.)

Le quadrilatère ADEF est inscriptible, le diamètre étant la hauteur donnée ; l'angle au centre EOF est le double de l'angle en A, et par suite la corde EF est connue en grandeur.



En outre, dans le triangle EDF, on connaît le côté EF, l'angle opposé qui est égal au supplément de l'angle en A donné, et la somme des deux cotés qui comprennent cet angle ; on sait donc construire ce triangle ; il suffit pour cela de construire sur EF un segment capable du demi-supplément de l'angle donné ; de F comme centre, avec la somme donnée pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre en K l'arc de ce segment ; on joint le point F au point K ; cette ligne rencontre en D la première circonférence tracée ; le diamètre DA donne le sommet A du triangle : pour le construire complètement, il suffit de mener en D une tangente au cercle AD jusqu'à la rencontre avec les lignes AE et AF.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Deville, à Lorient; Mosnat, à Thiers; Toussaint, à Bar-le-Duc; Fleurot, à Marseille; Gaullaider au lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 60

Solution par M. MARSY, élève au Lycée de Lille.

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0,$$

et plus généralement

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$

on fera voir que les trois racines sont toujours réelles, et même toujours commensurables, si a^2+b^2 *est un carré parfait.*

(G. L.)

Je résous l'équation générale. Pour cela, je groupe ensemble le premier et le dernier terme, puis le second et le troisième, ce qui donne

$$(2x+a+b)\left(\frac{1}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{x(x+a+b)}\right)=0.$$

On a la première solution

$$x=-\frac{a+b}{2};$$

puis il reste l'équation

$$(x+a)(x+b)+x(x+a+b)=0$$

ou

$$2x^2+2(a+b)x+ab=0.$$

La quantité sous le radical est

$$(a+b)^2-2ab,$$

ou

$$a^2+b^2.$$

Donc les racines sont toujours réelles, et de plus elles seront commensurables si a^2+b^2 est un carré parfait.

Appliquons à l'exemple donné. Ici

$$a=1,\quad b=2,\quad a+b=3;\quad a^2+b^2=5;$$

donc on a pour les racines

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Léon Chevalier, à Sainte-Barbe; Deville, à Lorient; Desplanques, à Condé-sur-l'Escaut.

ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS SIMULTANÉES
ET QUADRATIQUES

Par M. G. de Longchamps.

1. — Nous supposons connus les principes démontrés dans tous les cours, exposés dans tous les ouvrages élémentaires, principes relatifs à la théorie des inégalités. Nous nous proposons seulement, dans cette note, d'appliquer ces principes à des égalités et inégalités simultanées. Ce problème est très élémentaire; il offre pourtant quelque difficulté et il n'est pas à notre connaissance qu'il ait été encore abordé, au moins d'une façon générale et méthodique. Nous-même, dans ce petit travail, ne traitons que le cas le plus simple, celui où les égalités et inégalités considérées sont quadratiques.

Nous définirons d'abord en quoi consiste au juste le problème que nous allons essayer de traiter.

Soient U et V deux fonctions de la lettre x, fonctions quadratiques, c'est-à-dire susceptibles d'être décomposées en facteurs du premier ou du second degré tout au plus.

1° Existe-t-il des nombres x satisfaisant à la fois aux deux conditions

$$\begin{matrix} U = o \\ V > o \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} U = o \\ V < o\,? \end{matrix}$$

Ceci constitue un premier problème qui ne comporte qu'un nombre déterminé de solutions, ce nombre pouvant être zéro; et il faut trouver ces solutions.

2° Existe-t-il des nombres x satisfaisant à la fois aux deux conditions

$$\begin{matrix} U > o \\ V > o \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} U > o \\ V < o\,?\ \text{etc...} \end{matrix}$$

C'est un second problème, problème dans lequel on peut dire qu'on cherche à *résoudre des inégalités simultanées;* les solutions peuvent être en nombre infini ou ne pas exister du tout. Dans le premier cas on doit chercher s'il y a des limites

entre lesquelles on doit choisir la valeur de x et déterminer ces limites.

Un troisième problème se présente aussitôt à l'esprit quand on s'est posé les deux questions précédentes, problème dans lequel on se proposerait de trouver des nombres x satisfaisant aux trois conditions :

$$\begin{matrix} U > o & & U > o & \\ V > o & \text{ou} & V > o, & \text{etc...} \\ W > o & & W < o & \end{matrix}$$

et beaucoup d'autres : mais nous n'aborderons, et encore dans le cas le plus simple, que les deux premiers problèmes. Peut-être cette étude engagera-t-elle quelqu'un de nos lecteurs à poursuivre et à développer une question qui nous parait une des plus intéressantes et des plus délicates de l'algèbre élémentaire.

2. — *On propose de trouver les valeurs de* x *qui satisfont à la fois aux deux conditions :*

$$x^2 + px + q = o,$$
$$x - \alpha > o.$$

Ce problème revient à résoudre les deux équations :

$$x^2 + px + q = o, \qquad (1)$$
$$x - \alpha - y = o. \qquad (2)$$

en exigeant que y *soit positif.* Nous supposerons $p^2 - 4q \geq o$, car s'il en est autrement, il n'y a aucun nombre qui puisse satisfaire à la condition (1).

L'équation qui détermine y est :

$$y^2 + y\,(2\alpha + p) + \alpha^2 + p\alpha + q = o.$$

Cette équation admet deux racines y', y'', car :

$$(2\alpha + p)^2 - 4(\alpha^2 + p\alpha + q) = p^2 - 4q.$$

Mais il faut encore que ces racines soient positives.

Si $\alpha^2 + p\alpha + q < o$, il y a une racine positive, l'autre est négative; il y a donc seulement un nombre x satisfaisant au problème, c'est la racine supérieure à α; si $\alpha^2 + p\alpha + q > o$, les deux nombres y', y'' sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs; positifs si $2\alpha + p < o$, négatifs si $2\alpha + p > o$.

En résumé :

$\alpha^2 + p\alpha + q < 0$ — une solution,

$\alpha^2 + p\alpha + q > 0 \begin{cases} 2\alpha + p < 0 & \text{deux solutions,} \\ 2\alpha + p > 0 & \text{zéro solution.} \end{cases}$

3. — *Trouver les valeurs de* x *qui satisfont à la fois aux deux conditions :*

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + p'x + q' > 0. \qquad (2)$$

Conformément à la méthode que nous avons indiquée, nous posons :

$$x^2 + p'x + q' - y = 0. \qquad (3)$$

Nous supposons $p^2 - 4q > 0$, bien entendu, et nous examinerons d'abord le cas particulier où $p = p'$. Les équations (1) et (3) entraînent celle-ci :

$$y = q' - q;$$

puisqu'on exige que y soit > 0, on répondra donc que si $q' - q > 0$ il y a deux solutions; il n'y en a aucune si $q' - q \leq 0$.

Abordons maintenant le cas général et supposons dans ce qui va suivre $p' - p \gtrless 0$.

Les équations (1) et (3) donnent pour déterminer y, et en appliquant la règle connue :

$$(q' - q - y)^2 = (pq' - qp' - py)(p' - p),$$

ou

$$y^2 + y \{2(q - q') + p(p' - p)\} + \text{T} = 0. \qquad (4)$$

En posant :

$$\text{T} = (q - q')^2 - (p' - p)(pq' - qp'),$$

$$\text{S} = p(p - p') + 2(q' - q).$$

Il est facile de vérifier que l'équation (4) admet deux racines différentes; on trouve, en effet,

$$\{2(q - q') + p(p' - p)\}^2 - 4\text{T} = (p' - p)^2 (p^2 - 4q),$$

quantité positive, puisque nous supposons $p' - p \gtrless 0$ et $p^2 - 4q > 0$.

En raisonnant comme dans le cas qui précède, on forme le tableau suivant :

$\text{T} < 0$ — *une solution et une seule,*

$\text{T} > 0 \begin{cases} \text{S} > 0 & \textit{deux solutions,} \\ \text{S} < 0 & \textit{zéro solution,} \end{cases}$

$\text{T} = 0 \begin{cases} \text{S} > 0 & \textit{une solution,} \\ \text{S} < 0 & \textit{zéro solution.} \end{cases}$

REMARQUE. — On ne peut pas avoir à la fois $S = o$ et $T = o$, sans avoir nécessairement : ou bien $p = p'$ avec $q = q'$, ou $p^2 - 4q = o$ avec l'une des conditions $S = o$, $T = o$.

Cette remarque est évidente, elle peut se vérifier par un calcul facile.

4. — *Supposons maintenant qu'on veuille trouver toutes les valeurs de* x *qui satisfont aux deux inégalités simultanées :*

$$x^2 + px + q > o,$$
$$x - \alpha > o.$$

Nous supposons $\frac{p^2}{4} - q > o$; si non la première inégalité aurait lieu pour toutes les valeurs de x et le problème serait immédiatement résolu par toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $\alpha, +\infty$.

Considérons les deux équations à trois inconnues

$$y = x^2 + px + q$$
$$z = x - \alpha$$

Lorsqu'on donne à x une valeur arbitraire x', il en résulte pour y et pour z des valeurs correspondantes bien définies y', z' ; les seules conditions imposées sont $y' > o$, $z' > o$. Appelons x_1 la plus petite, x_2 la plus grande racine de l'équation $x^2 + px + q = o$ et supposons d'abord

$$\alpha^2 + p\alpha + q < o,$$

alors α est compris dans l'intervalle $x_1\, x_2$ et les valeurs de x qui satisfont aux deux inégalités sont celles qui sont comprises entre x_2 et $+\infty$. Si, au contraire, $\alpha^2 + p\alpha + q > o$, deux cas sont à distinguer suivant que α est inférieur à x_1 ou supérieur à x_2 ; dans la première hypothèse on peut prendre pour x toutes les valeurs comprises entre α et x_1 et entre x_2 et $+\infty$, dans la seconde seulement toutes les valeurs de x supérieures à α. Pour distinguer ces deux derniers cas, on peut remarquer que $x_1 + x_2 = -p$ et que si $\alpha < x_1$ on a aussi $\alpha < x_2$ et par suite

$$2\alpha < x_1 + x_2 \quad \text{ou} \quad 2\alpha + p < o.$$

Si au contraire $\alpha > x_2$, on a de même $2\alpha + p > o$ et l'on peut résumer cette discussion ainsi qu'il suit:

Étant données les deux inégalités

$$x^2 + px + q > 0$$
$$x - \alpha > 0,$$

avec la condition $p^2 - 4q > 0$

et ayant posé $x^2 + px + q = 0$:

1° *Si* $\alpha^2 + p\alpha + q < 0,$

les solutions sont déterminées par les nombres supérieurs à la plus grande racine.

2° *Si* $\alpha^2 + p\alpha + q > 0,$

on distinguera les deux hypothèses $2\alpha + p < 0$ *et* $2\alpha + p > 0$: *dans le premier cas on pourra prendre pour* x *tous les nombres de l'intervalle qui sépare* α *de la plus petite racine et aussi ceux qui sont supérieurs à la plus grande racine : dans le second cas, on prendra, pour* x, *les nombres supérieurs à* α, *et ces nombres seuls.*

5. — Supposons enfin que l'on veuille résoudre *les deux négalités simultanées :*

$$x^2 + px + q > 0$$
$$x^2 + p'x + q' > 0.$$

Nous supposons, pour des raisons déjà données, $p^2 - 4q > 0$, $p'^2 - 4q' > 0$ et nous nommons x_1, x_2, les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ (1)

x_3, x_4, celle de $x^2 + p'x + q' = 0$ (2)

En posant

$$y = x^2 + px + q$$
$$z = x^2 + p'x + q',$$

on aura donc

$$y = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$z = (x - x_3)(x - x_4);$$

avec les conditions

$$y > 0$$
$$z > 0.$$

Nous nous plaçons dans le cas général, celui où les équations (1), (2), n'ont pas de racines communes, celui où l'on a, par conséquent, $T \gtrless 0$, en posant

$$T = (q - q')^2 - (p - p')(pq' - qp'),$$

Nous distinguerons trois cas dans la discussion qui va suivre suivant que les racines sont rangées en grandeur croissante dans l'un ou l'autre des ordres suivants :

1° x_1, x_2, x_3, x_4;

2° $x_1,\ x_3,\ x_2,\ x_4;$

3° $x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_2;$

x_1 désignant, nous le supposons, la plus petite des quatre racines.

Dans la première hypothèse, x peut varier depuis $-\infty$ jusqu'à x_1; puis de x_2 à x_3; enfin de x_4 à $+\infty$.

Dans la deuxième, de $-\infty$ à x_1 et de x_4 à $+\infty$.

Enfin dans la troisième de $-\infty$ à x_1 et de x_2 à $+\infty$.

On peut faire rentrer ces deux derniers cas dans un énoncé unique en disant que : x *peut varier depuis* $-\infty$ *jusqu'à la plus petite des racines et depuis la plus grande jusqu'à* $+\infty$. Il y a donc deux cas principaux à distinguer; dans l'un il y a trois intervalles pour la variation de x, dans l'autre il n'y en a plus que deux et l'on peut se proposer *de reconnaître immédiatement et sans résoudre les équations* dans lequel des deux cas on est placé.

Soit $$x^2 + px + q = o,$$
l'équation qui admet la plns petite racine x_1; pour avoir l'ordre $$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$$
il est nécessaire et suffisant que les *deux racines* de cette équation satisfassent *l'une et l'autre* à l'inégalité
$$x^2 + p'x + q' > o.$$

Or si l'on avait $T < o$, nous avons vu plus haut (deuxième cas) qu'une seule des racines x_1, x_2 répondait à cette condition; on n'a pas d'ailleurs $T = o$; on doit donc enfin supposer $T > o$. Ainsi dans l'hypothèse $T > o$, on peut avoir l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4; de plus on ne peut avoir que celui-ci puisque x_1 est la plus petite racine (V. le deuxième cas). Concluons donc : *Si l'on propose de résoudre les deux inégalités* $U > o$, $V > o$,
$$U = x^2 + px + q,\quad V = x^2 + p'x + q'.$$

Les équations $U = o$, $V = o$ *ayant comme racines quatre nombres différents,* x_1 *désignant le plus petit d'entre eux,* x_4 *le plus grand, si* U *représente celle de ces deux équations qui admet pour racine* x_1, *ayant calculé la fonction*
$$T = (q - q')^2 - (p - p')\,(pq' - qp').$$

Si $T > o$, x *peut varier dans trois intervalles :*

1° *De* $-\infty$ *à* x_1;

2° *Dans l'intervalle des deux racines comprises entre* x_1 *et* x_4;

3° *De* x_4 *à* $+\infty$.

Si, au contraire $T < 0$, x *peut varier seulement dans deux intervalles*

1° *De* $-\infty$ *à* x_1;

2° *De* x_4 *a* $+\infty$.

Remarque. — Si l'on a $T = 0$, cas particulier que nous avons réservé, on voit encore que x peut varier comme dans l'hypothèse $T < 0$.

6. — Dans les discussions qui précèdent, nous avons, pour plus de clarté, donné aux inégalités considérées un sens défini. On remarquera que la méthode que nous avons suivie est applicable, sauf des modifications évidentes, aux inégalités ayant un sens différent de celui que nous avons adopté dans notre exposition. Nous ferons d'ailleurs ici une dernière remarque pour montrer *comment on peut par un changement de variable transformer le sens d'une inégalité du second degré.*

Considérons l'inégalité :

$$x^2 + px + q > 0, \qquad (1)$$

1° Supposons d'abord $q < 0$.

Posons :

$$x = \frac{q}{X},$$

on aura :

$$\frac{q^2}{X^2} + \frac{pq}{X} + q > 0,$$

ou en multipliant par X^2 :

$$qX^2 + pq\,X + q^2 > 0,$$

et en divisant par le facteur négatif q:

$$X^2 + pX + q < 0. \qquad (2)$$

L'inégalité (1) se trouve ainsi transformée en une égalité équivalente, mais de sens différent.

2° Si $q > 0$, on posera d'abord :

$$x = y + h,$$

$$x^2 + px + q = y^2 + (2h + p)y + h^2 + ph + q;$$

et comme l'on suppose $p^2 - 4q > 0$, il y a une infinité de valeurs de h, savoir celles qui sont prises dans l'intervalle de deux racines de l'équation :

$$x^2 + px + q = 0,$$

satisfaisant à l'inégalité :

$$h^2 + ph + q < 0.$$

On retombe ainsi dans le cas précédent.

ÉCOLE DES MINEURS DE SAINT-ÉTIENNE 1882

Mathématiques.

On donne deux sphères O et O', et un plan P ; on propose de mener un second plan Q tel qu'il coupe les deux sphères suivant deux cercles dont les projections sur le plan P soient des ellipses ayant leurs axes respectivement égaux aux quatre longueurs données a, b, a', b'. Le plan Q sera déterminé par son intersection avec le plan P et l'angle des deux plans. — Discuter.

— Chercher la condition pour que le polynôme $x^4 + bx^2 + c$ soit divisible par $x^2 + px + q$.

— Résoudre le système suivant :

$$u^m v^n = a^x ; \quad u^n v^m = a^y ;$$
$$u^x v^y = b ; \quad u^y v^x = c.$$

— Résoudre

$$\cot g\, x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

— Étudier la variation de distance d'un point fixe A à un point d'un cercle O donné.

Physique.

Soit une balance dont le fléau pèse 50 grammes, la longueur du fléau est de $0^m,40$; son centre de gravité est à $0^m,01$ au-dessous de l'axe de suspension ; l'aiguille indicatrice a $0^m,20$ de longueur. On demande : 1° le déplacement de l'aiguille pour un poids p mis dans l'un des plateaux ; 2° quelle modification il faudrait apporter à l'appareil pour qu'il pût peser des poids décroissants jusqu'à 1 milligramme. On admettra que le déplacement minimum appréciable à l'œil nu pour l'extrémité de l'aiguille est de 1/2 millimètre.

— Soit un cône qui, plongé par sa pointe dans l'eau, émerge d'une hauteur égale à a, et, plongé dans le mercure, émerge d'une hauteur égale à b; on demande la hauteur totale du cône et la densité de la matière dont il est fait. — Application, $a = 0.2$; $b = 0.9$; densité du mercure, 13.59.

— Considérons un tube à deux branches réunies par un tube capillaire ; une des branches est fermée, et a $1^m,50$ de hauteur ; on a versé du mercure dans le tube, de façon à enfermer un certain volume d'air. A la pression de $0^m,70$, et à 0°, le mercure s'élève de 1 mètre dans la branche fermée et de $0^m,40$ dans la branche ouverte ; on demande quelle sera la position de la colonne mercurielle à la pression P et à la température T ; le coefficient de dilatation cubique du mercure est 0,00006 ; le coefficient de dilatation cubique de l'air est 0,0036 ; on négligera la dilatation du verre. — Application : $P = 0.720$; $T = 100°$.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Juillet 1882.

BORDEAUX

Résoudre $\sin x = \frac{p}{q} \cot g\, x$; discuter.

APPLICATION : $p = 23$, $q = 30$.

— Un terrain triangulaire a pour côtés 130, 140, 150 mètres. on creuse tout autour un fossé qui raccourcit chacun des trois côtés de 3 mètres; la profondeur du fossé est de $1^m,50$. On répand ensuite sur le triangle la terre provenant du déblai à une hauteur uniforme. Quelle sera cette hauteur ?

— On donne un cylindre horizontal de rayon R; on pose sur ce cylindre une tige rigide AB, pesante, de longueur 2L. dont le poids est p par unité de longueur. Lorsque la tige est posée horizontalement, s'appuyant sur son point milieu, elle reste en équilibre. On suspend à son extrémité A un poids π. la tige roule sans glissement sur le cylindre et prend la

position A'B' où elle est immobile. Trouver à ce moment l'angle que fait A'B' avec l'horizon.

Application : $L = 1$, $R = 2$, $\pi = 5$, $p = 12$.

— Somme des n premiers termes d'une progression géométrique décroissante.

Le premier terme est égal à a, la raison à q. Calculer cette somme quand $n = 12$, $a = 110$, $q = \frac{9}{10}$. Dans ce cas on demande la différence qu'il y a entre cette somme et le nombre qu'on obtiendrait si la progression était continuée à l'infini.

— Inscrire dans un cercle de rayon R un triangle isoscèle tel que la somme de la base et de la hauteur soit égale à une quantité donnée h. Maximum de h. Calculer la distance de la base au centre du cercle dans le cas où $R = 135$ et $h = 255$.

— Résoudre $\sin(\alpha + x) = \frac{1}{3}\cos(\alpha - x)$.

Cas où $\alpha = 18°30'$.

— Calculer le périmètre et la surface d'un hexagone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R. Calculer en outre le volume et la surface engendrés par cet hexagone en tournant autour d'un diamètre passant par un de ses sommets.

Tansformer $\frac{1}{a - b\sqrt{c}} - \frac{1}{a + b\sqrt{c}}$ et calculer cette expression pour $c = 3$, $b = 8$. $a = 20$.

TOURNON

Dans une sphère donnée inscrire un cylindre tel que son volume augmenté de trois fois les volumes des segments sphériques qui ont même base que lui donne une somme égale à πa^3. Maximum de ce volume.

NANTES

Les racines d'une équation du deuxième degré ont $4a^2b^2$ pour différence, et $(a^4 - b^4)^2$pour produit.Calculer ces racines. Montrer que si a et b sont entiers, ces racines sont des nombre s positifsentiers et carrés parfaits.

TOULOUSE

Les angles consécutifs A et C d'un trapèze sont droits. C. donne les côtés parallèles AB $= a$, CD $= b$ et le côté AC $=$ ... On coupe le trapèze par une droite EF parallèle à AB et ... longueur x. Calculer les segments AF, CF de la droite AC par la considération des aires des trapèzes ABEF, CDEF, ABCD.

Si on fait tourner la figure autour de AC, calculer les volumes engendrés par les trapèzes ABEF, EFDC. Déterminer x de façon que ces volumes soient égaux.

— Le grand axe de l'orbite d'une planète est quadruple du grand axe de l'orbite terrestre. Connaissant la durée de la révolution sidérale de la terre, évaluer en jours solaires moyens la durée de la révolution sidérale de la planète proposée.

MARSEILLE

On coupe un tétraèdre SABC par un plan parallèle aux deux arêtes opposées SA, BC; démontrer que l'intersection est un parallélogramme; maximum ou minimum de cette surface.

— Démontrer que dans un pentagone régulier les diagonales qui n'aboutissent pas au même sommet se coupent en moyenne et extrême raison.

— Inscrire dans un triangle équilatéral ABC, de côté a, un triangle équilatéral DEF, de surface égale à la moitié du premier. Calculer les segments AD, DB, en fonction de a.

NANTES

Un levier pesant a la forme d'un triangle rectangle OBA: l'angle A est égal à α; la matière dont le triangle est composé est homogène; il peut tourner dans un plan vertical autour de l'angle droit O. Quelle force faut-il appliquer suivant le côté AB pour maintenir ce levier en équilibre dans une position donnée, en supposant du reste son poids connu et égal à P.

BESANÇON

On donne un cercle de rayon R; sur le diamètre AB on construit un triangle équilatéral ABC; on prend sur OA

une longueur OD $= a$; on tire CD, et on prolonge cette droite jusqu'à sa seconde intersection M avec la circonférence. Déterminer la longueur de la corde AM.

MONTPELLIER

Simplifier l'expression

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

— Résoudre l'équation

$$\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{Cos}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right).$$

PAU

La diagonale d'un rectangle est $2s$. Si l'on allonge le plus petit côté de a, en raccourcissant le plus grand de b, la diagonale reste la même; calculer les côtés du triangle.

— On donne un triangle équilatéral ABC, et on partage BC en quatre parties égales. — On joint chacun des points de division au sommet A. Calculer les quatre angles en A, et le rapport de chacune des lignes de division au côté BC.

— Deux droites rectangulaires AB, AC étant données, ainsi qu'une circonférence de rayon R tangente à ces droites, trouver sur AB un point B tel qu'en menant de ce point une troisième tangente, la surface du triangle ABC ainsi obtenu soit égale à un carré donné m^2.

— Résoudre l'équation

$$\cos^2 x = \frac{5}{12} \sin x.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

64. — On donne un demi-cercle construit sur la droite PQ comme diamètre ; soient A et B deux points pris sur la circonférence, et tels que PA + QB $= 2$R ; les droites PB et QA se coupent en un point C.

1° Démontrer que le triangle CPQ jouit de cette propriété que l'inverse de la hauteur relative à PQ est égal à la somme des inverses des côtés qui la comprennent.

2° Établir que cette propriété s'applique aussi au triangle CAB, en considérant la hauteur issue du point C.

3° Étudier la variation de AB quand le point A est supposé mobile sur la circonférence, et montrer que cette longueur passe par un maximum relatif quand la figure PABQ est un demi-hexagone régulier.

4° Ayant projeté les points P,Q sur AB, on obtient deux points A',B'. On propose d'établir la relation qui existe entre A'B' et AB. *(G. L.)*

65. — Démontrer les propositions suivantes :

1° La somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par trois fois le terme du milieu, et toujours par 9.

2° Le nombre $\frac{n^3 + (n+2)^3}{4}$ est toujours un nombre entier ; il est de plus toujours un nombre composé, excepté pour $n = 1$.

3° Les nombres de la forme arithmétique $n^4 + n^2 + 1$ sont toujours composés, excepté pour $n = 1$. *(G. L.)*

66. — On considère deux cercles Δ et Δ' se coupant orthogonalement. On prend sur Δ un point quelconque A, et on mène par ce point à Δ une tangente qui rencontre Δ' aux points B et C ; par ces points et par le point A', diamétralement opposé à A, on fait passer une circonférence qui rencontre AA' en un point I. Trouver le lieu décrit par ce point I, lieu qui est une circonférence. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25070-2.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Concours pour les Écoles.

Concours généraux et académiques.

Baccalauréat ès sciences.

Examens divers.

Questions résolues.

Variétés.

TABLE ALPHABETIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23070-2.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.

DE LONGCHAMPS
Professeur
de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne.

2e SÉRIE

TOME SIXIÈME



ANNÉE 1882

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1882

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

PROBLÈME D'ANALYTIQUE

Lieu des sommets des coniques bitangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ces coniques passent par un point fixe P $(x'y')$ *et l'un des axes est dirigé suivant le grand axe de l'ellipse. Distinguer les différentes formes du lieu.* (Concours académique de Poitiers.)

La condition imposée que l'un dés axes soit dirigé suivant XX', revient à la condition de symétrie par rapport à cette même ligne, et cette condition sera satisfaite si la corde commune EF est toujours perpendiculaire sur OX.

L'équation des coniques bitangentes et confondant l'un de leurs axes avec XX' sera donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda (x - \alpha)^2 = 0, \qquad (1)$$

α étant l'abscisse à l'origine de la corde EF.

La condition pour ces coniques de passer par le point P $(x'y')$ se traduit par la relation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 + \lambda(x' - \alpha)^2 = 0 \qquad (2)$$

et les coordonnées des sommets dont on cherche le lieu vérifieront l'équation de l'axe parallèle à OY, qui est

$$f'_x = x\left(\frac{1}{a} + \lambda\right) - \alpha\lambda = 0. \qquad (3)$$

On aura le lieu en éliminant les paramètres α et λ entre (1), (2), (3).

Elimination. — Ecrivons, pour simplifier, les relations précédentes, sous la forme

$$A + \lambda(x - \alpha)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(x - \alpha)^2 = - A \qquad (1)$$

$$P + \lambda(x' - \alpha)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(x' - \alpha)^2 = - P \qquad (2)$$

$$\frac{x}{a^2} + \lambda(x - \alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(x - \alpha) = - \frac{x}{a^2} \qquad (3)$$

(on voit ce que représentent A et P);

formons le rapport (1) (3) $\left\{ \begin{aligned} x - \alpha &= \frac{Aa^2}{x} \\ \alpha &= \frac{x^2 - Aa^2}{x}; \end{aligned} \right.$

cette valeur de α substituée dans (3) donne

$$\lambda = - \frac{x^2}{Aa^4};$$

les deux paramètres α et λ déterminés, l'équation (2) devient

$$P - \frac{x^2}{Aa^4}\left(x' - \frac{x^2 - Aa^2}{x}\right)^2 = 0$$

$$a^4 \, P.A = \left[xx' - x^2 + a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]^2$$

$$A.P = \left[\frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right]^2$$

d'où l'équation

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]\left[\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right] = \left[\frac{'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]^2$$

Cette forme $A.P = C^2$ prouve à la fois que

1° L'ellipse $A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, la parabole $C = \frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et la courbe $A.P - C^2 = 0$ se coupent aux mêmes points;

2° En ces points la courbe est tangente à l'ellipse.

Déterminons ces points remarquables.

Intersection avec l'ellipse. — Il suffit de résoudre

$$A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$C = \frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ormons $A - C = o$, $\frac{x}{a^2}(x - x') = o$ ce qui conduit à ce résultat : les points d'intersection du lieu avec l'ellipse sont sur les droites

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = o & (1) \\ x = x' & (2) \end{array} \right.$$

Le premier système donne les sommets B et B'.

Le second système donne les points dont les ordonnées sont

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x'^2}{a^2}$$

Ces points seront réels si $x' \leq \pm a$.

Ces points seront imaginaires si $x' > \pm a$;
au cas particulier où $x' = a$, les points se confondent.

L'équation est bicarrée en y; du second degré en x, elle peut donc être résolue par rapport aux deux variables; cette particularité servira pour la discussion.

Elle est symétrique par rapport à l'axe des x (évident *à priori*).

La courbe passe par le point P $(x'y')$ et en ce point la tangente est horizontale (ce que nous vérifierons plus loin par le calcul). Ces deux remarques se justifient facilement.

1° *Elle passe par le point* P. — En effet on peut déterminer une conique en ajoutant aux conditions de bitangence et de symétrie (ce qui fait 3 conditions) deux autres conditions, celles d'avoir pour sommet le point P. Cette conique particulière rentrera donc dans la famille considérée et donnera un point du lieu qui sera le point P.

2° En ce point la *tangente est horizontale*, car les coniques considérées formeront dans le voisinage de P un ensemble représenté soit par la figure (*a*), soit par la figure (*b*).

Les coniques du groupe (*a*) ont toutes l'axe parallèle à OY, plus grand que celui de la conique particulière dont nous parlons.

C'est le contraire pour le groupe (*b*). Dans les deux cas, la courbe, lieu des sommets M, sera tangente à $y = y'$.

Cherchons donc les *tangentes horizontales* :

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$$

formons

$$f_x=\frac{2x}{a^2}P-2\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\frac{x'}{a^2}=0$$

$$x\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-x'\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

$$x\left(\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-x'\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

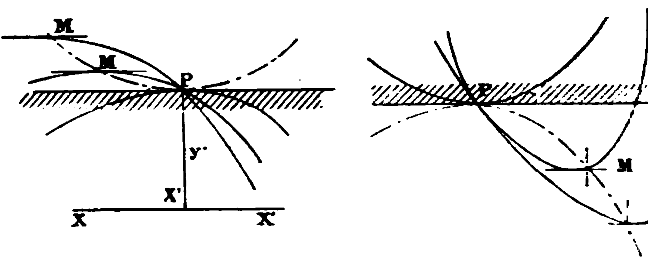


Fig. a. *Fig. b.*

Cette relation est vérifiée par les deux systèmes de vale[…]

$$1^\circ \begin{cases} x=0 \\ y=\pm b \end{cases}$$

ce sont les points B et B′ que nous avons déjà trouvés.

$$2^\circ \begin{cases} x=x' \\ y=\pm y' \end{cases}$$

c'est-à-dire le point P (ou son symétrique).

En résumé, l'ensemble des tangentes horizontales est

$$(y^2-y'^2)(y^2-b^2)=0$$

Tangentes verticales. — Résolvons l'équation bicarrée en […]

$$\frac{y^4}{b^4}+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{2xx'}{a^2}-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-\frac{2xx'}{a^2}$$

$$+\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$$

la condition $B^2-4AC\geq 0$ de réalité des racines donne

$$\frac{1}{b^4}\left\{\frac{2xx'}{a^2}-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right\}^2+\frac{4}{b^4}\left\{\right.$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2xx'}{a^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\Big\} \geq 0$$

ou en groupant les termes

$$\frac{4}{b^4}\,\frac{x^2}{a^2}\,P - \frac{4}{b^4}\,\frac{xx'}{a^2}\,P + \frac{1}{b^4}\,P \geq 0$$

$$4x^2 - 4xx' + a^2P \geq 0$$

Ce trinôme admet des racines qui représentent des droites verticales tangentes et en même temps droites de séparation des points réels d'avec les points imaginaires du lieu.

On a donc

$$X = \frac{x'}{2} \pm \sqrt{\frac{x'^2 - a^2\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)}{2}}$$

$$X = \frac{x'}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{y'^2}{b^2}},$$

telles sont les deux tangentes verticales données par cette discussion.

Pour que ces tangentes verticales existent, il faut que le point P soit compris entre les deux parallèles $y = \pm b$.

Les positions que le point P peut occuper par rapport à ces deux parallèles et à l'ellipse, vont servir de base à la discussion, en divisant le plan en régions ; chacune de ces régions imposera un caractère particulier à la courbe.

Pour construire les tangentes verticales, on remarquera que I et D sont les milieux de PK et de PH.

Car le point K, par exemple, intersection de l'ellipse avec la droite $y = y'$, a pour abcisse

$$X_1 = a\sqrt{1 - \frac{y'^2}{b^2}},$$

de sorte que $$X = \frac{x' + X}{2}.$$

Intersection du lieu avec oy. — Ces points sont donnés par

$$\frac{y^4}{b^4} - \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0;$$

on aura donc en général quatre points

$$y = \pm b$$

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

il y aura donc toujours quatre points d'intersection.

Intersection du lieu avec ox. — Les points sont donnés par l'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} - 1\right)^2 \quad (1)$$

qui conduit à

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2xx'}{a^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0.$$

Remarquons que l'équation (1) est de la forme

$$f(x'y')\, f(x, 0) = (xf_{x'} + 0f_y + Zf_z)^2,$$

ce qui prouve que les points de l'équation (1) vérifient l'équation de l'ensemble des deux tangentes. Cette remarque servira beaucoup pour la construction des courbes.

Si on résout l'équation (1) elle donne

$$x = -\frac{\frac{x'}{a^2} \pm \frac{y'}{b}\sqrt{P}}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right)}$$

ce qui montre que

$P < 0$ le lieu ne coupe pas l'axe des x ;

$P = 0$ un seul point;

$P > 0$ deux points d'intersection réels et distincts

si $b^2 = y'^2$ un point rejetté à ∞;

si $b^2 < y'^2$ les deux racines positives;

si $b^2 > y'^2$ les deux racines de signes contraires.

Bien que le signe de $(x'^2 - a^2)$ n'ait pas une grande influence dans la discussion qui précède, nous le considérerons et nous obtiendrons ainsi des points particuliers dans les régions caractérisées, à la fois, par le signe de $(y^2 - b^2)$ et de P. Tous les cas qui peuvent se présenter sont compris dans le tableau suivant,

$$
\mathrm{P} < 0 \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \left\{ \begin{array}{l} y' > 0 \\ y' = 0 \end{array} \right. \\ x' = 0 \left\{ \begin{array}{l} y' > 0 \\ y' = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{ on a toujours d'ailleurs } y'^2 < b^2.
$$

$$
\mathrm{P} = 0 \left\{ \begin{array}{l} x' = 0 \\ x' < a \\ x' = a \end{array} \right\} \text{ on a toujours d'ailleurs } y'^2 \leq b^2.
$$

$$
\mathrm{P} > 0 \left\{ \begin{array}{l} y'^2 < b^2 \left\{ \begin{array}{l} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{array} \right. \\ y'^2 = b^2 \left\{ \begin{array}{l} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{array} \right. \\ y'^2 > b^2 \left\{ \begin{array}{l} x' = 0 \\ x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

Nous allons indiquer rapidement la forme de la courbe ans chacun de ces cas.

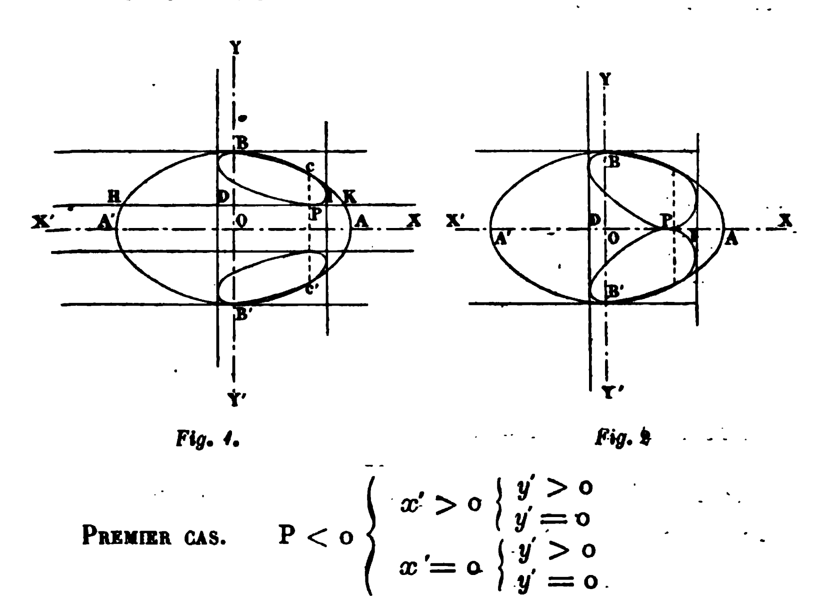


Fig. 1. *Fig. 2.*

Premier cas. $\mathrm{P} < 0 \left\{ \begin{array}{l} x' > 0 \left\{ \begin{array}{l} y' > 0 \\ y' = 0 \end{array} \right. \\ x' = 0 \left\{ \begin{array}{l} y' > 0 \\ y' = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$

(1) $x' > 0$ et $y' > 0$. Le point est quelconque. On place les tangentes verticales de telle façon que I soit milieu de PK, D le milieu de PH. La figure 1 indique la forme générale du lieu.

(2) $x' > 0$ et $y' = 0$. Le point P est sur l'axe des X. Les deux tangentes horizontales se sont confondues et on a la figure 2.

(3) $x' = 0$ avec $y' > 0$. Le point P est sur l'axe des OY. La courbe est symétrique par rapport aux deux axes, le point O est centre. La figure 3 indique la forme.

(4) $x' = 0$ avec $y' = 0$. Le point P est au centre. La courbe offre en ce point un point double dont les tangentes sont

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

c'est-à-dire les diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse. La figure 4 rend compte de la forme.

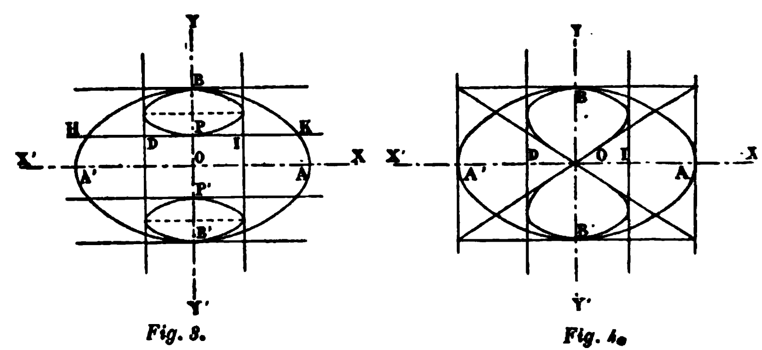


Fig. 3. *Fig. 4.*

Deuxième cas. $P = 0 \begin{cases} x' < a \\ x' = 0 \\ x' = a \end{cases}$

1° Le point P est quelque part sur l'ellipse $x' < a$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 = 0\,;$$

c'est donc le cas de deux paraboles superposées;

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{xx'}{a^2}$$

Elle a son axe sur XX', et son sommet a pour abscisse

$$x = \frac{a^2}{x'}$$

c'est le pôle de la droite EF, par rapport à l'ellipse (*fig. 5*).

2° $x' = 0$. Le point P est en B sommet de l'ellipse. Le lieu se réduit à $\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 = 0$

Ce sont les deux tangentes en B et B'.

3° $x' = a$. Le point P est en A

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est une parabole, son sommet S est en A, elle est donc tangente à l'ellipse en ce point.

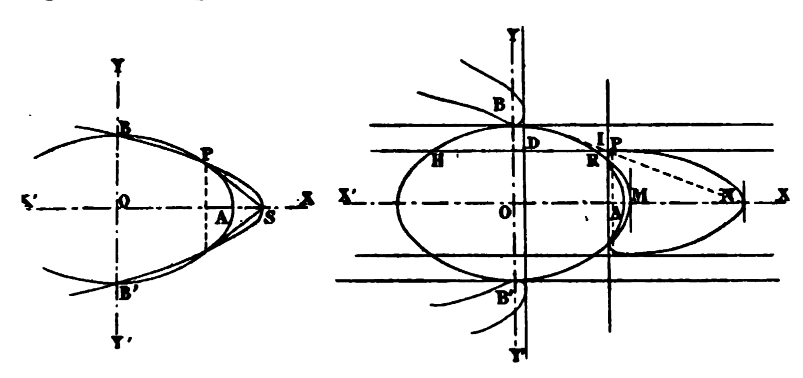


Fig. 5. *Fig. 6.*

TROISIÈME CAS. $P > 0 \begin{cases} y'^2 < b^2 \\ y'^2 = b^2 \\ y'^2 > b^2 \end{cases}$

Première hypothèse. $y'^2 < b^2 \begin{cases} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases}$

ce qui veut dire que le point P est compris entre les deux tangentes $y = \pm b$.

1° $y' < b$ avec $x' < a$. Le point P extérieur à l'ellipse reste dans le rectangle des axes. En se reportant à ce que nous avons dit sur les différents points remarquables et l'appliquant on obtient la courbe *(fig. 6)* dans laquelle

$$\begin{cases} PI = IK \\ PD = DH \end{cases}$$

les points M et N sont sur les tangentes à l'ellipse menées par P. Nous devons faire remarquer qu'il y a des branches infinies sans qu'il y ait d'asymptotes *(droites asymptotes)*.

2° $y' < b$ avec $x' = a$. Les points de tangence du croissant avec l'ellipse se confondent en A, ce que montre la figure 7.

3° $y' < b$, $x' > a$. Les points de tangence deviennent imaginaires (on l'a vu lors de la discussion) et l'équation est interprétée par la figure 8.

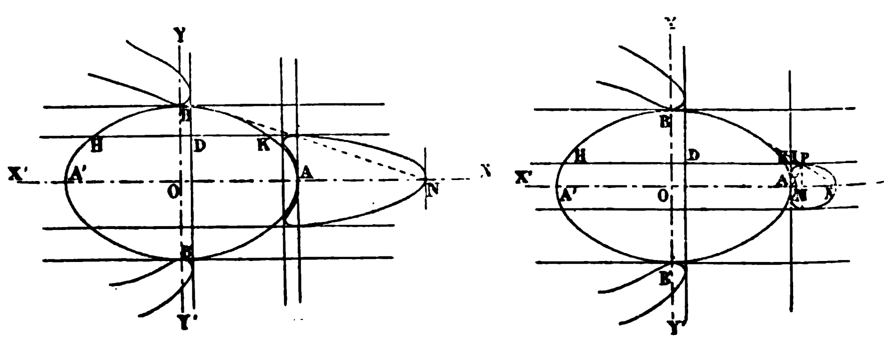


Fig. 7. *Fig. 8.*

Deuxième hypothèse. $y'^2 = b^2 \begin{cases} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases}$

L'équation s'écrit

$$\frac{x'^2}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{y^2}{b^2} - 1 + 2\frac{xx'}{a^2}\right)$$

$y = \mp b$ font partie du lieu et il reste la parabole

$$y^2 + 2\frac{b^2 xx'}{a^2} - b^2\left(\frac{x'^2}{a^2} + 1\right) = 0.$$

1° Dans le cas général $y' = b$, $x' > a$. La parabole

ne touche pas l'ellipse ; ses branches se dirigent du côté des X négatifs.

2° Dans le cas de $y' = b$ et $x' = a$, son sommet est au point A.

3° Dans le cas de $x' < a$, son sommet (toujours donné par l'intersection de la tangente menée par P à l'ellipse,

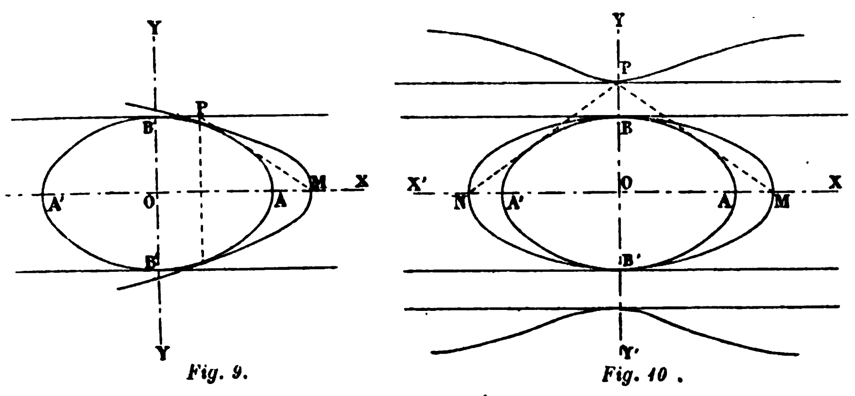


Fig. 9. *Fig. 10.*

avec l'axe des x) est à droite de A et la parabole est bitangente à l'ellipse *(fig. 9)*.

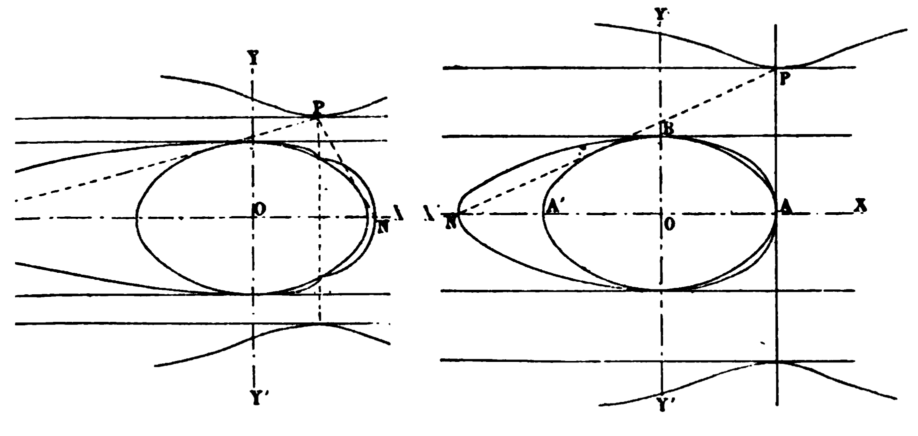


Fig. 11. *Fig. 12.*

Remarque. — Dans ce cas de $y^{2\prime} = b'^2$, il y a, comme nous l'avons déjà dit, un point d'intersection du lieu avec l'axe OX rejeté à l'infini.

Troisième hypothèse. $y'^2 > b^2$.

Le point se trouve en dehors des droites : $y = \pm b$, on peut avoir

$$y'^2 > b^2 \begin{cases} x' = o \\ x' > a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases}$$

1° $y' > b$ avec $x' = o$. La courbe est symétrique par rapport aux deux axes ; les deux tangentes verticales

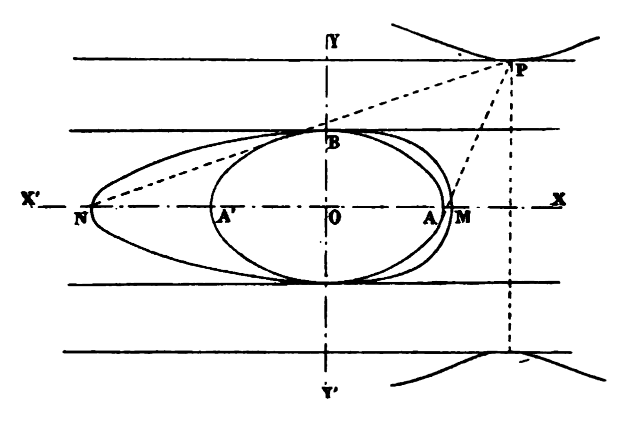


Fig. 13.

données par la discussion du radical sont imaginaires. En se conformant aux conclusions diverses que nous avons tirées sur ce cas, nous obtenons la courbe de la figure 10.

2° $y' > b$ avec $x' < a$. Les points de tangence avec l'ellipse existent, ce qui donne la forme de la figure 11.

3° $y' = b$ avec $x' = a$. Les points de tangence se confondent en A, ce qu'indique la figure 12.

4° $y' = b$ avec $x' > a$. Les points de tangence sont imaginaires *(fig. 13)*.

THÉORÈME DE TAYLOR

Par M. P. Mansion, professeur à l'Université de Gand.

On peut résumer les recherches des géomètres sur la démonstration (*) du théorème de Taylor, pour une fonction $f(x)$ continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à la n^e de x_0 à X, sous la forme suivante facile à retenir :

I. *Reste exprimé au moyen d'une intégrale définie.* — Posons

$$F(x) = f(X) - \left[f(x) + \frac{X - x}{1} f'(x) + \frac{(X - x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{(X - x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x)\right]$$

ce qui donne, comme on le trouve sans peine,

$$F'(x) = - \frac{(X - x)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n)}(x),$$

$$F(X) = 0$$

$$F(x_0) = f(X) - \left[f(x_0) + \frac{X - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(X - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \dots + \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)\right].$$

Mettons ces valeurs dans l'identité :

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} F'(x)\, dx$$

et transposons quelques termes. Il viendra

$$f(X) = f(x_0) + \frac{X - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(X - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \dots + \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\dots n - 1} f^{(n-1)}(x_0) + R_n,$$

$$R_n = \int_{x_0}^{X} \frac{(X - x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)} x\, dx,$$

(*) Nous disons *la démonstration*, parce qu'en réalité toutes les démonstrations proposées se ramènent à celles qui sont exposées ici; et celles-ci elles-mêmes sont équivalentes entre elles; car le théorème de Rolle se déduit aisément de l'égalité (1), et la seconde forme du reste de la première, quand on songe qu'une intégrale définie est une limite de somme.

c'est-à-dire le théorème de Taylor avec la forme du reste de Laplace.

II. *Reste exprimé sans intégrale définie.* — Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle : « *Entre deux racines* x_0, X *d'une équation* $\varphi(x) = 0$, *il y a une racine de l'équation dérivée* $\varphi'(x) = 0$, *si* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *sont des fonctions continues de* x_0 *à* X », à la fonction

$$\varphi(x) = Fx + (X - x)^p P,$$

où p est un exposant positif, P une constante telle que $\varphi(x_0) = 0$. On arrive ainsi, par des calculs assez simples, à la formule

$$f(X) = f(x_0) + \frac{X - x_0}{1} f'(x_0)$$
$$+ \dots + \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + R,$$
$$R_n = \frac{(X - x_0)^n}{1.\,2\dots n} \frac{n}{p} (1 - \theta)^{n-p} (x_1),$$

$x_1 = x_0 + \theta\,(X - x_0)$ étant une racine $\varphi'(x) = 0$, intermédiaire entre x_0 et X. La forme de Rn, trouvée ici, due à M. Schlömilch, donne le reste de Lagrange, si l'on y fait $p = n$, le reste de Cauchy, si l'on y fait $p = 1$.

THEORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par M. F. Landry.

A la page 5 de son second supplément à la *Théorie des nombres*, ayant pour objet le dernier théorème de Fermat, Legendre démontre que si $a + b$ ne contient pas le facteur n, le quotient $\dfrac{a^n + b^n}{a + b}$ est *premier* avec $a + b$, et que si $a + b$ contient le facteur n à la puissance ν, le nombre $a^n + b^n$ contient ce même facteur à la puissance $\nu + 1$. Dans ce dernier cas, le quotient $\dfrac{a^n + b^n}{n\,(a + b)}$ est *premier* avec $a + b$.

Le nombre n est un nombre impair quelconque ; a et b sont deux nombres *premiers* entre eux et, par suite, avec $a+b$.

Legendre procède en divisant $a^n + b^n$ par $a+b$. Voici une autre démonstration :

On pose $a = a + b - b$ et on développe $(a+b-b)^n$ par le binôme, en prenant $a+b$ pour premier terme. On trouve

$$a^n + b^n = (a+b-b)^n + b^n$$
$$= (a+b)^n - n(a+b)^{n-1} b + \ldots + n(a+b)\, b^{n-1},$$

puisque $-b^n$ détruit $+b^n$.

Il n'y a plus qu'à conclure en supprimant le facteur commun ($a+b$ ou $n(a+b)$).

Il est clair que les mêmes principes ont lieu pour $a^n - b^n$ et $a-b$, puisqu'il suffit d'écrire $-b$ au lieu de $+b$ dans $a^n + b^n$ et $a+b$.

QUESTIONS D'EXAMEN

Quelle est l'expression la plus générale des polynômes du troisième degré qui pour les valeurs $x = 1$, $x = 0$ *et* $x = -1$ *prennent les valeurs respectives* 1, — 1 et 2?

Nous formerons d'abord le polynôme unique du deuxième degré qui pour les trois valeurs de x données, prend les trois valeurs 1, — 1 et 2.

Soient U_1, U_2, U_3 les trois valeurs données ; si X_1, X_2, X_3 sont trois polynômes du deuxième degré en x, le polynôme

$$X = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

satisfera aux conditions données si on assujettit X_1, X_2, X_3 aux conditions suivantes :

$$\text{Pour } x = 1, \quad X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$
$$\text{Pour } x = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 1, \quad X_3 = 0$$
$$\text{Pour } x = -1, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 1.$$

En vertu de ces relations, on a :

$$X_1 = \lambda_1 (x+1)x, \text{ et } 1 = \lambda_1 . 2$$

d'où $$X_1 = \frac{1}{2} x (x + 1).$$

De même $X_2 = \lambda_2 (x - 1)(x + 1)$, et $1 = -\lambda_2$

d'où $X_2 = -(x - 1)(x + 1)$;

enfin $X_3 = \lambda_3 (x - 1) x$, et $1 = 2 \lambda_3$

d'où $$X_3 = \frac{1}{2} x (x - 1).$$

Le polynôme

$$X = \frac{1}{2} x (x + 1) + (x - 1)(x + 1) + x (x - 1)$$

prend ainsi les valeurs 1 pour $x = 1$, -1 pour $x = 0$, et 2 pour $x = -1$.

Ce polynôme est d'ailleurs unique de son degré; car deux polynômes entiers en x, du degré m, qui sont identiques pour plus de m valeur de x, sont identiques, quel que soit x.

Cela posé, si l'on ajoute au polynôme précédent un polynôme entier en x du troisième degré s'annulant pour $x = 1$, $x = 0$ et $x = -1$ lequel est par conséquent de la forme $m (x - 1) x (x + 1)$, on aura l'expression la plus générale des polynômes du troisième degré satisfaisant aux conditions données.

En effet, tout polynôme du troisième degré satisfaisant à ces conditions sera totalement déterminé si l'on donne la valeur qu'il prend pour une quatrième valeur de x arbitrairement choisie.

Or on peut toujours choisir m de manière que le polynôme

$$\frac{x (x + 1)}{2} + (x - 1)(x + 1) + x (x - 1) + m (x - 1) x (x + 1)$$

prenne la valeur considérée pour la quatrième valeur attribué à x.

Ce polynôme et le proposé, identiques pour plus de trois valeurs de x, seront alors identiques quel que soit x, C.Q.F.D.

Quand une équation algébrique a toutes les racines réelles, la suite des dérivées peut remplacer la suite de Sturm, c'est-à-dire

qu'il y a autant de racines comprises entre a *et* b, b > a, *qu'il y a de variations perdues quand on passe de la suite* f(a), f'(a), f''(a) ... f^m(a) *à la suite* f(b), f'(b), f''(b) ... f^m(b).

Si l'on prend, en effet, la transformée en $x + a$ de la proposée, cette équation nouvelle admet les racines de la proposée diminuées de a. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ les racines de la proposée qui sont inférieures à a; dans la transformée, les racines $\alpha_1 - a$, $\alpha_2 - a$, $\alpha_p - a$ seront négatives ; si au contraire $\alpha_{p+1} > a$, $\alpha_{p+1} - a > 0$; donc les racines de la proposée qui sont supérieures à a donnent dans la transformée des racines positives; il y a donc $m - p$ racines positives dans l'équation en $x + a$, et p racines négatives; ces racines étant d'ailleurs toutes réelles, comme les racines α elles-mêmes, l'équation $f(x + a) = 0$, c'est-à-dire

$$f(a) + xf'(a) + \frac{x}{12} f''(a) + \ldots + \frac{x^m}{1.2..m} f^m(a)$$

doit présenter, d'après le théorème de Descartes, p permanences et $m - p$ variations.

De même l'équation $f(x + b) = 0$ présentera, si α_1, α_2, ... α_p ... α_q sont les racines de la proposée inférieures à b, q permanences et $m - q$ variations.

Donc, en passant de l'équation $f(x + a) = 0$ à l'équation $f(x + b) = 0$, il se perd $m - q - (m - p)$ variations, c'est-à-dire $p - q$ variations, ou en d'autres termes, un nombre de variations égal au nombre des racines comprises entre a et b.

Il résulte de là que, si toutes les racines de $f(x) = 0$ sont réelles, il se perd, entre $-\infty$ et $+\infty$, m variations. c'est-à-dire que les dérivées jouent le même rôle que les fonctions de Sturm, dans le cas où les racines sont toutes réelles. (Ce théorème est un cas particulier du théorème de Fourrier.)

Décomposer $\dfrac{x^p + x^q - 1}{(x - 1)^3 (x^2 + 1)}$ *en fractions simples,* p *et* q *étant deux entiers quelconques.*

Le procédé de la division appliqué à ce cas général,

lorsque p et q ne sont pas donnés numériquement, est trop laborieux. Nous supposerons donc établie préalablement la possibilité de la décomposition, et cela posé, nous savons que l'on aura identiquement

$$\frac{x^p + x^q - 1}{(x-1)^3 (x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + X$$

X étant un polynôme, partie entière du développement, qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour déterminer A A_1, A_2, M et N.

On déduit de cette identité

$$x^p + x^q - 1 = A(x^2+1) + A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x-1)^2(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)^3 + X(x-1)^3(x^2+1)$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x, faisons $x = 1$; nous aurons $1 = 2A$, ce qui fournit $A = \frac{1}{2}$. Prenons les dérivées des deux membres; ces dérivées de deux quantités identiques seront elles-mêmes identiques, et l'on aura

$$px^{p-1} + qx^{q-1} = 2Ax + A_1(x^2+1) + 2A_2(x-1)(x^2+1) + \ldots + A_1(x-1) . 2x + A_2(x-1)^2 . 2x$$

les termes non écrits contenant tous $x - 1$ en facteur. Pour $x = 1$, il vient $p + q - 1 = 2A_1$, ce qui fournit A_1.

$$A_1 = \frac{p+q-1}{2}.$$

Prenons encore les dérivées des deux membres de la dernière relation; les résultats continueront à être identiques, et il viendra

$$p(p-1)x^{p-2} + q(q-1)x^{q-2} = 2A + 2A_1 x + 2A_2(x^2+1) + \ldots + 2A_1 x + 2A_2(x-1) 2x + 2A_1(x-1) + 2A_2(x-1) 2x + 2A_2(x-1)^2$$

Pour $x = 1$, il vient

$$p(p-1) + q(q-1) - 1 - 2(p+q-1) = 4A_2$$

ce qui fournit

$$A_2 = \frac{p(p-1)+q(q-1)-2(p+q)+1}{4}$$
$$= \frac{p^2+q^2-3(p+q)+1}{4}.$$

Les trois premières fractions étant trouvées, on obtiendra M et N en faisant successivement dans l'identité primitive

$$x = +i \text{ et } x = -i.$$

Pour $x = +i$, on a $i^p + i^q - 1 = (Mi + N)(i-1)^2$

Pour $x = -i$, on a $(-i)^p + (-i)^q - 1 = (Mi + N)(-i-1)^2$

Cela revient à écrire que $+i$ et $-i$ sont racines de l'équation $x^p + x^q - 1 - (Mx + N)(x-1)^2 = 0$.

Or si i est racine, $-i$ le sera également (M et N étant réels); il suffira donc de considérer la première équation qui est $$i^p + i^q - 1 = 2(Mi + N)(i+1)$$
ou $$i^p + i^q - 1 = 2(N - M) + 2i(M + N).$$

Cela posé, pour terminer la question, il faudra examiner les diverses hypothèses que l'on peut faire sur la parité de p et q relativement au nombre 4. Il serait trop long de les examiner toutes; mais prenons-en quelques-unes pour exemples :

Soit p multiple de 4, ($p = 4p'$); q peut en même temps être de l'une des formes $4q'$, $4q' + 1$, $4q' + 2$, $4q' + 3$; supposons-le, pour fixer les idées, de la forme $4q' + 1$; on aura

$$i = 2(N - M) + 2i(M + N),$$

égalité qui donne

$$N - M = 0 \quad \text{et } M + N = \frac{1}{2};$$

d'où $$N = \frac{1}{4} \quad \text{et } M = -\frac{1}{4}.$$

Soit p multiple de 4, $+1$, et q multiple de 4, $+3$; on aura $$-1 = 2(N - M) + 2i(M + N);$$

d'où $$N + M = 0 \quad \text{et } N - M = -\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire $$N = -\frac{1}{4} \quad \text{et } M = \frac{1}{4}$$

et ainsi de suite.

Enfin, pour avoir X, on réduira les quatre fractions composantes en une seule; on retranchera la somme de la frac-

tion proposée, et le résultat, qui sera un polynôme entier, sera X.

En supposant $p > q$, X est identiquement nul si $p < 5$.

C'est une quantité numérique si $p = 5$.

Enfin c'est un polynôme si $p > 5$.

En considérant la série harmonique

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

et appliquant à cette série le théorème

$$\text{Lim}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{Lim}\ \sqrt[n]{u_n}$$

on a

$$\lim \frac{n}{n+1} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

ou

$$\lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}}.$$

La limite de $1 + \frac{1}{n}$ pour n infini est 1 ; on aura donc

$$1 = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}};$$

d'où l'on conclut que la limite de $\sqrt[n]{n}$ pour n infini, c'est-à-dire la limite de $x^{\frac{1}{x}}$ pour x infini, est l'unité.

On a demandé aux examens de trouver, sans recourir à l'emploi des dérivées, quelle est la limite de l'expression $\frac{x^m}{m^p}$ pour m infini, x étant un nombre fixe donné, et p un entier positif quelconque. On peut appliquer à cette question un procédé analogue au précédent.

Si l'on considère la série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots$$

on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p}$

et $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^p}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^p}}$

Par suite, $\lim \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p} = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{n^p}}$

et comme $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p = 1$, $\lim \sqrt[n]{n^p} = 1$.

Cela posé, observons que

$$\frac{x^m}{m^p} = \left(\frac{x}{\sqrt[m]{m^p}}\right)^m.$$

La limite de $\sqrt[m]{m^p}$ est 1; donc la limite de $\dfrac{x}{\sqrt[m]{m^p}}$ est x.

Il en résulte que la limite de $\dfrac{x^m}{m^p}$ est celle de x^m; si donc x est > 1, cette limite est l'infini; si x est < 1, elle est 0; enfin si $x = 1$, elle est l'unité.

La question de la recherche de la limite de $\dfrac{x^m}{m\sqrt{m}}$ est analogue à la précédente; car $\dfrac{x^m}{m\sqrt{m}} = \dfrac{x^m}{m^{\frac{3}{2}}}$. Elle n'en est pas un cas particulier, puisque nous avons supposé p entier. Mais il est facile de se convaincre, en répétant le raisonnement, que la démonstration s'étend sans restrictions au cas où $p > 1$ sans être entier. Par conséquent, la limite de $\dfrac{x}{m^{\frac{3}{2}}}$ est celle de x^m, c'est-à-dire l'infini pour $x > 1$, 0 pour $x < 1$, et 1 pour $x = 1$.

QUESTIONS PROPOSÉES

1. — On considère un cercle M, un diamètre fixe AB, et la tangente CC′ à l'extrémité B de ce diamètre ; par le point A, on mène une transversale qui rencontre le cercle en D, et la bissectrice de l'angle DAB, qui rencontre en H la tangente CC′ ; soit O le centre du cercle inscrit au triangle ADB, et Δ une droite perpendiculaire à AO en ce point O ; cette droite Δ rencontre le cercle décrit de B comme centre avec BH pour rayon en deux points. Démontrer que le lieu géométrique décrit par l'un de ces points est une droite, le diamètre AB ; l'autre point décrit une strophoïde. On démontrera cette double propriété par le calcul et par la géométrie. *(G. de Longchamps.)*

2. — Deux paraboles variables sont assujetties : 1° à avoir leurs axes parallèles et à une distance donnée l'une de l'autre ; 2° à se couper orthogonalement en deux points. Trouver l'aire minima comprise entre les deux courbes.

3. — Mener par un point donné une droite telle que le segment intercepté par une parabole donnée soit maximum ou minimum. Le problème admet trois solutions. Trouver le lieu des points du plan pour lesquels deux des solutions se confondent : ce lieu, du quatrième degré, partage le plan en deux régions ; discuter le problème lorsque le point donné est dans l'une ou l'autre de ces régions.

Le Rédacteur-Gérant,
J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 202-3.

COURBES DIAMÉTRALES ET TRANSVERSALES RÉCIPROQUES

Par M. G. de Longchamps.

1. — Nous avons déjà exposé dans ce journal (*) quelques applications des transversales que nous nommons réciproques, et nous avons fait voir dans l'article que nous rappelons, comment on peut au moyen de ces transversales construire, par un procédé commun, les tangentes aux courbes suivantes : *Cissoïde, Strophoïde, Conchoïde, Lemniscate ;* et généralement à toutes les courbes que nous avons appelées *conchoïdales* (**) et nous avons fait remarquer à ce propos que les quatre courbes citées ne sont en effet que des cas particuliers d'une génération qui les donne toutes par une définition qui dérive de celle qui a été imaginée par nous pour engendrer les conchoïdales.

Pour rendre plus facile la lecture de cette note, nous rappelons que nous nommons *transversales réciproques* deux droites Δ, Δ', définies ainsi : *Soit* ABC *un triangle et* Δ *une transversale rencontrant les côtés* AB, AC, BC, *respectivement aux points* C', B', A' : *si l'on prend le point* C *symétrique de* C' *par rapport au milieu de* AB *et, de même,* B'' *et* A'', *il résulte du théorème de Ménélaüs et de sa réciproque que les trois points* A'', B'', C'' *ainsi construits sont situés sur une même droite* Δ'. Réciproquement, si l'on donne Δ' et si l'on répète avec cette droite la construction que nous venons d'indiquer, on retombe sur la droite Δ et, pour ce motif, nous avons autrefois (***) proposé de nommer ces droites *transversales réciproques*.

2. — Cette définition, qui suffit à l'intelligence des applications nouvelles que nous allons donner, étant rappelée, nous dirons quelle est, à notre avis, la définition la plus géné-

(*) Année 1880, p. 272.

(**) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1879, p. 145.

(***) *Annales de l'Ecole normale supérieure*, t. III, 1867

rale des courbes que l'on peut nommer *courbes diamétrales*, parce qu'elles se rattachent, mais en les contenant comme cas particulier, aux courbes habituellement désignées par cette dénomination.

Imaginons trois courbes f, φ, ψ, situées dans le même plan et une droite Δ qui est mobile dans ce plan, mais en restant constamment tangente à la courbe f; Δ rencontre φ en un point A et ψ en un point B; soit I le milieu de AB. Le lieu décrit par ce point I est ce que nous nommons une COURBE DIAMÉTRALE. *quand la courbe* f *se réduit à un point* O.

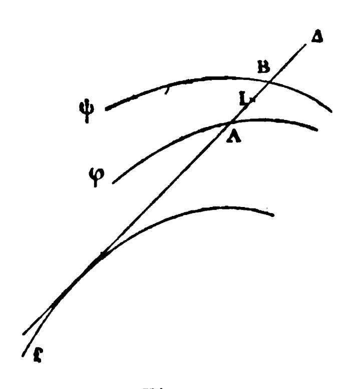


Fig. 1.

Dans le cas particulier où le point O s'éloigne à l'infini, lorsque les droites Δ, en d'autres termes, se meuvent *parallèlement à une direction fixe*, et lorsque les courbes φ et ψ se confondent avec une conique, le lieu du point I est une droite nommée *diamètre*; de là le nom de courbes diamétrales, que nous proposons pour désigner les lieux géométriques engendrés comme nous venons de le dire. Ce mot est employé d'ailleurs, mais dans un sens plus restreint que celui où nous nous sommes placé. Si l'on suppose en effet que le point O s'éloigne à l'infini et que φ et ψ se confondent en une seule courbe, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction fixe dans une courbe donnée F de degré m est, on le sait, une courbe de degré $\frac{m(m-1)}{2}$, dite courbe diamétrale. Nous proposons donc en définitive, et pour éviter la création d'un mot nouveau, de généraliser cette définition et de nommer courbe diamétrale *le lieu des milieux des cordes qui s'appuient sur deux courbes données dans un plan en passant constamment par un point fixe.*

3. — Nous allons montrer qu'on peut toujours, avec la règle

et le compas, construire la tangente en un point donné d'une courbe diamétrale : il est sous-entendu que l'on suppose que les tangentes aux courbes φ et ψ qui ont engendré la diamétrale considérée peuvent être tracées elles-mêmes avec la règle et le compas.

Considérons un triangle ABC, et une transversale Δ; prenons BR′ = AR et CQ′ = AQ.

Dans le triangle AR′Q′ on pourra considérer PQR et BC comme deux transversales réciproques de ce triangle : on en conclut que les points P et P′ sont symétriques par rapport au milieu de R′Q′. C'est cette remarque géométrique que nous allons utiliser.

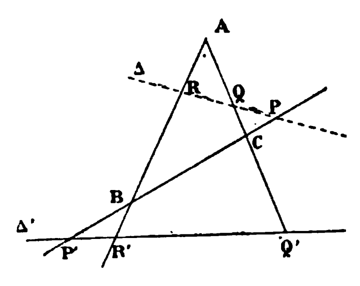


Fig. 2.

4. — Considérons deux courbes *quelconques* φ et ψ et un point fixe O; ayant mené un rayon vecteur OAB, ayant pris le point I milieu de AB, le problème que nous nous sommes posé est celui qui se propose de mener la tangente en I au lieu décrit par ce point quand OAB tourne autour du point O.

Prenons une transversale voisine OA′B′ et déterminons les points C et C′ par la condition BC = OA, B′C′ = OA′; les points H, H′ seront symétriques par rapport au milieu de CC′.

Supposons maintenant que les points AA′ se rapprochent et viennent se confondre, nous obtiendrons à la limite la figure suivante.

La droite AA′ devient la tangente en A à φ, BB′ la tangente en B à ψ ; c'est-à-dire les droites AT et BT de la figure 4. Le point C reste fixe et est défini par la condition BC = OA. La droite HH′, et par suite la droite II′ qui lui est parallèle, prend une direction telle que, passant par le point C, elle soit partagée en deux parties égales, par ce point et les droites AT et BT. Si, par conséquent, on construit, comme l'indique la figure 4, le parallélogramme CPTQ, la limite de II′, la tangente au point I, par conséquent à la diamétrale, est une droite Δ, menée par ce point et parallèle à PQ.

5. — Le cas où les cordes considérées restent parallèles à une direction fixe doit être examiné particulièrement, car alors le point C′ est éloigné à l'infini et il faut montrer comment la construction précédente doit être modifiée.

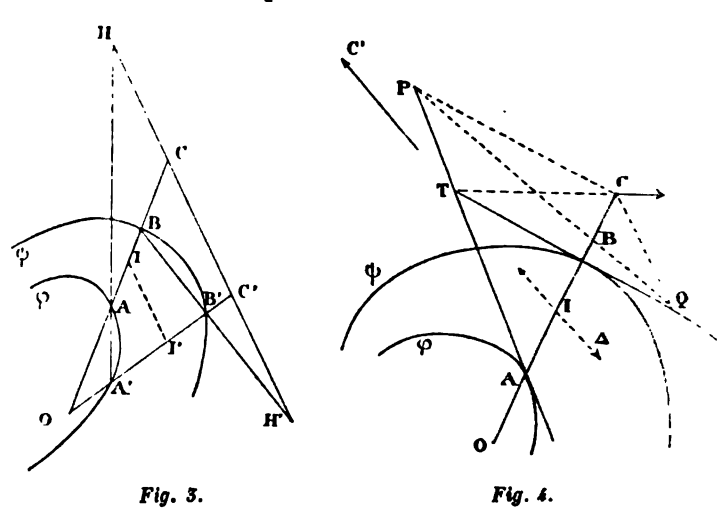


Fig. 3. *Fig. 4.*

Supposons donc que le point O (*fig. 4*) s'éloigne de plus en plus et considérons la droite TC qui passe par le milieu de PQ. Menons TC′ parallèle à PQ, les quatre droites TC, TC′, TP, TQ forment un faisceau harmonique. A la limite le point O étant porté à l'infini et, par suite, le point C lui-même s'étant éloigné à l'infini, la droite TC a pour position limitée une parallèle aux cordes considérées menée par le point T, et la droite TC′ la droite conjuguée harmonique de cette direction, par rapport aux droites TP et TQ. On connaîtra donc encore la direction de la droite II′.

6. — *Remarque.* — En appliquant la construction précédente il faut bien observer que les droites BC et OA *sont égales et dirigées dans le même sens.* Ainsi si le point O est situé entre les points A et B, il faut prendre le point C dans *la direction* BO et non plus dans la direction OB.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

On considère deux coniques homothétiques, tangentes à Ox, *à l'origine, et des coniques doublement tangentes à chacune d'elles. Par un point fixe* P *de* Ox, *on leur mène des tangentes. Lieu des points de contact.* (Concours académique de Poitiers.)

L'équation générale des coniques bitangentes à deux coniques données $S = 0$, $S' = 0$, est

$$Q^2 - 2\mu(S + \lambda S') + \mu^2 P^2 = 0 \quad (\alpha)$$

dans laquelle μ est un paramètre variable, λ une des racines de l'équation en λ, et P, Q deux facteurs linéaires dont le produit est $S - \lambda S'$.

Cela posé, les deux coniques données ont pour équations

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + Ay^2 + 2Cy = 0 \\ x^2 + Ay^2 + 2C'y = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

L'équation en λ est

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & A - A\lambda & C - \lambda C' \\ 0 & C - \lambda C' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1 - \lambda)(C - \lambda C')^2 = 0$$

Cette équation a donc une racine simple $\lambda = 1$ et une double $\lambda = \dfrac{C}{C'}$.

A chacune de ces racines correspond un faisceau de coniques bitangentes; nous allons donc les considérer successivement.

Premier faisceau de coniques doublement tangentes.

La valeur $\lambda = 1$ donne $PQ = 2(C - C')y$, nous poserons $P = 2(C - C')$, $Q = y$, et l'équation générale (α) devient

$$y^2 - 4\mu(x^2 + Ay^2 + \overline{C + C'}\,y) + 4\mu^2(C + C')^2 = 0. \quad (2)$$

On peut d'ailleurs vérifier cette équation, en cherchant son intersection avec $x^2 + Ay^2 + 2Cy = o$; on trouve la combinaison $[y + 2\mu (C - C')]^2 = o$. De même avec $x^2 + Ay^2 + 2C'y = o$ on a la combinaison $[y - 2\mu(C - C')]^2 = o$. Ce qui donne, en passant, ce théorème : ***Les deux cordes de contact d'une conique bitangente, sont symétriquement placées par rapport à* Ox.**

Si l'on désigne par d la distance OP, la polaire du point P aura pour équation

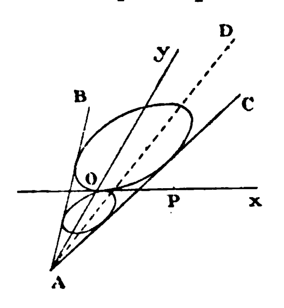
$$4\mu dx + 2\mu (C + C')y - 4\mu^2 (C - C')^2 = o$$

ou, en divisant par μ,

$$2dx + (C + C') y = 2\mu (C - C')^2. \qquad (3)$$

[Au facteur μ que l'on supprime, correspond pour le lieu $y = o$, résultat qu'on pouvait prévoir.]

Remarquons que cette polaire reste toujours parallèle à une direction fixe quand la conique μ varie. Cette direction peut même être construite géométriquement. En effet, parmi les coniques du faisceau, se trouve le système des tangentes communes AB, AC, et la polaire correspondante AD se construit avec facilité. Cette remarque nous sera utile.



Revenant au problème proposé, le lieu s'obtiendra évidemment, en éliminant μ entre les équations (2) et (3), ce qui donne

$$y^2(C - C')^2 = 2(x^2 + Ay^2 + \overline{C + C'}y)(2dx + \overline{C + C'}y) - (2dx + \overline{C + C'}y)^2$$

ou bien

$$(x^2 + Ay^2)(2dx + \overline{C + C'}y) = 2(d^2x^2 - CC'y^2). \qquad (4)$$

Le lieu est donc une cubique ayant pour point double l'origine. Nous allons discuter ses principales formes.

Premier cas. — Les deux coniques sont des ellipses, c'est-à-dire $A > O$. Il n'y a qu'une asymptote réelle, parallèle à $2dx + (C + C')\,y = o$.

Si $C < o$ et $C' > o$ (*fig. 1*), l'origine est un point double

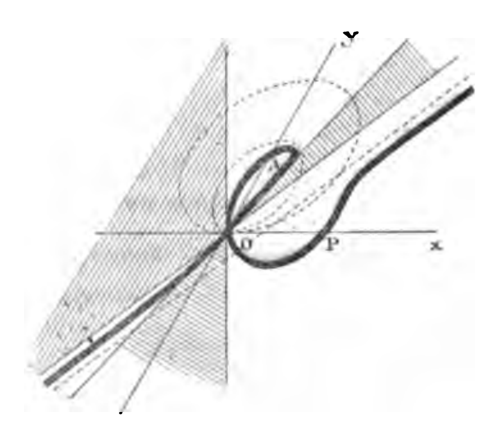
isolé. Il n'y a pas de courbe à gauche de la droite $2dx + \overline{C + C'}y = o$.

La courbe passe au point P, aux points de contact des tangentes menées de P aux deux coniques données; enfin au point A défini dans la remarque faite plus haut.

En résumé, elle a la forme de la figure 1.

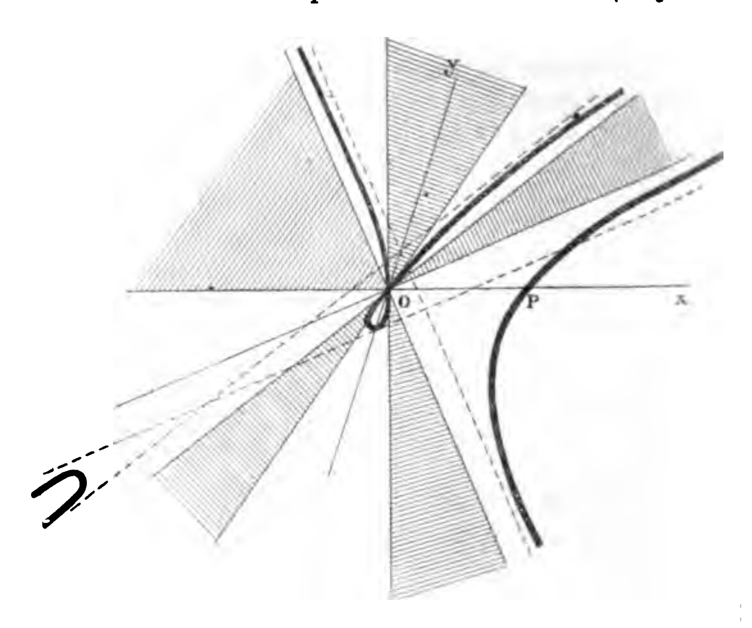
Si l'on a à la fois $C < o$ $C' < o$, c'est-à-dire si les deux ellipses sont d'un même côté de Ox, l'origine devient un point double réel dont les tangentes $\frac{y}{x} = \frac{d}{\pm\sqrt{CC'}}$ servent à séparer le plan en régions. Le lieu a la forme 2.

Deuxième Cas. — Les deux coniques sont des hyperboles : $A < o$.



Nous aurons encore un point double réel ou isolé, suivant ue $CC' > o$ ou $< o$. Le plan sera séparé en régions par les roites $x^2 + Ay^2 = o$ (directions asymptotiques des hyperoles), $2dx - (C + C')y = o$, et, suivant les cas, par d^2x^2

$= CC'y^2$. Dans ce cas, enfin, les trois asymptotes sont réelles, les deux nouvelles sont parallèles aux droites $x^2 + Ay^2 = 0$.



Troisième Cas. — Enfin supposons qu'on ait donné deux paraboles, c'est-à-dire $A = 0$. Alors l'équation (4) devient

$$x^2[2dx + \overline{C + C'}y] = 2(d^2x^2 - CC'y^2).$$

Elle présente des formes analogues aux précédentes.

Deuxième faisceau de coniques.

Occupons-nous maintenant de la deuxième racine de l'équation en λ : $\lambda = \frac{C}{C'}$. Elle donne

$$PQ = (C' - C)(x^2 + Ay^2)$$
$$= (C' - C)(x + y\sqrt{-A})(x - y\sqrt{-A})$$

et l'équation (α) devient

$$\mu^2[x + y\sqrt{-A}]^2 - 2\mu[(C + C')(x^2 + Ay^2) + 4CC'y]$$
$$+ (C' - C)^2(x - y\sqrt{-A})^2 = 0 \qquad (5)$$

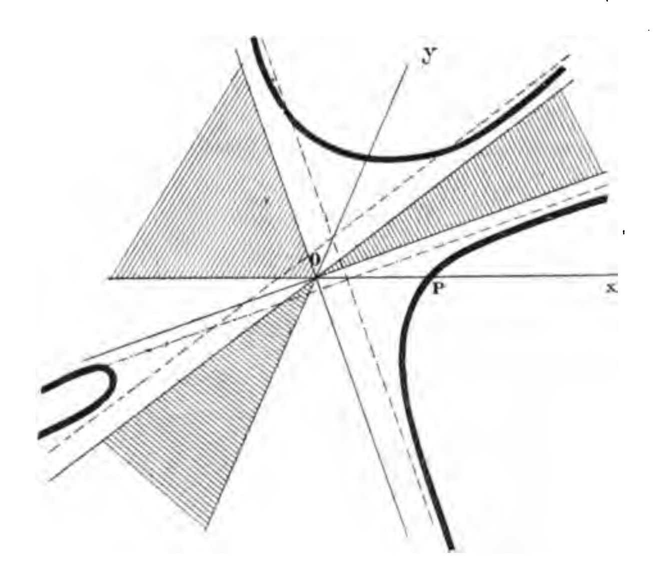
ou, en l'ordonnant par rapport à x et y,

$$x^2[\overline{C'-C}^2\ 2-\mu\ \overline{C+C'} + \mu^2]$$
$$- Ay^2[\overline{C'-C} + 2\mu\,\overline{C+C'} + \mu^2] - 2xy\sqrt{-A}\,[\overline{C'-C}^2$$
$$- \mu^2] - 8\mu CC'\,y = 0$$

La polaire du point P a alors pour équation:

$$dx\,[\overline{C'-C}^2 - 2\mu\,\overline{C+C'} + \mu^2] - y\,[d\sqrt{-A}\,(\overline{C'-C}^2$$
$$- \mu^2) + 4\mu\,CC'] = 0$$

ou $$d\mu^2\,(x + y\sqrt{-A}) - 2\mu\,[(C + C')dx + 2CC'y]$$
$$+ d\,(C' - C)^2\,(x - y\sqrt{-A}) = 0.$$



Éliminant μ entre (5) et (6), on obtient:

$$[d(C'-C)^2\,(x^2 = Ay^2)\,y\,\sqrt{-A}]^2$$
$$= \{\,d(x + y\sqrt{-A})\,[(C + C')\,(x^2 + Ay^2) + 4\,CC'y]$$
$$- (x + y\sqrt{-A})^2\,[\overline{C+C'}\,dx + 2\,CC'y]\,\}$$
$$\{\,(C'-C)^2\,(x - y\sqrt{-A})^2\,[(C + C')\,dx + 2CC'y]$$
$$- d\,(C'-C)^2\,(x - y\sqrt{-A})\,[(C + C')(x^2 + Ay^2) + 4\,CC'y]\,\}$$

ou, en supprimant le facteur $(C' - C)^2\,(x^2 + Ay^2)$,

$$- Ad^2y^2(C'-C)^2(x^2+Ay^2)$$
$$= \{ d(C+C')(x^2+Ay^2)+4dCC'y$$
$$- (x+y\sqrt{-A})[\overline{C+C'}\,dx+2CC'y] \}$$
$$\{ (x-y\sqrt{-A})[\overline{C+C'}\,dx+2CC'y]$$
$$- d(C+C')(x^2+Ay^2) - 4dCC'y \}$$

On peut encore supprimer le facteur y^2 :

$$Ad^2(C'-C)^2(x^2+Ay^2) = A\,[dx\,\overline{C+C'}+2CC'y]^2$$
$$+ [Ady(C+C') - 2CC'x + 4\,dCC']^2$$

ou, enfin, toutes simplifications faites,

$$(x^2+Ay^2)(Ad^2+CC') + 2Ad^2(C+C')\,y$$
$$- 4\,dCC'(x-d) = 0\,;$$

la seconde partie du lieu cherché se compose d'une conique homothétique aux proposées.

QUESTION 354

1. — Posons

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

et considérons le carré

A

$$\begin{array}{|cccccc|}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots\ldots & \frac{1}{n} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots\ldots & \frac{1}{n} & 1 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots\ldots & \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots\ldots & \frac{1}{n-1}
\end{array}$$

B

où les termes de la série harmonique sont écrits d'après une loi que la figure rend évidente.

La somme des nombres renfermés dans ce tableau, nombres comptés par colonnes horizontales ou colonnes verticales, est évidemment

$$nS_n;$$

si, d'autre part, on les compte par tranches parallèles à la diagonale AB, on trouve que chacune de ces tranches, jusques et y compris la diagonale AB, donne un résultat égal à 1, ce qui fait une somme égale à n, à laquelle il faut ajouter les tranches qui suivent AB, lesquelles sont respectivement

$$\frac{n-1}{1},\ \frac{n-2}{2},\ \frac{n-3}{3},\ \ldots\ \frac{2}{n-2},\ \frac{1}{n-1}.$$

On a donc l'identité, facile à vérifier directement,

$$nS_n = n + \left[\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \ldots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right]. \qquad (1)$$

2. — Posons $n = 2p$.

Le crochet renfermera $2p-1$ fractions; l'une d'elles, celle du milieu, est égale à $\frac{p}{p} = 1$ et l'on peut écrire, en groupant les fractions à égale distance des extrêmes,

$$2p\,.\,S_{2p} = 2p + 1 + \left\{\begin{array}{l} \frac{2p-1}{1} + \frac{1}{2p-1} \\ + \frac{2p-2}{2} + \frac{2}{2p-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{p+1}{p-1} + \frac{p-1}{p+1}. \end{array}\right.$$

Or, on a identiquement, quel que soit x,

$$\frac{2p-x}{x} + \frac{x}{2p-x} = \frac{(2p-x)^2 + x^2}{x(2p-x)} = \frac{4p^2}{x(2p-x)} - 2,$$

d'où
$$2pS_{2p} = 2p + 1 + 4p^2\left[\frac{1}{1\,.\,(2p-1)} + \frac{1}{2(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)(p+1)}\right] - 2(p-1),$$

ou
$$S_{2p} = \frac{3}{2p} + 2p\left[\frac{1}{1.(2p-1)} + \frac{1}{2(2p-2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(p-1)(p+1)}\right]. \quad (2)$$

3. — Reprenons l'identité (1) et supposons maintenant
$$n = 2p + 1.$$
Il viendra
$$(2p+1)S_{2p+1} = (2p+1) + \left\{\begin{array}{l} \frac{2p}{1} + \frac{1}{2p} \\ + \frac{2p-1}{2} + \frac{2}{2p-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{p+1}{p} + \frac{p}{p+1}; \end{array}\right.$$
et, en vertu de l'identité,
$$\frac{2p-(x-1)}{x} + \frac{x}{2p-(x-1)} = \frac{(2p+1)^2}{x(2p-x+1)} - 2.$$
on trouve
$$S_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} + (2p+1)\left[\frac{1}{1\,.\,2p} + \frac{1}{2(2p-1)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right]. \quad (3)$$

Il est remarquable que, dans cette formule, le terme $\frac{1}{2p+1}$ disparaît et l'on trouve, après cette simplification. une nouvelle forme de S_{2p}, savoir :
$$= (2p+1)\left[\frac{1}{1\,.\,2p} + \frac{1}{2.(2p-1)} + \frac{1}{3(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right], \quad (4)$$
formule plus simple que la formule (2) et qui permet de calculer les $2p$ premiers termes de la série harmonique par une série de p termes seulement.

4. — Cette formule peut d'ailleurs se tirer directement de la série harmonique.

Prenons, en effet, deux termes de cette série :
$$\frac{1}{\alpha};\ \frac{1}{2p-(\alpha-1)},$$

également éloignés des extrêmes, 1 et $\frac{1}{2p}$.

On a, identiquement,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2p - (\alpha - 1)} = \frac{2p + 1}{\alpha(2p - \alpha + 1)}.$$

Faisons dans cette identité successivement

$$\alpha = 1, \quad \alpha = 2, \ldots \alpha = p,$$

et en ajoutant on retrouve la formule (4).

5. — On peut donner à l'identité (4) une forme assez remarquable.

On a, en effet.

$$\frac{1}{1 \cdot 2p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\frac{1}{2(2p - 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p - 1}\right),$$

$$\frac{1}{3(2p - 2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3p - 3}\right),$$

$$\frac{1}{4(2p - 3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4p - 6}\right),$$

. . . .

Les nombres 1, 3, 6, ... qui apparaissent dans ce tableau, sont les nombres de la seconde colonne du triangle arithmétique de Pascal, c'est-à-dire

$$C_2^2, \ C_3^2, \ C_4^2, \ \ldots$$

Je dis que la loi soupçonnée ici est générale.

En effet, si l'on a

$$\frac{1}{2\alpha(2p - 2\alpha + 1)},$$

on pourra écrire

$$\frac{1}{2\alpha(2p - 2\alpha + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p\alpha - 2\alpha^2 + \alpha}\right).$$

et comme

$$C_{2\alpha}^2 = \frac{2\alpha(2\alpha - 1)}{2} = 2\alpha^2 - \alpha,$$

on a bien

$$\frac{1}{2\alpha(2p - 2\alpha + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p\alpha - C_{2\alpha}^2}\right).$$

Dans l'autre cas

$$\frac{1}{(2\alpha+1)(2p-2\alpha)},$$

on écrira

$$\frac{1}{(2\alpha+1)(2p-2\alpha)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2\alpha+1)p-2\alpha^2-\alpha}\right),$$

et comme

$$C^2_{2\alpha+1}=\frac{(2\alpha+1)\,2\alpha}{2}=2\alpha^2+\alpha,$$

on a encore

$$\frac{1}{(2\alpha+1)(2p-2\alpha)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+1)\,p-C^2_{2\alpha+1}}\right);$$

la loi est toujours vraie et l'on arrive à l'identité

$$S_{2p}=\left(p+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{2p-C^2_2}+\frac{1}{3p-C^2_3}+\ldots+\frac{1}{p^2-C^2_p}\right], \qquad (3)$$

qui constitue une forme commode pour le calcul des $2p$ premiers termes de la série harmonique.

(A suivre.)

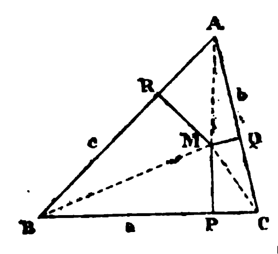
ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES
ET LEURS APPLICATIONS

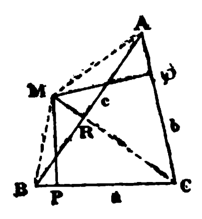
Par M. E. J. Boquel.

Nous nous proposons, dans ce travail, d'établir les principales formules relatives à l'emploi d'un système particulier de coordonnées, dont les applications sont très nombreuses, et de montrer, par un certain nombre d'exemples, le parti que l'on en peut tirer dans l'étude de la géométrie. L'importance de ce système de coordonnées tient surtout à ce qu'il est l'expression analytique d'une des méthodes des plus fécondes de la géométrie moderne, la transformation homographique, dont M. Chasles a tiré de si beaux résultats, et nous nous effor-

cerons, dans le cours de cette étude, de mettre en lumière cette signification géométrique.

Définition des coordonnées trilinéaires. — Considérons dans un plan un triangle fixe ABC; un point quelconque M du





plan sera défini, dans le système de coordonnées que nous allons étudier, par trois quantités $\alpha, 6, \gamma$, qui sont les distances du point M aux trois côtés du triangle ABC, multipliées par des nombres positifs constants arbitrairement choisis, λ, μ, ν, que l'on prend souvent égaux à l'unité.

Les quantités α, 6, γ sont affectées d'un signe que l'on fixe par la considération suivante : chacune d'elles est regardée comme positive ou négative, suivant que le point M est situé par rapport au côté dont cette quantité dépend dans la même région du plan que le sommet du triangle qui est opposé à ce côté, ou dans la région différente.

Si donc on écrit

$$\alpha = \lambda.\text{MP}, \quad 6 = \mu.\text{MQ}, \quad \gamma = \nu.\text{MR},$$

les signes des quantités α, 6, γ ne sont pas mis en évidence, et chacune d'elles emporte avec elle son signe particulier.

Dans la première figure, il est clair que les trois quantités α, 6, γ sont positives; dans la seconde, les quantités α et 6 sont seules positives, la quantité γ est au contraire négative, puisque le point M et le sommet C opposé au côté AB dont dépend γ sont dans des régions du plan différentes par rapport à AB.

Les quantités α, 6, γ, ainsi définies en grandeur et en signe, se nomment les *coordonnées trilinéaires* du point M; le triangle fixe ABC, auquel elles sont rapportées, est dit le *triangle de référence*; ses côtés s'appellent les *axes de référence*

et les nombres constants λ, μ, ν portent le nom de *paramètres de référence.*

Relation entre les coordonnées trilinéaires d'un même point. — Les trois coordonnées α, β, γ d'un point M ne peuvent évidemment pas être toutes les trois arbitrairement choisies: car le triangle et les paramètres de référence étant fixés, et deux seulement des trois quantités α, β, γ étant données en grandeur et en signe, le point M est parfaitement déterminé sans la moindre ambiguïté, par l'intersection de deux droites menées parallèlement aux deux axes de référence auxquels se rapportent les deux coordonnées connues. Dès lors la troisième coordonnée étant par cela même déterminée, il doit y avoir une relation analytique entre les trois coordonnées d'un même point.

En vertu de la convention faite sur les signes des coordonnées trilinéaires, cette relation s'obtient en exprimant que l'aire du triangle de référence est égale à la somme algébrique des aires des triangles BMC, AMC, BMA.

Soient a, b, c les longueurs des trois côtés BC, CA et AB du triangle de référence; on a, dans le cas de la première figure, où les trois coordonnées trilinéaires du point M sont positives,

$$\text{BMC} + \text{AMC} + \text{BMA} = \text{ABC}$$

c'est-à-dire $$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2\text{S}.$$

Dans le cas de la deuxième figure, où la coordonnée γ est négative, on a

$$\text{BMC} + \text{AMC} - \text{BMA} = \text{ABC};$$

la *longueur* MR étant alors égale, non pas à $\frac{\gamma}{\nu}$, mais bien à $-\frac{\gamma}{\nu}$, il vient

$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} - c\left(-\frac{\gamma}{\nu}\right) = 2\text{S}$$

c'est-à-dire encore $$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2\text{S}.$$

Cette relation entre les trois coordonnées trilinéaires d'un

même point est donc générale, quelle que soit la position du point M dans le plan.

Dans le cas particulier où l'on suppose les paramètres de référence égaux à l'unité, $\lambda = \mu = \nu = 1$, c'est-à-dire où l'on prend pour coordonnées trilinéaires les distances elles-mêmes du point M aux trois côtés du triangle, affectées des signes fixés par la convention que nous avons fait connaître, la relation entre les trois coordonnées d'un point devient

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

Si enfin l'on observe que l'on a entre les éléments du triangle de référence la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, la condition entre α, β, γ prend la forme

$$\frac{\alpha \sin A}{\lambda} + \frac{\beta \sin B}{\mu} + \frac{\gamma \sin C}{\nu} = \frac{S}{R}$$

et dans l'hypothèse $\lambda = \mu = \nu = 1$, la forme

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{S}{R}.$$

Passage des coordonnées trilinéaires aux coordonnées cartésiennes, et transformation inverse des coordonnées cartésiennes en coordonnées trilinéaires. — Connaissant l'équation d'une ligne quelconque en coordonnées cartésiennes, on veut avoir l'équation de la même ligne en coordonnées trilinéaires par rapport à un triangle de référence donné, ou bien on peut avoir intérêt à faire l'opération inverse ; il faut donc se procurer des formules pour cette transformation.

Supposons que les coordonnées cartésiennes soient rectangulaires, et donnons-nous le triangle de référence du système trilinéaire par les 3 équations de ses côtés par rapport aux axes des cordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned} &(BC) \quad Ax + By + C = 0 \\ &(CA) \quad A'x + B'y + C' = 0 \\ &(AB) \quad A''x + B''y + C'' = 0 \end{aligned}$$

nous savons que l'on a

$$MP = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\ MQ = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$MR = \frac{A'' + B'' + C''}{\pm\sqrt{A''^2 + B''^2}}$$

et, par conséquent, λ, μ, ν étant les paramètres de référence, on aura

$$\alpha = \lambda\, MP = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax + By + C)$$

$$\beta = \mu .\, MQ = \frac{\mu}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}} (A'x + B'y + C')$$

$$\gamma = \nu .\, MR = \frac{\nu}{\pm\sqrt{A''^2 + B''^2}} . (A''x + B''y + C'').$$

Pour que ces formules puissent servir à la transformation, il faut que les coordonnées α, β, γ soient affectées des signes convenables, c'est-à-dire conformes à la convention faite.

Or, il suffit évidemment, pour cela, que les coordonnées trilinéaires α, β, γ soient positives quand le point M est à l'intérieur du triangle de référence. On pourrait, pour arriver à ce résultat, disposer des signes des radicaux ; mais, dans un grand nombre de cas, il y a intérêt à regarder ces radicaux comme positifs ; alors on écrit convenablement les équations des côtés du triangle de référence. Par exemple, si pour un point (xy) situé à l'intérieur du triangle, la fonction linéaire $Ax + By + C$ est négative, la fonction $-(Ax + By + C)$ sera positive, et comme on peut écrire l'équation du côté BC à volonté sous l'une ou l'autre des deux formes $Ax + By + C = o$, ou $-Ax - By - C = o$, on pourra toujours choisir celle de ces deux formes pour laquelle le résultat de la substitution des coordonnées x et y d'un point intérieur au triangle de référence sera positif. Supposons qu'on ait tout d'abord pris cette précaution, et que $Ax + By + C = o$ soit la forme de l'équation du côté BC qui satisfait à la condition ci-dessus ; α est une quantité positive quand le point M est à l'intérieur du triangle de référence, c'est-à-dire dans la même région que le sommet A opposé à l'axe de référence BC, et la fonction $Ax + By + C$

conservant le même signe pour tous les points de cette région du plan, tandis qu'elle prend le signe contraire pour les points de l'autre région, la coordonnée α aura le signe convenable dans la formule

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax + By + B).$$

Il en sera évidemment de même de β et de γ, les équations des deux autres côtés du triangle de référence étant écrites convenablement. Sous cette réserve, les formules établies plus haut seront les formules de transformation.

Si les axes des coordonnées rectilignes, au lieu d'être rectangulaires, faisaient entre eux l'angle θ, les formules de transformation seraient de même

$$\alpha = \frac{\lambda \sin \theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}} (Ax + By + C)$$

$$\beta = \frac{\mu \sin \theta}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B' \cos \theta}} (A'x + B'y + C')$$

$$\gamma = \frac{\nu \sin \theta}{\sqrt{A''^2 + B''^2 - 2A''B'' \cos \theta}} (A''x + B''y + C'')$$

$Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, $A''x + B''y + C'' = 0$ étant, bien entendu, les formes des équations des axes de référence, telles que les premiers membres de ces équations prennent des valeurs positives pour les coordonnées x et y d'un point situé à l'intérieur du triangle de référence.

Lorsque le point M (x, y) change de position dans le plan, les coefficients des fonctions linéaires, qui ne dépendent que de la situation des côtés du triangle de référence, lequel est fixe, ne varient pas, et l'on voit que les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du plan sont égales aux produits d'un facteur qui reste constant, quel que soit le point, par les valeurs que prennent les premiers membres des équations des côtés du triangle de référence quand on y remplace x et y par les coordonnées particulières du point considéré.

(A suivre.)

QUESTION 264

Solution par M. H. Dupuy, élève au Lycée de Grenoble.

Démontrer que lorsque n *est un entier supérieur a* 5, *on la double inégalité*

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a $e^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1.2} + \ldots + \frac{n^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$

et il est évident que

$$e^n > \frac{n^n}{1.2.3\ldots n},$$

d'où

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right),$$

ce qui démontre la deuxième inégalité.

— Pour démontrer la première, je dis que, si pour une certaine valeur de n on a

$$1.2.3\ldots n < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \qquad (1)$$

on aura aussi, quand n augmente d'une unité,

$$1.2.3.\ldots n(n+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

En effet, si on a (1), on a aussi

$$1.2.3\ldots n.(n+1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1),$$

inégalité, qui subsistera si on multiplie le deuxième membre par la quantité $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}$, qui est toujours comprise entre 1 et $\frac{e}{2}$, et par suite plus grande que l'unité quand e varie depuis 1 jusqu'à ∞.

On aura ainsi *à fortiori*

$$1.2.3 \ldots n(n+1) < \left[\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1)\right]^{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}}$$

c'est-à-dire

$$1.2.3 \ldots n(n+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Or, l'inégalité (1) est vraie, si $n = 6$, donc elle est aussi vraie pour tous les nombres entiers supérieurs à 5.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Audrieu, à Rouen; Baron, à Sainte-Barbe.

QUESTION 342

Solution par M. PAUL BOULOGNE, élève au Lycée Saint-Louis.

Par un des points d'intersection A *de deux hyperboles équilatères de même centre* O, *on mène une sécante qui rencontre les deux courbes aux points* B *et* B'. *De ces points on abaisse des perpendiculaires* BC, B'C' *sur les tangentes aux deux courbes au même point* A. *Démontrer que si l'on joint le centre aux pieds* C *et* C' *de ces deux perpendiculaires, l'angle* COC' *est quadruple de l'angle des asymptotes.*

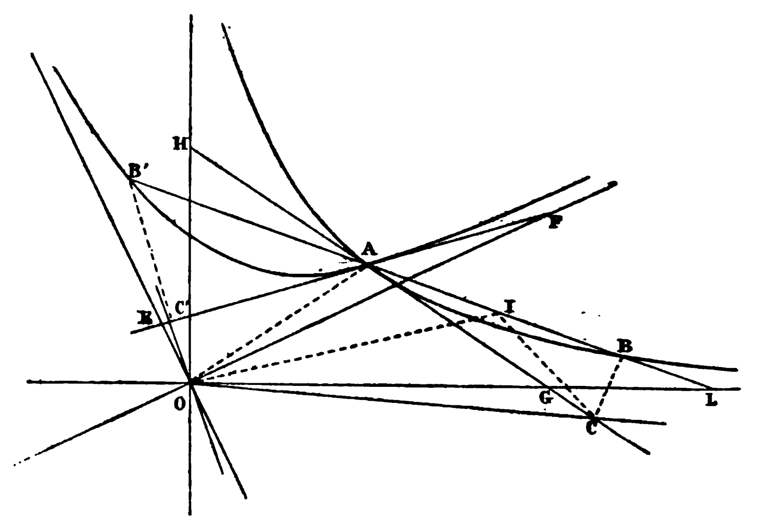
(E. Fauquembergue.)

Lemme I. — L'angle des tangentes est double de l'angle des asymptotes.

Soient E et F, H et G les points où les tangentes rencontrent les asymptotes. D'après une propriété bien connue. AE = AF, et AG = AH. Or ces quatre longueurs sont aussi égales à OA, médiane commune des triangles rectangles HOG, EOF; donc les cinq points O, E, H, F, G sont sur une circonférence de centre A, et l'angle au centre FAG est double de l'angle inscrit FOG.

Lemme II. — L'angle COA est double de l'angle CAB. Soient I le milieu de AB, L le point où cette droite rencontre l'asymptote OG. D'abord CI est égal à AI, puisque c'est la médiane du triangle rectangle ABC. D'autre part, OA, OI

sont les diamètres conjugués des directions AG et AL, donc les angles AOG, IOL sont respectivement égaux à AGO, ILO, par suite leur différence AOI est égale à GAL.



différence des deux autres. Mais alors les quatre points A, I, C, O sont sur une même circonférence, et l'angle COA est double de l'angle CAB.

De même l'angle C'OA est double de l'angle B'A'C', ou de l'angle FAB. Alors C'OC est double de l'angle FAC; donc d'après le premier lemme il est quadruple de l'angle FOG. c. q. f. d.

QUESTION 394

Solution par M. Paul Boulogne, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Edouard Lucas).

On considère une ellipse rapportée à ses axes et deux points A *et* B *sur cette courbe. La tangente en* A *rencontre l'axe* ox *en un point* α*; et la normale en* A *rencontre le même axe* ox *en un point* α'*; soient de même* β *et* β' *les points analogues relatifs*

au point B *et à l'axe* oy. *Démontrer : 1° que la droite* $\alpha'\beta'$ *passe par le point de rencontre de la parallèle à* oy *menée par le point* A, *et de la parallèle à* ox *menée par le point* B ; *2° que la droite* $\alpha'\beta'$ *est perpendiculaire sur la droite* $\alpha\beta$.

(G. L.)

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de l'ellipse. Celle de la tangente en un point sera

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-1=0.$$

Celle de la normale au même point,

$$a^2yX-b^2xY=c^2xy.$$

Soient maintenant $(x_1\,y_1)$ $(x_2\,y_2)$ les coordonnées des points A et B. Faisant dans les équations précédentes $x=x_1$ $y=y_1$, puis $Y=0$, on obtient les coordonnées des deux points α et α'

$$\alpha\ \left|\begin{array}{l} X=\frac{a^2}{x_1} \\ Y=0 \end{array}\right. \qquad \alpha\ \left|\begin{array}{l} X=\frac{c^2}{a^2}x_1 \\ Y=0. \end{array}\right.$$

Nous aurons de même en y faisant $x=x_2$, $y=y_2$ o cherchant les points de rencontre avec oy,

$$\beta\ \left|\begin{array}{l} X=0. \\ Y=\frac{b^2}{y_2} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} X=0. \\ Y=\frac{c^2}{b^2}y_2. \end{array}\right.$$

Dès lors la droite $\alpha'\beta'$ a pour équation

$$\frac{a^2X-c^2x_1}{x_1}=\frac{b^2Y}{y_4}.$$

L'équation de cette droite est vérifiée pour $X=x_1$, $Y=y_2$ puisque alors les deux membres se réduisent à b^2, ce qui démontre la première partie.

Les coefficients angulaires de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$ sont $-\frac{a^2\,y_2}{b^2\,x_1}$ et $\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_2}$, ce qui démontre la seconde partie.

Nota. — La même question a été résolue par M. Maloigne, au lycée Saint-Louis.

QUESTIONS PROPOSÉES

4. — Une corde PQ d'une ellipse est normale en P : trouver le minimum de cette corde, et démontrer que si PQ est minimum, le centre du cercle osculateur en P est le point Q. O étant le pôle de la corde PQ, montrer que si OP est minimum, le pôle sera situé sur la seconde tangente commune à l'ellipse et au cercle osculateur en P.

5. — Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} \dots - x - 1 = 0,$$

et montrer que cette équation, en dehors de la racine évidente $x = 1$, n'a aucune racine réelle si n est impair, et une seule racine négative si n est pair.

(G. de Longchamps.)

6. — Si, dans une équation, A, B, C, D désignent quatre coefficients positifs, ou tels tout au moins que AC soit positif, si l'on a BC = AD, l'équation proposée a des racines imaginaires.

(G. de Longchamps.)

7. — Trouver, sans appliquer la règle de L'Hôpital, la vraie valeur de l'expression

$$y = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \dots - 2x - 1}{x - 1}$$

pour $x = 1$. *(G. de Longchamps.)*

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 3520-2.

CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

POINT PAR POINT

AU MOYEN D'UNE ÉQUERRE; TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

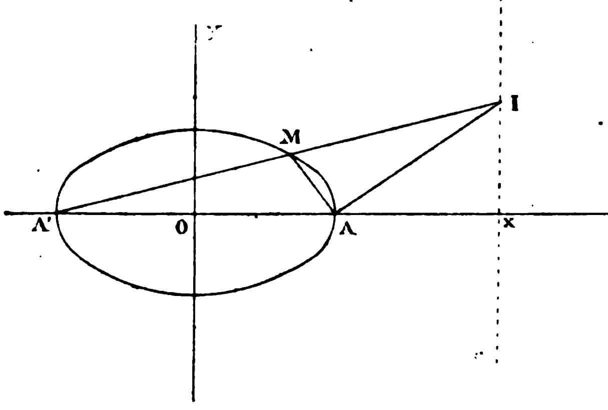
Par M. G. de Longchamps.

1. — Considérons une ellipse rapportée à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit M un point de cette courbe; $x'y'$ ses coordonnées. La droite MA′ qui passe par le sommet A′ a pour équation

$$y\,(x' + a) = y'\,(x + a). \qquad (1)$$



Considérons aussi la droite AI perpendiculaire à la droite MA, son équation sera

$$(x - a)(a - x') = yy'. \qquad (2)$$

Si nous voulons déterminer le lieu décrit par le point I, point de rencontre des droites AI et MA′, il suffit d'éliminer x' et y' entre (1) et (2), en tenant compte de la condition

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (3)$$

A cet effet, multiplions membre à membre les équations (1) et (2), il vient $y\,[c^2\,x - a\,(a^2 + b^2)] = 0.$

Ainsi le lieu se compose des deux droites,

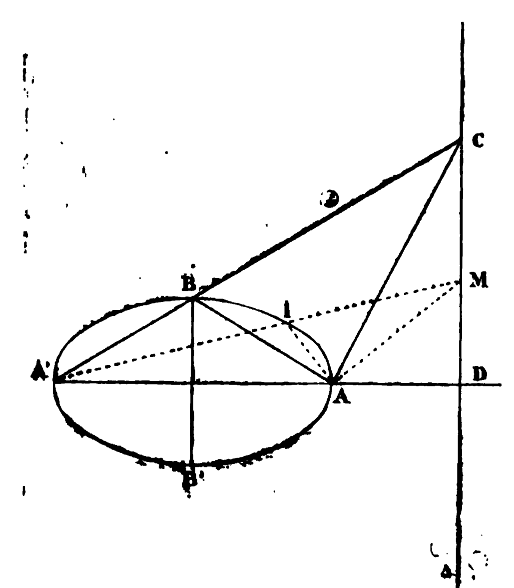
$$y = o,$$
$$x = a\,\frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

La première équation $y = o$ est ce qu'on peut nommer la *solution singulière*; et la présence du facteur y s'explique ici, comme dans beaucoup de cas analogues, en remarquant que si l'on fait la construction proposée dans le cas particulier où le point M est précisément situé en A, on est conduit, d'après l'énoncé même, à chercher le lieu des points communs à deux droites, lesquelles se confondent l'une et l'autre avec l'axe des x.

Tous les points de la droite $y = o$ font donc partie du lieu géométrique que nous avons cherché et l'analyse met, avec raison, en évidence la solution singulière $y = o$.

Quoi qu'il en soit, le lieu véritable, le lieu géométrique demandé, est celui qui correspond à l'équation

$$x = a\,\frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

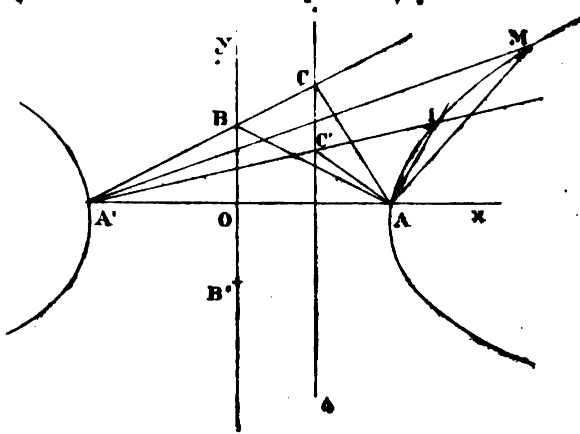


C'est de cette remarque que l'on peut déduire, comme nous allons l'indiquer, la construction, point par point, de l'ellipse au moyen d'une équerre.

2. — Considérons le losange AA'BB'. Menons la droite A'B, et au point A élevons une perpendiculaire à la droite AB; les deux droites se coupent en un point C, et l'on peut, avec l'équerre, abaisser de ce point une perpendiculaire sur AA'. Soit CD la droite ainsi obtenue.

Menons maintenant par A′ une transversale qui coupe CD au point M. Si l'on joint AM et si, toujours avec l'équerre, on élève au point A une perpendiculaire à AM, cette dernière droite coupe AM en un point I qui est un point de l'ellipse dont les sommets sont les points AA′ BB′, sommets du losange considéré.

3. — La construction précédente, dans le cas de l'ellipse, s'applique indifféremment en prenant, pour l'exécuter, les



sommets du grand axe et un des sommets du petit axe, ou, inversement, les deux extrémités du petit axe avec un sommet du grand axe. Elle s'applique aussi à l'hyperbole, mais avec une modification qu'il est nécessaire de signaler.

Si l'on reprend le calcul que nous avons indiqué au début de cette note, mais en l'appliquant, cette fois, à l'hypothèse où le point mobile x', y' est supposé se déplacer sur la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,;$$

si l'on a, en d'autres termes,

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on trouve pour le lieu du point I la droite

$$x = a\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Le théorème qui sert de base à notre construction subsiste

donc ; mais il y a une modification essentielle à la construction précédemment indiquée pour construire la droite Δ.

Si l'on suppose que AA′ BB′ soient les quatre sommets d'un losange, définissant une hyperbole qui est supposée avoir les points A, A′ pour sommets réels et B, B′ pour sommets imaginaires, la courbe se construira point par point au moyen d'une équerre de la manière suivante :

Considérons la droite A′B qui est une direction asymptotique de l'hyperbole et supposons que le point M de l'hyperbole s'éloigne à l'infini, sur la courbe. Le rayon vecteur A′ M′ a pour position limite la droite A′B, et la droite qui, d'après la construction, doit être élevée perpendiculairement à AM au point A, a pour position limite la perpendiculaire abaissée du point A sur A′B ; soit C le pied de cette perpendiculaire. Ce point C appartient au lieu et la droite Δ est obtenue en abaissant de ce point C une perpendiculaire sur AA′. Cette droite une fois construite, comme il vient d'être dit, on obtient un point quelconque de l'hyperbole, au moyen d'une équerre, par la construction indiquée plus haut pour l'ellipse.

4. — Cette construction, dans le cas de l'hyperbole, exige formellement que l'on prenne les deux sommets réels pour les joindre à un point M de la courbe, et l'on peut facilement vérifier qu'elle est en défaut si l'on joint les deux sommets imaginaires au point M et si l'on cherche, avec ces deux rayons vecteurs, à répéter la construction. Ce fait peut surprendre au premier abord, mais il s'explique très bien par des raisons générales, que nous ne voulons pas donner ici et qui sont bien connues. On peut d'ailleurs vérifier le problème suivant :

On considère les sommets imaginaires BB′ de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ou, dans un langage préférable les points dont les coordonnées sont $0 + b$, $0 - b$; et l'on joint ces points à un point M quelconque de l'hyperbole ; si on élève au point B à la droite BM une perpendiculaire, cette dernière droite rencontre B′M en un point I dont le lieu géométrique est la

courbe du quatrième degré

$$x^4 - 2\frac{b^2}{a^2}x^2(y+b)^2 + (y^2-b^2)^2 = 0.$$

Cette quartique admet deux points doubles, les points B et B; elle affecte des formes différentes suivant que l'on suppose $a < b$, $a = b$, $a > b$. *(A suivre.)*

QUESTION 354

(*Suite;* voir page 34.)

6. — Reportons-nous maintenant au carré que nous avons considéré au commencement de cette note et après avoir compté par tranches parallèles à AB, jusque et y compris la diagonale AB, au lieu de continuer à compter dans la même direction, prenons des tranches horizontales et nous aurons l'identité

$$nS_n = n + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1}, \qquad (6)$$

d'où l'on déduit successivement

$$(A)\left\{\begin{array}{l} (n-1)S_{n-1} = (n-1) + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-2}, \\ (n-2)S_{n-2} = (n-2) + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad 2S_2 = 2 + S_1, \\ \text{d'ailleurs,} \qquad S_1 = 1. \end{array}\right.$$

Considérons maintenant la série

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_n,$$

définie par les égalités

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} A_1 = 1. \\ A_2 = \dfrac{A_1}{n-1}, \\ A_3 = \dfrac{A_1 + A_2}{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ A_{n-1} = \dfrac{A_1 + A_2 + \dots + A_{n-2}}{2} \\ A_n = \dfrac{A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}}{1}; \end{array}\right.$$

et multiplions les égalités (A) respectivement par les nombres, $A_1, A_2, \dots A_n$;

les quantités $S_1, S_2, \dots S_n$ disparaissent, et l'on a

$$nS_n = nA_1 + (n-1)A_2 + (n-2)A_3 + \dots + 2A_{n-1} + A_n.$$

Cette relation peut s'écrire

$$nS_n = n(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}) + A_n - [A_2 + 2A_3 + \dots + (n-2)A_{n-1}],$$

et d'après les relations (α)

$$nS_n = (n+1)A_n - [A_2 + 2A_3 + \dots + (n-2)A_{n-1}]. \quad (7)$$

7. — Cherchons maintenant une relation entre deux termes consécutifs A_p, A_{p+1} de la série, précédemment définie,

$$A_1, A_2, \dots A_n.$$

Les deux égalités,

$$A_p = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}}{n-p+1},$$

$$A_{p+1} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_p}{n-p}$$

donnent entre les deux termes A_p, A_{p+1} la relation

$$(n-p+2)A_p = (n-p)A_{p+1};$$

d'où l'on déduit, en faisant successivement

$$p=2, p=3, \dots p=(n-1),$$

la suite d'égalités : $1.A_n = 3.A_{n-1}$,

$$2.A_{n-1} = 4.A_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n-2)A_3 = nA2,$$

auxquelles il faut joindre

$$(n-1)A_2 = A_1,$$

$$A_1 = 1,$$

provenant des égalités (α); on en tire

$$2A_n = n$$

ou

$$A_n = \frac{n}{2} = n\left(\frac{1}{2}\right),$$

et par suite, d'après les égalités précédentes,

$$A_{n-1} = n\left(\frac{1}{2.3}\right) = n\left(\frac{1}{2.3}\right),$$

$$A_{n-2} = n\left(\frac{1.2}{2.3.4}\right) = n\left(\frac{1}{3.4}\right),$$

$$A_{n-3} = n\left(\frac{1.2.3}{2.3.4.5}\right) = n\left(\frac{1}{4.5}\right),$$

. . . .

$$A_2 = n\left(\frac{1.2\ldots(n-2)}{2.3\ldots n}\right) = n\left(\frac{1}{(n-1)n}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (7), celle-ci prendra la forme

$$S_n = \frac{n+1}{2} - \left[\frac{1}{n(n-1)} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{n-2}{2.3}\right]. \quad (8)$$

En posant $n = 2p + 1$,

on a l'identité

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2p+1}\right) \quad (9)$$

$$+ \left[\frac{1}{(2p+1)2p} + \frac{2}{2p(2p-1)} + \ldots + \frac{2p-1}{2.3}\right] = p + 1,$$

qu'on peut vérifier directement.

8.— Considérons encore le carré AB, et après avoir compté la première tranche horizontalement, sommons par tranches inclinées à 45° ; on trouve

$$(n-1)S_n = (n+1)\left[\frac{n-1}{1.n} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{n-3}{3(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\right], \quad (10)$$

et en combinant avec l'identité (1)

$$S_n = n - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right]. \quad (11)$$

Comptons deux tranches horizontalement, puis par tranches inclinées à 45°, on trouve

$$(n-2)S_n = (n-2) + (n+2)\left[\frac{n-2}{2n} + \frac{n-3}{3(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)3}\right], \quad (12)^*$$

(*) C'est la relation 8 de la question. Cette relation avait été transcrite incorrectement; son inexactitude avait été reconnue et nous avait été signalée par M. Baron, élève du lycée Henri IV, qui a résolu aussi la question.

et d'après (1)

$$2S_n = (n+) - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{n-2}{n}\right]. \quad (13)$$

9. — *Généralement*, après avoir compté $(p-1)$ tranches horizontalement, comptons par tranches inclinées à 45° à partir de la p^{me} tranche et nous aurons l'identité

$$S_n - S_{p-1} = \frac{1}{n} + \frac{n+p-1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{p(n-1)} + \frac{n-p-1}{(p+1)(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)p}\right],$$

ou,

$$S_{n-1} - S_{p-1} = \frac{n+p-1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{p(n-1)} + \frac{n-p-1}{(p+1)(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)p}\right]. \quad (14)$$

Le crochet renferme $(n-p)$ termes dont les dénominateurs sont égaux deux à deux, et si l'on pose

$$n - p = 2k,$$

il vient

$$S_{n-1} - S_{n-2k-1} = (2n - 2k - 1 \quad (15)$$

$$\left[\frac{1}{(n-2k)(n-1)} + \frac{1}{(n-2k+1)(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-k-1)(n-k)}\right],$$

formule qui permet de calculer assez rapidement la somme d'un nombre quelconque de termes de la série harmonique *entre deux limites arbitrairement choisies*. Il faut remarquer, en effet, que la série $S_{n-1} - S_{n-2k-1}$ renferme $2k$ termes, tandis que la série du second membre est formée de k fractions seulement.

En posant $n - p = 2k - 1$,
on obtient $S_{n-1} - S_{n-}$

$$= 2(n-k)\left[\frac{1}{(n-2k+1)(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-k-1)(n-k+1}\right] + \frac{1}{n-k} \quad (16)$$

De la formule (15) on déduit comme cas particulier

$$S_{4n} - S_{2n}$$
$$= (6n+1)\left[\frac{1}{(2n+1)\,4n} + \frac{1}{(2n+2)(4n-1)} + \dots + \frac{1}{3n(3n+1)}\right] \quad (17$$

et, en se servant de la formule de M. Catalan (*).

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2n}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{4n}$$
$$= (6n+1)\left[\frac{1}{(2n+1)\,4n} + \frac{1}{(2n+2)(4n-1)} + \dots + \frac{1}{3n(3n+1)}\right] \quad (18)$$

qui réduit une série de $4n$ termes à une autre série de n termes seulement.

De la formule (16) on déduit de même

$$S_{4n-2} - S_{2n-1}$$
$$= 2(3n-1)\left[\frac{1}{2n(4n-2)} + \frac{1}{(2n+1)(4n-3)} + \dots + \frac{1}{3n-2)\,3n}\right] + \frac{1}{3n-1} \quad (19)$$

et par la formule de M. Catalan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{4n-2}$$
$$= 2(3n-1)\left[\frac{1}{2n(4n-2)} + \frac{1}{(2n+1)(4n-3)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)\,3n}\right] + \frac{1}{3n-1}. \quad (20)$$

10. — *En résumé*, nous avons donc pu lier la série harmonique aux séries suivantes :

$$\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \dots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

(*) Note sur une formule de M. Botesu (*Bulletins de l'Académie royale Belgique, 1872*).

$$\frac{1}{1(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-2)}+\dots+\frac{1}{(n-1)(n+1)},$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{2n-C_2^2}+\frac{1}{3n-C_3^2}+\dots+\frac{1}{n^2-C_n^2},$$

$$\frac{1}{n(n-1)}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}+\dots+\frac{n-2}{2.3}$$

$$\frac{n-1}{1.n}+\frac{n-2}{2(n-1)}+\dots+\frac{1}{(n-1)2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\dots+\frac{n-2}{n}$$

et aussi à la série

$$A_1+A_2+2A_3+\dots+(n-2)A_{n-1},$$

définies par les égalités successives

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{A_1}{n-1},$$

$$\dots\dots$$

$$A_{n-1}=\frac{A_1+A_2+\dots+A_{n-2}}{2}.$$

On a fait voir, en même temps, dans les formules (15) et (16) le moyen de calculer une tranche quelconque de la série harmonique par une autre série ayant un nombre de termes moitié moindre. Enfin, les formules (18) et (20) donnent le développement de

$$L2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\dots,$$

développement limité soit au terme de rang $4n$, soit au terme de rang $(4n-2)$, par une série ne renfermant que n termes seulement. On remarquera la méthode analytique qui nous a dirigé dans cette recherche, méthode applicable à toutes les séries et conduisant, sans effort, à des identités que la combinaison algébrique peut assurément inventer, mais en ayant recours, le plus souvent, à des calculs délicats et synthétiques.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Bequel.

(*Suite*, voir page 38.)

Les formules de transformation précédentes donnent les coordonnées trilinéaires en fonction des coordonnées cartésiennes, et par conséquent permettent de passer immédiatement de l'équation d'une ligne en coordonnées trilinéaires à l'équation de la même ligne en coordonnées cartésiennes. Pour faire la transformation inverse, c'est-à-dire pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées trilinéaires, il suffit de résoudre les formules par rapport à x et à y; deux des équations fourniront les coordonnées x et y en fonction de deux seulement des coordonnées α, β, γ, et en substituant les valeurs obtenues dans la troisième formule, on obtiendra une équation de condition entre α, β et γ. Cette relation sera évidemment celle qui existe entre les cordonnées trilinéaires d'un même point, c'est-à-dire $$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2S.$$

Nous avons fait remarquer, en effet, que le point M est complètement déterminé par deux seulement des trois quantités α, β, γ, données en grandeur et en signe, la troisième étant déterminée par la connaissance des deux autres et par la position du triangle de référence.

On peut d'ailleurs se convaincre, en effectuant le calcul, que la relation de condition que l'on trouve est bien $\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2S$. A cet effet, évaluons d'abord $2S$, a, b et c en fonction des coefficients des équations des axes de référence. Désignons par x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, les coordonnées respectives des trois sommets A, B et C. On sait que l'on a :

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Soit Δ le déterminant $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$; si l'on fait le produit de ces deux déterminants, en les multipliant ligne par ligne. il vient

$$2S\Delta = \begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + C & A'x_1 + B'y_1 + C' & A''x_1 + B''y_1 + C'' \\ Ax_2 + By_2 + C & A'x_2 + B'y_2 + C' & A''x_2 + B''y_2 + C'' \\ Ax_3 + By_3 + C & A'x_3 + B'y_3 + C' & A''x_3 + B''y_3 + C'' \end{vmatrix}$$

Or dans ce produit les éléments de la diagonale principale sont seuls différents de zéro; car le sommet B, par exemple, étant à l'intersection des deux cotés BC et AB, on a identiquement

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \text{ et } A''x_2 + B''y_2 + C'' = 0.$$

Pour des raisons analogues, on a aussi identiquement

$$Ax_3 + By_3 + C = 0 \qquad A'x_3 + B'y_3 + C' = 0$$

et

$$A'x_1 + B'y_1 + C' = 0 \qquad A''x_1 + B''y_1 + C'' = 0$$

Par conséquent

$$2S\Delta = \begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + C & 0 & 0 \\ 0 & A'x_2 + B'y_2 + C' & 0 \\ 0 & 0 & A''x_3 + B''y_3 + C'' \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$2S\Delta = (Ax_1 + By_1 + C)(A'x_2 + B'y_2 + C')(A''x_3 + B''y_3 + C'')$$

Cela posé, considérons les trois identités

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C - (Ax_1 + By_1 + C) &= 0 \\ A'x_1 + B'y_1 + C' &= 0 \\ A''x_1 + B''y_1 + C'' &= 0 \end{aligned}$$

et prenons le déterminant de leurs coefficients

$$\begin{vmatrix} A & B & C-(Ax_1+By_1+C) \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} & [C-(Ax_1+By_1+C)](A'B''-B'A'') \\ & + C'(BA''-AB'') \\ & + C''(AB'-BA') \end{aligned} \right\}$$

Multiplions respectivement les trois identités par les coefficients de $C - (Ax_1 + By_1 + C)$, de C' et de C'' dans ce déterminant, et ajoutons les résultats; les multiplicateurs de x_1 et de y_1 seront identiquement nuls comme étant des déter-

minants ayant deux colonnes identiques, et il restera seulement le déterminant considéré lui-même. Donc

$$\begin{vmatrix} A & B & C - (Ax_1 + By_1 + C) \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & Ax_1 + By_1 + C \\ A' & B' & 0 \\ A'' & B'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et par suite $Ax_1 + By_1 + C = \dfrac{\Delta}{A'B'' - B'A''}$

On trouverait de même

$$A'x_2 + B'y_2 + C' = \frac{\Delta}{BA'' - AB''}$$

et

$$A''x_3 + B''y_3 + C'' = \frac{\Delta}{AB' - BA'},$$

Il en résulte

$$2S\Delta = \frac{\Delta^3}{(A'B'' - B'A'')(BA'' - AB'')(AB' - BA')}$$

et enfin

$$2S = \frac{\Delta^2}{(A'B'' - B'A'')(BA'' - AB'')(AB' - BA')}.$$

a étant la longueur du côté BC, et h la hauteur correspondante, on a $ah = 2S$.

Or

$$h = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

et nous venons de voir que

$$Ax_1 + By_1 + C = \frac{\Delta}{A'B'' - B'A''}.$$

Donc

$$h = \frac{\Delta}{(A'B'' - B'A'')\sqrt{A^2 + B^2}}$$

et enfin

$$a = \frac{2S}{h} = \frac{\Delta\sqrt{A^2 + B^2}}{(BA'' - AB'')(AB' - BA')}.$$

On obtiendrait de même

$$b = \frac{\Delta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{(A'B'' - B'A'')(AB' - BA')}.$$

et $$c = \frac{\Delta\sqrt{A''^2 + B''^2}}{(BA'' - AB')(A'B'' - B'A'')}.$$

Cela posé, les formules de transformation de coordonnées cartésiennes rectangulaires en coordonnées trilinéaires, sont, comme nous l'avons établi plus haut,

$$Ax + By + C - \frac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda} = o,$$

$$A'x + B'y + C' - \frac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu} = o,$$

$$A''x + B''y + C'' - \frac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu} = o.$$

Le résultat de l'élimination de x et y entre ces trois équations est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C - \dfrac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda} \\ A' & B' & C' - \dfrac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu} \\ A'' & B'' & C'' - \dfrac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu} \end{vmatrix} = o.$$

C'est la relation de condition qui existe entre les trois coordonnées trilinéaires d'un point. Or, on peut l'écrire

$$\Delta - \begin{vmatrix} A & B & \dfrac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda} \\ A' & B' & \dfrac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu} \\ A'' & B'' & \dfrac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu} \end{vmatrix} = o,$$

qui développée devient

$$\Delta = \frac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda}(A'B'' - B'A'') + \frac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu}(BA'' - AB'')$$
$$+ \frac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu}(AB' - BA')$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par Δ, et

divisant par le produit des trois mineurs, il vient

$$\frac{\Delta^2}{(A'B''-B'A'')(BA''-AB'')(AB'-BA')} = \frac{\alpha}{\lambda}\cdot\frac{\Delta\sqrt{A^2+B^2}}{(BA''-AB'')(AB'-BA')}$$
$$+\frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{\Delta\sqrt{A'^2+B'^2}}{(A'B''-B'A'')(AB'-BA')}$$
$$+\frac{\gamma}{\nu}\cdot\frac{\Delta\sqrt{A''^2+B''^2}}{(A'B''-B'A'')(BA''-AB'')}$$

c'est-à-dire, en vertu des formules établies précédemment,

$$2S = \frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

— Revenons aux formules de transformation. Si l'on a une équation $f(x, y) = 0$, en coordonnées cartésiennes, et qu'on veuille obtenir l'équation du même lieu en coordonnées trilinéaires, on pourra déduire x et y des deux premières formules de transformation, par exemple, et en remplaçant x et y dans $f(x, y)$ par les valeurs obtenues, qui ne renferment que α et β, on obtiendra une équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, qui ne contiendra que deux des trois coordonnées α, β, γ.

Pour avoir l'équation du lieu en fonction des trois quantités α, β, γ, il faut donc opérer autrement. Prenons, pour fixer les idées, le cas des coordonnées rectangulaires ; des trois formules de transformation nous tirerons les deux suivantes :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\lambda}{\nu}\,\frac{\sqrt{A''^2+B''^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\frac{Ax+By+C}{A''x+B''y+C''}$$

$$\text{et}\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}\,\frac{\sqrt{A''^2+B''^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\cdot\frac{A'x+B'y+C'}{A''x+B''y+C''};$$

qui, résolues par rapport à x et y, fourniront ces quantités en fonction des rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, de sorte qu'en reportant les valeurs obtenues dans l'équation $f(x, y) = 0$, on aura une équation $F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)$ qui, ramenée à la forme entière, sera l'équation de la courbe considérée, exprimée à l'aide des trois coordonnées trilinéaires α, β, γ.

Il est clair que les valeurs de x et de y ainsi déduites sont exprimées par des fractions dont les deux termes sont du 1[er] degré en $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, c'est-à-dire des fonctions linéaires homogènes en α, β, γ, et qui, de plus, ont même dénominateur.

L'équation $f(x,y) = 0$ sera remplacée par une équation de la forme $f\left(\frac{M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma}{R_1\alpha + S_1\beta + T_1\gamma}, \frac{M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma}{R_1\alpha + S_1\beta + T_1\gamma}\right) = 0$.

Si l'équation $f(x, y) = 0$ est algébrique et entière, l'équation en coordonnées trilinéaires, après l'évanouissement des dénominateurs, sera aussi algébrique, entière, et du même degré que $f(x, y) = 0$. De plus, elle sera homogène, non seulement en α, β, γ, mais aussi par rapport aux fonctions linéaires

$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma$, $M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma$, $R_1\alpha + S_1\beta + T_1\gamma$.

En entrant dans les détails du calcul, on constate aisément que les coefficients M_1, N_1, P_1, M_2, N_2, P_2, R_1, S_1, T_1, sont les produits des 9 mineurs du déterminant que nous avons désigné plus haut par Δ par l'une ou l'autre des 3 constantes

$$\frac{\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \quad \frac{\nu}{\sqrt{A''^2 + B''^2}}.$$

Dans la plupart des cas, on prend pour paramètres de référence les quantités $\sqrt{A^2 + B^2}$, $\sqrt{A'^2 + B'^2}$, $\sqrt{A''^2 + B''^2}$ elles-mêmes; les formules de transformation prennent alors la forme simple

$\alpha = Ax + By + C$, $\beta = A'x + B'y + C'$, $\gamma = A''x + B''y + C''$,

d'où l'on tire

$$\alpha(A''x + B''y + C'') = \gamma(Ax + By + C)$$
$$\beta(A''x + B''y + C'') = \gamma(A'x + B'y + C')$$

et par suite

$$x = \frac{\alpha(B'C'' - C'B'') + \beta(B''C - C''B) + \gamma(BC' - CB')}{\alpha(A'B'' - B'A'') + \beta(A''B - B''A) + \gamma(AB' - BA')}$$

$$y = \frac{\alpha(C'A'' - A'C'') + \beta(C''A - A''C) + \gamma(CA' - AC')}{\alpha(A'B'' - B'A'') + \beta(A''B - B''A) + \gamma(AB' - BA')}$$

formules dont les coefficients sont précisément les neuf mineurs du déterminant Δ. *(A suivre.)*

QUESTION 343

Solution par M. GOULARD, élève au Lycée Louis-le-Grand, à Paris.

Trouver le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits à une conique donnée. Cas où cette conique est une hyperbole dont les asymptotes font entre elles un angle de 60°.

Il est d'abord évident que si dans un triangle le centre de gravité coïncide avec le centre du cercle circonscrit, le triangle est équilatéral. Si donc on désigne par p et q les coordonnées du centre du cercle circonscrit à un triangle, il suffira, pour exprimer qu'il est équilatéral, d'écrire que les sommes des coordonnées de ses sommets sont $3p$ et $3q$.

Cela posé, soient l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

et le cercle $\qquad (c - p)^2 + (y - q)^2 - R^2 = 0 \qquad (2)$
circonscrit à un triangle inscrit dans l'ellipse. Ces deux courbes se coupent en un quatrième point dont il est facile d'avoir les coordonnées. Si l'on multiplie (1) par a^2 et si l'on en retranche (2), il vient

$$\frac{c^2y^2}{b^2} + 2qy + 2px + \ldots = 0,$$

d'où $$x = -\frac{1}{2p}\left(\frac{c^2y^2}{b^2} + 2qy + \ldots\right).$$

L'équation aux ordonnées des points d'intersection de (1) et (2) est donc

$$\frac{1}{4a^2p^2}\left(\frac{c^2y^2}{b^2} + 2qy + \ldots\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et la somme des racines de cette équation est $-\frac{4b^2q}{c^2}$. La somme de trois d'entre elles devant être égale à $3q$, la quatrième sera $-q\left(\frac{4b^2}{c^2} + 3\right) = -\frac{q}{c^2}(b^2 + 3a^2)$.

On trouverait de même pour l'abscisse du même point

$$\frac{p}{c^2}(a^2 + 3b^2).$$

Écrivant que ce point est sur l'ellipse, et remplaçant p et q par x et y, on aura l'équation du lieu cherché :

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 + 3b^2)^2 + \frac{y^2}{b^2}(b^2 + 3a^2)^2 - c^4 = 0.$$

C'est une ellipse dont les axes ont la même direction que ceux de la proposée. Les longueurs de ces demi-axes sont

$$\frac{ac^2}{a^2 + 3b^2} \text{ et } \frac{bc^2}{b^2 + 3a^2}.$$

Pour avoir le lieu dans le cas de l'hyperbole, il suffit de changer b^2 en $-b^2$, et il vient

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - 3b^2)^2 - \frac{y^2}{b^2}(3a^2 - b^2)^2 - c^4 = 0.$$

C'est une hyperbole. L'un des axes devient infini, et le lieu se réduit à un système de deux droites parallèles, lorsque $a^2 - 3b^2 = 0$ ou lorsque $3a^2 - b^2 = 0$. Dans le premier cas, l'angle des asymptotes est de 60°, et les deux droites du lieu sont imaginaires. Dans le second cas, l'angle des asymptotes est de 120°, et les deux droites sont

$$x = \pm 2a.$$

Dans le cas de la parabole $y^2 = 2Px$, le terme en y^3 manque dans l'équation aux ordonnées des points d'intersection avec le cercle ; l'ordonnée du quatrième point est donc $-3q$, et son abscisse $\frac{9q^2}{2P}$. D'un autre côté, l'équation aux abscisses est

$$\frac{1}{4q^2}[(x - p)^2 + 2Px + \ldots]^2 = 2Px.$$

La somme des racines est $-4(P - p)$; la quatrième est donc $p - 4P$. Par suite, l'équation du lieu est

$$9y^2 = 2P(x - 4P).$$

C'est une parabole dont le paramètre est égal au neuvième de celui de la proposée.

Nota. — La même question a été résolue par M. Haure, élève au lycée Louis-le-Grand.

QUESTION 345

Solution par M. Cadot élève au Lycée Saint-Louis.

Soit

$$f(xy) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique, les axes de coordonnées étant rectangulaires. Posons

$$\varphi = (f'x)^2 + (f'y)^2 - 4(A + C)\ f(x, y) = 0.$$

L'équation des quatre directrices de la conique est

$$\varphi^2 + 4(A + C)\ f(x,y)\varphi(x,y) + 16\ \delta f^2(x,y) = 0$$

ou

$$\delta = AC - B^2.$$

L'équation $\varphi = 0$ représente le cercle des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

Proposons-nous d'abord de trouver le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique $f(xy) = 0$. Soit (xy) un point du lieu. Les tangentes à la conique $f = 0$ issues de ce point ont pour équation quadratique

$$4\ f(xy)f(XY) - (xf'_x + yf'_y + f'_z)^2 = 0.$$

Pour que ces tangentes soient rectangulaires, il nous suffira d'écrire que l'équation précédente représente une hyperbole équilatère ; donc

$$(f'x)^2 - 4Af(xy) + (f'y)^2 - 4Cf(xy) = 0;$$

donc le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique $f = 0$ est

$$\varphi = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 - 4(A + C)f(xy) = 0.$$

Si la conique est une parabole, cette équation représente une droite qui est la directrice.

Si la conique est du genre ellipse ou hyperbole et à un centre unique, la conique $\varphi = 0$ est un cercle dont l'équation développée peut s'écrire

$$(B^2 - AC)(x^2 + y^2) + 2(BE - CD)x + 2(BD - AD)y + D^2 + E^2 - (A + C)F = 0.$$

Remarquons maintenant que les directrices d'une ellipse et d'une hyperbole sont celles des cordes communes à la conique et au cercle précédent qui ne passent pas par le centre.

Considérons en effet une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes ; son équation est

$$\frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \text{ou} \qquad b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2.$$

Le cercle lieu des sommets des angles droit sera

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2.$$

Les sécantes communes sont représentées par l'équation

$$\lambda(x^2 + y^2 - a^2 \pm b^2) + b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

ou $(b^2 + \lambda)x^2 + (\lambda + a^2)y^2 - a^2a^2 - \lambda(a^2 + b^2) = 0$,

λ satisfaisant à la condition

$$(b^2 + \lambda)(\lambda \pm a)[a^2b^2 - \lambda(a^2 \pm b^2)] = 0.$$

Donnons à λ les valeurs $- b^2$, et $\mp a^2$; nous obtiendrons les sécantes représentées par les équations

$$c^2y^4 \pm b^2 = 0, \qquad c^2x^2 \mp a^4 = 0.$$

Ce sont précisément les deux systèmes de directrices correspondant aux foyers réels et aux foyers imaginaires de la conique. — Le troisième couple de sécantes communes ne correspond pas à des droites remarquables. Il est caractérisé par la propriété de passer par le centre.

Les directrices sont donc les sécantes communes à $f = 0$, $\varphi = 0$ ne passant pas par le centre.

Transportons l'origine des coordonnées au centre.

La conique $f = 0$ devient

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2} = 0.$$

La conique $\varphi = 0$ devient

$$(B^2 - AC)(x^2 + y^2) + H = 0,$$

H étant le nouveau terme indépendant

Les sécantes communes à ces deux coniques seront représentées par l'équation $4f + \lambda\varphi = 0$; les valeurs de λ seront d'ailleurs les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées.

Pour avoir un système de deux droites il suffit que λ vérifie

$$[(A - \lambda\delta)(C - \lambda\delta) - B^2]\left[\frac{\Delta}{AC - B^2} + \lambda H\right] = 0.$$

Les valeurs de λ auxquelles correspondent des sécantes ne passant pas par le centre sont racines de

$$(A - \lambda\delta)(C - \lambda\delta) - B^2 = 0.$$

Pour avoir l'équation quadratique des sécantes correspondant à ces valeurs, il nous suffira d'éliminer λ entre

$$4f + \lambda\varphi = o$$

et $$(A - \lambda\delta)(C - \lambda\delta) - B^2 = o,$$

ou

$\delta - \lambda\delta(A + C) + \lambda^2\delta^2 = o$, ou enfin $\delta\lambda^2 - (A + C)\lambda - 1 = o$ car $\delta \lessgtr o$.

L'équation des directrices est donc, en remplaçant λ par $\frac{4f}{\varphi}$.

$$16\,\delta f^2 + 4(A + C)f\varphi + \varphi^2 = o.$$

Cette équation peut dans tous les cas représenter les directrices de la conique. En effet, si l'on a affaire à une parabole, $\delta = o$; donc l'équation se réduit à

$$\varphi[4(A + C)f + \varphi] = o.$$

On obtient donc la courbe $\varphi = o$, qui est, comme nous l'avons vu, la directrice réelle de la parabole.

QUESTION 372

Solution par M. BARON, élève du Lycée Henri IV.

On donne: 1° dans le plan des xz *une droite parallèle à l'axe* ox; *2° Dans le plan des* zy *une droite parallèle à l'axe des* y *et ne rencontrant pas l'axe des* z *au même point que la précédente. D'un point pris dans le plan* xoy, *on abaisse des perpendiculaires sur ces deux droites et on joint leurs pieds par une ligne droite. Équation de la surface engendrée par cette droite lorsque le point* xy *décrit la courbe* f (xy) = o; *cas où* f (xy) = o *est une droite.*

Soient AB $\left|\begin{array}{l} y = o \\ z = p \end{array}\right.$ CD $\left|\begin{array}{l} x = o \\ z = q \end{array}\right.$

M $\left|\begin{array}{l} x = a \\ y = b \\ z = o \end{array}\right.$

on aura évidemment

$$P \left| \begin{array}{l} x = a \\ y = o \\ z = p \end{array} \right. \qquad Q \left| \begin{array}{l} x = o \\ y = b \\ z = q \end{array} \right.$$

P et Q étant les pieds des perpendiculaires abaissées du point donné M sur les droites AB, CD, PQ aura pour équations

$$\frac{x - a}{- a} = \frac{y}{b} = \frac{z - p}{q - p}. \qquad (1)$$

D'ailleurs on a $f(ab) = o$ (2)

la surface engendrée par (1) sera donc

$$f\left(\frac{(q - p)\, y}{z - p}, \frac{(q - p)\, x}{z - q}\right) = o; \qquad (3)$$

Si le point M décrit la droite $Ax + By + C = o$, la surface sera

$$\frac{A\,(q - p)y}{z - p} + \frac{B(q - p)\, x}{z - q} + C = o$$

ou

$$A(q - p)(z - q)\, y + B(q - p)(z - p)x + C(z - p)(z - q) = o$$

les plans du centre sont

$$\left| \begin{array}{l} z - p = o \\ z - q = o \\ Ay + Bx = o \end{array} \right.$$

la surface est donc un paraboloïde hyperbolique ; elle contient les droites $\left| \begin{array}{l} z = p \\ y = o \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} z = q \\ x = o \end{array} \right.$

le plan des xy est un plan directeur.

On peut d'ailleurs remarquer qu'en faisant $z = o$, on obtient une équation du premier degré en x, y. La surface est donc engendrée par une droite qui s'appuie sur trois droites fixes parallèles à un même plan, ce qui caractérise le paraboloïde hyperbolique.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Dupuy, Petit, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Lelieuvre, à Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

8. — On considère une ellipse rapportée à ses axes et le cercle Δ qui passant par les foyers est concentrique à cette ellipse. Par un point M, pris sur le cercle, on mène à l'ellipse deux tangentes qui coupent le cercle aux points A et B, différents de M. Démontrer que la droite AB est parallèle au grand axe de l'ellipse. *(G. L.)*

9. — On considère une hyperbole rapportée à ses axes;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

sur l'axe Oy, on considère les deux points B et B' qui sont à une distance b de l'origine et on les joint à un point M, mobile sur l'hyperbole. La perpendiculaire à B'M au point B' rencontre BM en un point I, dont on demande le lieu géométrique. Ce lieu est une quartique; on demande de la construire et d'indiquer les différentes formes de la courbe suivant que l'on a

$$b < a, \quad b = a, \quad b > a. \qquad (G.\ L.)$$

10. — Soit AB une corde dans une parabole, C le milieu de AB. On projette le point C en C' sur l'axe et on mène par ce point C une perpendiculaire à AB, perpendiculaire qui rencontre l'axe au point D. Démontrer que, quel que soit AB, C'D est constamment égal à p. Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole connaissant deux points et l'axe de la courbe.

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu que les normales A et B coupent l'axe en des points équidistants du point D. *(G. L.)*

11. — On donne une parabole P, et un point M ($\alpha\beta$) dans son plan. Par ce point supposé fixe, on fait tourner une droite Δ, qui rencontre P en A et B, et l'axe de la parabole au point C. Par les points A et B, on fait passer un cercle qui touche en D la tangente au sommet de la parabole. La

droite CD rencontre le cercle en un second point E que l'on joint au centre du cercle, ce qui donne une droite Δ'. Démontrer que le lieu des points de rencontre de Δ et de Δ' est une parabole quand Δ tourne autour de M. On expliquera les résultats par des considérations purement géométriques.

(G. L.)

12. — On considère une ellipse rapportée à ses axes : soient A,A', les extrémités du grand axe, BB' les extrémités du petit axe. On mène les tangentes à l'ellipse en ces quatre points, et une tangente Δ supposée mobile rencontre celles-ci en des points $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, enfin sur $\alpha\alpha'$ comme diamètre on décrit un cercle U, et sur $\beta\beta'$, un cercle V. Cela posé on propose les questions suivantes :

1° Équation générale des cercles U ;

2° Équation des cercles V ;

3° Quel est l'angle d'anomalie du point de contact M de la tangente Δ quand les cercles U et V sont égaux ?

4° Démontrer que l'axe radical des cercles U et V n'est autre chose que la normale au point M.

5° Par le centre de l'ellipse on mène une tangente au cercle V. Démontrer que le lieu des points de contact est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.

6° Démontrer que les cercles U et V se coupent orthogonalement.

7° Trouver le lieu décrit par les points communs aux cercles U et V, et démontrer que ce lieu se compose de deux cercles concentriques à l'ellipse, et de rayon $(a-b)$ (et $a+b$).

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KOEHLER.

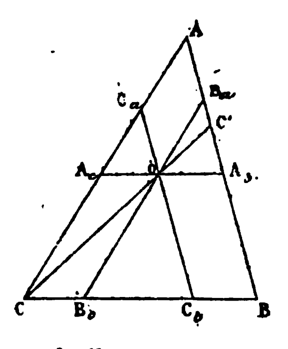
PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 595-

QUELQUES THÉORÈMES

SUR LES DROITES MENÉES PAR UN POINT DU PLAN D'UN TRIANGLE PARALLÈLEMENT A SES COTÉS

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École polytechnique.

Étant donné un triangle ABC, *trouver un point* O *tel que si l'on mène par ce point des parallèles aux trois côtés, limitées à ces côtés, savoir* $A_c A_b$ *parallèle à* CB, *etc, les parallélogrammes formés par deux de ces droites et par les deux côtés qui leur sont parallèles soient proportionnels aux* m[mes] *puissances du troisième côté.*



Équation du lieu de O *si* m *varie d'une façon continue.*

En prenant CB pour axe des x, CA pour axe des y, appelant x et y les coordonnées du point O et exprimant les conditions de l'énoncé, on a facilement

$$bc^m x + a(c^m + a^m)y = abc^m \qquad (1)$$
$$b(b^m + c^m)x + ac^m y = abc^m \qquad (2)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{a^m c^m}{b^m c^m + a^m c^m + a^m b^m} = a\,\frac{\frac{1}{b^m}}{\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}} \\ y &= b\,\frac{b^m c^m}{b^m c^m + a^m c^m + a^m b^m} = b\,\frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

La remarque que l'on a $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m+1}$ permet de trouver facilement l'équation du lieu; quand m varie elle est

$$\frac{[ay]^{\log\frac{b}{c}}}{[bx]^{\log\frac{a}{c}}} = (ab - ay - bx)^{\log\frac{b}{a}} \qquad (4)$$

Cette remarque montre aussi que les distances du point O aux trois côtés sont proportionnelles aux $m + 1^{\text{mes}}$ puissances de ces côtés

Si donc on cherchait *le lieu du point dont les distances aux trois côtés soient proportionnelles aux* m^mes^ *puissances de ces côtés, on trouverait l'équation* (4).

Si l'on appelle C' le point où CO coupe AB, on trouve

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{b^m}{a^m}.$$

(Voir Comptes rendus du Congrès d'Alger de l'Association française, Brocard, p. 150.)

D'où, si l'on cherchait

Le lieu du point O tel que si l'on joint ce point aux trois sommets, les côtés opposés sont divisés par ces droites en segments inversement proportionnels aux puissances m^mes^ *des côtés adjacents, on trouverait aussi l'équation* (4).

Pour $m = -2$ les formules (3) donnent pour O le centre des médianes antiparallèles.

Pour $m = -1$ les formules (3) donnent pour O le centre du cercle inscrit.

Pour $m = 0$ les formules (3) donnent pour O le centre de gravité.

Pour $m = 1$ on voit facilement que l'on a

$$B_cC_b = B_aA_b = A_cC_a = \frac{abc}{ab + ac + cb},$$

c'est-à-dire *que O est le point tel que les différences entre un côté et la partie de la parallèle à ce côté comprise entre les deux autres menées par ce point soit la même pour les trois côtés.*

Ce point est celui que l'on obtient par le concours des droites qui joignent à un sommet le point symétrique par rapport au milieu du côté du pied de la bissectrice qui tombe sur ce côté.

Pour $m = 2$ on trouve que l'on a

$$\frac{B_cC_b}{b \times c} = \frac{C_aA_c}{c \times a} = \frac{A_bB_a}{a \times b} = \frac{abc}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

C'est-à-dire que les parties des côtés comprises entre deux parallèles sont proportionnelles aux produits des deux autres côtés, etc.

En général, si l'on appelle avec M. de Longchamps *points réciproques* deux points tels, que si on les joint aux sommets d'un triangle ils coupent les côtés opposés en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté, on peut dire : *A tout point* O *du lieu défini par une valeur de* m *dans les équations* (1) *et* (2) *correspond pour la valeur de* m *égale et de signe contraire un point* O' *défini par les équations*

$$x = a.\frac{b^m}{a^m + b^m + c^m}$$
$$y = b.\frac{a^m}{a^m + b^m + c^m}$$

et tel que O *et* O' *sont réciproques. Le lieu de* O *et le lieu de* O' *se confondent. Donc le lieu de* O *défini par* (4) *est aussi le lieu du point tel que si on le joint aux trois sommets, les côtés opposés sont divisés par ces droites en segments proportionnels aux puissances des côtés adjacents.*

On trouve facilement

$$\overline{CC'}^2 = \frac{a^{2m+2} + b^{2m+2} + a^m b^m (a^2 + b^2 - c^2)}{(a^m + b^m)^2}$$
$$\overline{OA}^2 = \frac{a^{2m} [b^{2m+2} + c^{2m+2} + c^m b^m (c^2 + b^2 - a^2)]}{[b^m c^m + a^m c^m + a^m b_m]^2}$$

Remarquons que l'on a

$$B_c C_b \times a^{m-1} = C_a A_c \times b^{m-1} = A_b B_a \times c^{m-1}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}}.$$

Le lieu du point O est donc encore *le lieu du point tel que si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, les portions des côtés comprises entre ces parallèles sont proportionnelles aux inverses de puissances de ces côtés.*

On trouverait le même lieu si avec l'énoncé précédent l'on disait : *sont proportionnelles aux puissances de ces côtés*, au

lieu de : *aux inverses des puissances*. Nous avons établi cette dualité dans les énoncés en considérant les points réciproques O et O'; mais il était évident que, algébriquement, le lieu de O correspondant aux puissances m serait le même lieu que celui qui correspondait aussi aux inverses de ces puissances, puisque nous faisons varier m de $-\infty$ à $+\infty$ et que m passe toujours par deux valeurs égales de signe contraire, ce qui correspond à une puissance et à l'inverse de cette puissance.

On ferait des remarques analogues sur *le lieu des points tels que si l'on mène par ces points des parallèles aux trois côtés d'un triangle, les parties de ces parallèles comprises entre deux des côtés soient proportionnelles aux puissances ou aux inverses des puissances du troisième.*

Voici encore deux théorèmes simples sur les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les trois parallèles aux trois côtés menés par un point O du plan; *ils sont presque évidents;* mais je ne crois point qu'ils aient été énoncés, et comme leurs réciproques peuvent servir dans certains cas à prouver que trois droites concourent ou ne concourent pas en un même point, il me semble utile de les signaler.

Considérons les neuf segments suivants :

Deux segments interceptés sur les deux côtés entre le troisième côté et sa parallèle menée par O, en tout six; un segment intercepté sur chaque côté entre les parallèles aux deux autres, en tout trois.

Théorème I. — *Si l'on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6, en tournant dans le sens CBA les six segments de la première espèce, le produit des trois segments de rang pair égale le produit des trois segments de rang impair et égale aussi le produit des trois segments de la seconde espèce.*

Avec les notations déjà adoptées, ce théorème s'écrit ainsi :

$$AC_a \times BA_b \times CB_c = AB_a \times BC_b \times CA_c$$
$$= B_cC_b \times A_cC_a \times B_aA_b.$$

Théorème II. — *Sur chaque côté il y a trois de ces neuf segments; on peut les ranger, quel que soit O, de façon que les longueurs des trois segments soient — mais les segments n'étant*

pas pris dans le même ordre sur chaque côté — proportionnelles aux longueurs des trois segments d'un quelconque des deux autres côtés.

Avec les notations adoptées, CB_c, B_cC_b, C_bB, sont proportionnels à C_aA_c, A_cC, AC_a et à B_aA, BA_b, A_bB_a.

Ces deux théorèmes sont presque évidents en observant que les longueurs des segments considérés sont celles des côtés des trois triangles semblables OB_cC_b, OC_aA_c, OA_bB_a.

Le théorème I donne lieu aux remarques suivantes :

1° Les trois segments impairs de première espèce sont égaux entre eux, pour le point

$$S \begin{cases} x = \dfrac{abc}{bc + ac + ab}, \\ y = \dfrac{ab^2}{bc + ac + ab} \end{cases} \text{ et égaux à } \frac{abc}{bc + ac + ab}.$$

2° Les trois segments pairs de première espèce sont égaux entre eux et ont alors évidemment la même valeur commune que précédemment, pour le point

$$S' \begin{cases} x = \dfrac{a^2b}{bc + ac + ab}, \\ y = \dfrac{abc}{bc + ac + ab}. \end{cases}$$

Si par le pied d'une bissectrice sur un côté on mène des parallèles aux deux autres côtés, ces parallèles coupent les côtés en deux points, en tout six points sur les trois côtés; si l'on joint ces six points chacun au sommet opposé au côté sur lequel est le point, on a six droites dont trois passent en S *et trois en* S'.

3° Les trois segments de seconde espèce sont égaux entre eux et ont alors évidemment la même valeur commune que précédemment, pour le point

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2c}{bc + ac + ab}, \\ y = \dfrac{b^2c}{bc + ac + ab}. \end{cases}$$

Ce dernier point est le réciproque (voir plus haut) du centre du cercle inscrit.

4° Si le point O est sur une droite passant par C, le maximum du produit des trois segments aura lieu au point d'intersection avec la parallèle à AB menée par le centre de gravité.

5° Si le point O est sur une droite parallèle à AB, le maximum du produit des trois segments aura lieu au point d'intersection avec la droite joignant C au centre de gravité.

6° Le produit des trois segments sera maximum lorsque O sera au centre de gravité et aura pour valeur $\frac{abc}{27}$.

Pour terminer cette étude, nous énoncerons la propriété suivante :

Dans un triangle, si l'on joint le centre du cercle inscrit aux pieds des trois bissectrices extérieures, on a trois droites telles que si d'un de leurs points on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les longueurs de ces trois perpendiculaires forment une progression arithmétique.

UN LIEU GÉOMÉTRIQUE

Le problème que nous nous proposons n'est pas nouveau; on en a déjà donné la solution par des considérations de simple géométrie; nous n'avons d'autre but que de montrer une fois de plus comment l'emploi raisonné des méthodes de la géométrie cartésienne peut conduire à des constructions géométriques assez élégantes, sans aucun tour de force, en ne se servant que des formules les plus connues.

L'équation générale des coniques (axes rectangulaires) qui ont pour directrice une droite donnée oy est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda x^2 = 0\,;$$

si on assujettit ces courbes à toucher les deux droites

$$px + qy - 1 = 0, \text{ et } p'x + q'y - 1 = 0,$$

on trouve sans peine les deux conditions

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + A)B - C^2 &= 0\\ (\lambda + A')B' - C'^2 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où l'on a posé $\quad A = p^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2p\alpha + 1$

$$B = q^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q\beta + 1$$
$$C = pq(\alpha^2 + \beta^2) - q\alpha - p\beta$$
$$A' = p'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2p'\alpha + 1$$
$$B' = q'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q'\beta + 1$$
$$C' = p'q'(\alpha^2 + \beta^2) - q'\alpha - p'\beta$$

Or on trouve, en effectuant les opérations, que

$$A \, . \, B - C^2 = (p\alpha + q\beta - 1)^2$$
$$A' \, . \, B' - C'^2 = (p'\alpha + q'\beta - 1)^2$$

de sorte que l'élimination de λ entre les équations (1) nous donne, pour le lieu du foyer conjugué à la directrice donnée, l'équation

$$[q^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q\beta + 1]\,(p'\alpha + q'\beta - 1)^2 - [q'^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2q'\beta + 1]\,(p\alpha + q\beta - 1)^2 = 0$$

c'est le lieu que nous nous proposons d'étudier d'après son équation.

Pour donner aux diverses lettres une signification uniforme, je veux dire, pour que toutes les lettres indiquent des longueurs, je pose

$$p = \frac{1}{a}, \; q = \frac{1}{b}, \; p' = \frac{1}{a'}, \; q' = \frac{1}{b'},$$

et l'équation du lieu, en reprenant pour les coordonnées mobiles la notation habituelle, sera

$$(\mathrm{U}) \quad a^2(x^2 + y^2 - 2by + b^2)\,(b'x + a'y - a'b')^2 - a'^2(x^2 + y^2 - 2b'y + b'^2)\,(bx + ay - ab)^2 = 0$$

que nous écrirons sommairement

$$a^2 . \mathrm{C} . \mathrm{T}'^2 - a'^2\mathrm{C}' . \mathrm{T}^2 = 0;$$

or, soit

$$\mathrm{C} = (y - b)^2 + x^2 = (y - b + ix)\,(y - b - ix) = \mathrm{I} \, . \, \mathrm{J}$$

et

$$\mathrm{C}' = (y - b')^2 + x^2 = (y - b' + ix)\,(y - b' - ix) = \mathrm{I}' \, . \, \mathrm{J}'$$

et l'équation du lieu devient

$$a^2.\mathrm{I}.\mathrm{J}.\mathrm{T}'^2 - a'^2.\mathrm{I}'.\mathrm{J}'.\mathrm{T}^2 = 0$$

ce qui nous montre immédiatement que le point de concours S des deux tangentes fixes est un point double du lieu; mais les deux droites I, J se croisent sur la directrice donnée en son point de rencontre B avec la tangente T; de même les droites I', J' se croisent sur la directrice donnée en son point de rencontre B' avec la tangente T'; d'où l'on con-

clut immédiatement que les points B et B' sont aussi des points doubles du lieu total.

Mais les directions asymptotiques du lieu total sont fournies par l'équation

$$(x^2 + y^2)\,[a^2\,(b'x + a'y)^2 - a'^2\,(bx + ay)^2] = 0$$

ou bien $\quad (x^2 + y^2)\,.\,x\left[\dfrac{bx + ay}{a} + \dfrac{b'x + a'y}{a'}\right] = 0$

ou bien

$$(x^2+y^2)\left[\frac{bx+ay}{a} - \frac{b'x + a'y}{a'}\right]\left[\frac{bx + ay}{a} + \frac{b'x + a'y}{a'}\right]=0$$

ce sont donc : 1° les deux directions asymptotiques de tous les cercles du plan; 2° la directrice donnée; 3° la médiane SG du triangle BSB'; nous voyons donc que la directrice donnée a cinq points sur le lieu géométrique; donc elle en constitue une branche séparée, et, après avoir enlevé cette branche, il restera une courbe du troisième degré qui a pour points simples les points B et B', qui a encore pour point double le point S; et ses directions asymptotiques sont la médiane SG et les deux directions asymptotiques de toute circonférence.

Voyons à déterminer une construction continue du lieu : soit $T = \lambda T'$, il vient

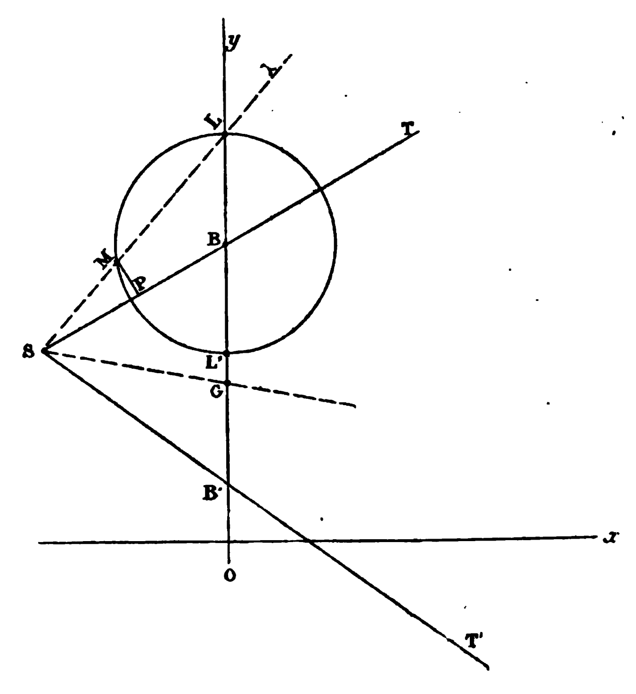
$$a^2(x^2 + y^2 - 2by + b^2) - \lambda^2 a'^2\,(x^2 + y^2 - 2b'y + b'^2) = 0$$

ce qui donne l'intersection d'une droite menée à volonté par le point S avec une circonférence; or on voit sans peine que cette circonférence passe au point L où la droite mobile coupe *oy*; si donc on construit L' conjugué de L relativement au segment BB', la circonférence est décrite sur LL' comme diamètre; on peut donc formuler comme il suit la construction géométrique du lieu total :

Par le point S, menez une transversale à volonté Sλ qui coupe *oy* en un point L; et prenez L' conjugué de L relativement au segment BB'; la circonférence décrite sur LL comme diamètre coupera Sλ en deux points L et M; le lieu de ces deux points est le lieu total du quatrième ordre, qui se compose de la droite *oy* et d'une cubique que décrira le point M.

Cette construction donne sans peine les tangentes au point

double S; car lorsque la circonférence mobile passera au point S, Sλ devra être également inclinée sur SB et sur SB′; donc les tangentes au point double S sont deux droites



rectangulaires entre elles, et bissectrices des deux droites fixes SB, SB′; ce nouveau fait, joint à ceux qui sont déjà établis, permet d'affirmer que la cubique actuelle est une *focale à nœud* de Quételet.

Remarque. — L'équation du lieu (U) peut s'écrire :

$$a^2 \,.\, \overline{MB}^2 \,.\, \overline{MP'}^2 \,.\, \overline{A'B'}^2 = a'^2 \,.\, \overline{MB'}^2 \,.\, \overline{MP}^2 \,.\, \overline{AB}^2$$

ou

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{MP}{MP'} \cdot \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{a'}{a}.$$

Cette relation conduit, en sens inverse, à la construction du lieu par l'intersection d'une droite et d'un cercle; car se donner arbitrairement $\frac{MP}{MP'}$, c'est se donner une droite

Sλ, d'où résulte le rapport $\frac{MB}{MB'}$ qui détermine la circonférence correspondante.

Autre remarque. — On voit, par l'exemple qui précède, que l'étude d'un lieu géométrique, même décomposable, se peut faire simplement sur le lieu total, plus simplement même que si l'on effectuait d'abord la décomposition; cela tient sans doute à ce que l'équation totale obtenue par des méthodes d'élimination correctes et générales, garde, dans sa forme première, comme l'image algébrique des propriétés et du mode de génération le plus élégant de la courbe.

On rencontre d'ailleurs bien souvent des faits de même nature; c'est ainsi, par exemple, que pour construire les racines d'une équation du troisième degré, on trouve utile de l'élever au quatrième degré par l'introduction d'une racine convenablement choisie; ce qui permet de construire les racines par l'intersection d'une parabole et d'une circonférence; c'est ainsi encore que la détermination des trois sommets du triangle polaire conjugué commun à deux coniques dépend de l'intersection de deux coniques que l'on fait passer chacune par un même quatrième point pris à volonté sur le plan.

E. V.

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Par M. A. Parpaite.

Les différentes formes du reste données généralement dans les cours sont des conséquences de la formule

$$R = \frac{(1-\theta)^{n-p}\,h^n}{\overline{n-1}!\,p} f^n(x+\theta h).$$

Il est aisé de faire voir que celle-ci n'est qu'un cas très particulier d'une autre extrêmement générale.

Posons

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{\overline{n-1}!} f^{n-1}(x) - P\varphi(h) = 0 \qquad (1)$$

x et $x + h$ sont deux valeurs prises entre les limites a, b entre lesquelles $f(x)$ et ses n premières dérivées sont continues; $\varphi(h)$ est une fonction continue de h ainsi que sa dérivée entre les limites où h se trouve compris, $\varphi(h)$ est en outre assujettie à la condition $\varphi(o) = o$; P est une certaine fonction de x et de h à déterminer pour que l'égalité (1) ait lieu.

Remplaçons h par $x_1 - x$ dans (1); nous avons

$$f(x_1) - f(x) - (x_1 - x) f_1(x) - \ldots$$
$$- \frac{(x_1 - x)^{n-1}}{n - 1!} f^{n-1}(x) - \mathrm{P}\varphi(x_1 - x) = o. \quad (2)$$

Mettons partout, *excepté dans* P, z au lieu de x et faisons varier z, la fonction

$$\mathrm{F}(z) = f(x_1) - f(z) - (x_1 - z) f'(z) - \ldots$$
$$- \frac{(x_1 - z)^{n-1}}{n - 1!} f^{n-1}(z) - \mathrm{P}\varphi(x_1 - z) \quad (3)$$

est nulle pour $z = x$ ainsi que pour $z = x_1$, dans l'intervalle elle est continue; il en est de même de sa dérivée; donc il existe au moins une valeur intermédiaire de z, $x + \theta(x_1 - x)$ qui annule $\mathrm{F}'(z)$, θ étant un nombre compris entre o et 1. Portons cette valeur de z dans la dérivée:

$$\mathrm{F}'(z) = - \frac{(x_1 - z)^{n-1}}{n - 1!} f^n(z) + \mathrm{P}\varphi'(x_1 - z);$$

on déduira

$$\mathrm{P} = \frac{(1 - \theta)^{n-1} (x_1 - x)^{n-1}}{n - 1!} \, \frac{f^n[x + \theta(x_1 - x)]}{\varphi_1[(1 - \theta)(x_1 - x)]}$$

d'où en remplaçant x_1 par $x + h$

$$\mathrm{R} = \frac{(1 - \theta)\, h^{n-1} \varphi(h)}{n - 1!\, \varphi'[(1 - \theta)h]} f^n(x + \theta h). \quad (4)$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Il est à peine besoin de faire remarquer que si nous posons $\varphi(h) = h^p$

la formule (4) devient

$$\mathrm{R} = \frac{(1 - \theta)^{n-p} h^n}{n - 1!\, p} f^n(x + \theta h)$$

qui est la formule de M. Schlomilch.

Si l'on pose $\varphi(h) = \mathrm{L}(1 + h)$ ou $\sin kh$, etc., on déduira autant de formes du reste qu'on voudra.

CONCOURS D'AGRÉGATION 1881

Solution par M. Levavasseur, élève au Lycée Charlemagne.

On donne un ellipsoïde. On considère des droites D *telles que si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact,* M *et* M', *soient dans un même plan. 1° Démontrer que la droite* D *et la droite des contacts* MM' *sont rectangulaires. 2° Trouver le lieu des droites* D *qui passent par un point donné* A. *3° Ce lieu est un cône du second degré. Trouver le lieu des positions du point* A *pour lesquelles ce cône est de révolution. 4° Trouver l'enveloppe* C *des droites* D *qui sont contenues dans un plan donné* P, *et trouver la surface* S *engendrée par* C *quand* P *se déplace parallèlement à un plan donné* Q. *5° Trouver pour quelle direction de* Q *la surface* S *est de révolution.*

1° Géométriquement, cette propriété est évidente : considérons en effet le plan des deux normales ; il est perpendiculaire à chacun des plans tangents, donc perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la droite D. La droite MM' qui est dans le plan des deux normales est donc bien perpendiculaire à la droite D.

On peut le démontrer analytiquement de la manière suivante : soient x', y', z' les coordonnées du point M; x'', y'', z'' celles du point M'. La normale au point M à l'ellipsoïde a pour équations $\dfrac{a^2(x-x')}{x'} = \dfrac{b^2(y-y')}{y'} = \dfrac{c^2(z-z')}{z'}$;

ou bien
$$a^2z'x = c^2x'z + (a^2 - c^2)z'x' ;$$
$$b^2z'y = c^2y'z + (b^2 - c^2)y'z'.$$

Un plan passant par cette normale aura pour équation
$$a^2z'x - c^2x'z - (a^2 - c^2)z'x' + \lambda\,[b^2z'y - c^2y'z - (b^2 - c^2)y'z'] = 0. \qquad (A)$$

Les équations de la normale au point M' sont
$$x = \frac{c^2x''}{a^2z''}z + \frac{(a^2 - c^2)x''}{a^2};\ y = \frac{c^2y''}{b^2z''}z + \frac{(b^2 - c^2)}{b^2}y''.$$

Pour qu'un plan $Ax + By + Cz + D = o$ passe par la droite $x = az + p$, $y = bz + q$, il faut que l'on ait $Aa + Bb + C = o$ et $Ap + Bq + D = o$, c'est-à-dire que pour que le plan (A) passe par la normale au point M', on doit avoir $x^2z' \dfrac{c^2x''}{a^2z''} + \lambda b^2z' \dfrac{c^2y''}{b^2z''} - c^2(x' + \lambda y') = o$

ou
$$\lambda = \frac{z'x'' - z''x'}{y'z'' - y''z'} \qquad (1)$$

et
$$a^2z' \frac{(a^2 - c^2)x''}{a^2} + \lambda b^2z' \frac{(b^2 - c^2)y''}{b^2}$$
$$- z'z[(a^2 - c^2)x + \lambda(b^2 - c^2)y'] = o$$

ou
$$(a^2 - c^2)(x'' - x') + \lambda(b^2 - c^2)(y'' - y') = o \qquad (2)$$

En éliminant λ entre les relations (1) et (2), on trouve la condition que doivent remplir les coordonnées des points M et M' pour que les normales en ces points à l'ellipsoïde se rencontrent, savoir :

$$(a^2 - c^2)(x' - x'')(y''z' - y'z'')$$
$$+ (b^2 - c^2)(y' - y'')(z''x' - z'x'') = o. \qquad (B)$$

Les équations de la droite D sont

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = o;$$
$$\frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} + \frac{zz''}{c^2} - 1 = o,$$

ou, sous forme réduite

$$\frac{x}{a^2}(x'y'' - x''y') + \frac{z}{c^2}(y''z' - z''y') = y'' - y',$$

et
$$\frac{y}{b^2}(x'y' - x'y'') + \frac{z}{c^2}(z'x'' - z''x') = x'' - x'. \qquad (H)$$

Les conditions de perpendicularité de cette droite avec le plan (A) exigent d'abord que l'on ait

$$\lambda \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \, \frac{z'x'' - z''x'}{y'z'' - y''z'}.$$

Ainsi nous retrouvons pour λ la même valeur qu'en exprimant que le plan (A) passe par la normale en M' à l'ellipsoïde. La deuxième condition est satisfaite d'elle-même, car $x'(y'z'' - y''z') + y'(z'x'' - z''x') + z'(x'y'' - x''y')$ est identiquement nul.

2° Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe A. Les équations des droites D sont alors

$$\frac{x - x_0}{a^2}(x'y'' - x''y') + \frac{z - z_0}{c^2}(y''z' - z''y') = 0 ;$$

$$\frac{y - y_0}{b^2}(x''y' - x'y'') + \frac{z - z_0}{c^2}(z'x'' - z''x') = 0$$

ou bien $$\frac{y''z' - z''y'}{\dfrac{x - x_0}{a^2}} = \frac{x''y' - x'y''}{\dfrac{z - z_0}{c^2}} = \frac{z''x' - z'x''}{\dfrac{y - y_0}{b^2}}.$$

On a d'ailleurs d'après les équations (H) de la droite D

$$\frac{x' - x''}{y' - y''} = \frac{\dfrac{x_0}{a^2}(x'y'' - x''y') + \dfrac{z_0}{c^2}(y''z' - y'z'')}{\dfrac{y_0}{b^2}(x''y' - x'y'') + \dfrac{z_0}{c^2}(z'x'' - z''x')}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\,\frac{z_0x - zx_0}{y_0z - yz_0}.$$

Donc, en tenant compte de la condition (B), le lieu de la droite D est le cône du second degré

$$(a^2 - c^2)(x - x_0)(yz_0 - zy_0) + (b^2 - c^2)(y - y_0)(zx_0 - xz_0) = 0.$$

On peut écrire l'équation de ce cône comme il suit :

$$(a^2 - b^2)z_0(x - x_0)(y - y_0) + (b^2 - c^2)x_0(y - y_0)(z - z_0)$$
$$+ (c^2 - a^2)y_0(z - z_0)(x - x_0) = 0.$$

Il en résulte que le lieu est le cône qui passe par les six normales menées du point A à l'ellipsoïde. C'est donc un cône trirectangle passant par l'origine.

3° Pour que ce cône soit de révolution, comme les coefficients des termes en x^2, en y^2 et en z^2 sont nuls, la condition

$$\mathrm{A} - \frac{\mathrm{B'B''}}{\mathrm{B}} = \mathrm{A'} - \frac{\mathrm{B''B}}{\mathrm{B'}} = \mathrm{A''} - \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{B''}}$$

devient

$$\frac{\mathrm{B'B''}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B''B}}{\mathrm{B'}} = \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{B''}}$$

ou

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{B'}^2 = \mathrm{B''}^2.$$

On doit donc avoir

$$(b^2 - c^2)^2x_0^2 = (c^2 - a^2)^2y_0^2 = (a^2 - b^2)^2z_0^2,$$

ce qui donne, si l'on considère x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, quatre droites issues de l'origine.

4° Soient $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation d'un plan quel-

conque P, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point de ce plan. On a $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Les droites D du plan P qui passent par un point donné x_0, y_0, z_0 de ce plan, sont à l'intersection du plan P avec le cône des six normales issues du point considéré à l'ellipsoïde. L'équation du cône est $(a^2 - c^2)(x - x_0)(yz_0 - zy_0) + (b^2 - c^2)(y - y_0)(zx_0 - xz_0) = 0$. D'ailleurs

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C} \text{ et } z_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + D}{C}.$$

Par conséquent l'équation de la projection du système des deux droites D considérées sur le plan des xy sera

$$(a^2 - c^2)(x - x_0)[y_0(Ax + By + D) - y(Ax_0 + By_0 + D)]$$
$$+ (b^2 - c^2)(y - y_0)[x(Ax_0 + By_0 + D) - x_0(Ax + By + D)]$$
$$= 0$$

ou $(a^2 - c^2)(x - x_0)[Ax(y_0 - y) + Ay(x - x_0) + D(y_0 - y)]$
$+ (b^2 - c^2)[Bx(y_0 - y) + By(x - x_0) + D(x - x_0)] = 0$
ou enfin

$$(a^2 - c^2)Ay(x - x_0)^2 + (c^2 - b^2)Bx(y - y_0)^2 - [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - (b^2 - a^2)D](x - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Prenons les dérivées partielles de ces équations par rapport aux binômes $y - y_0$, $x - x_0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2(a^2 - c^2)Ay(x - x_0) \\ = [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - (b^2 - a^2)D](y - y_0); \\ 2(c^2 - b^2)Bx(y - y_0) \\ = [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - (b^2 - a^2)D](x - x_0). \end{array}\right.$$

Multiplions membre à membre et nous aurons pour les équations de l'enveloppe

$$4(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)AB\,xy = [a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By - b^2 - a^2)D]^2 \text{ avec } Ax + By + Cz + D = 0.$$

L'enveloppe est donc une parabole. L'équation générale d'un plan parallèle au point Q étant $Ax + By + Cz + \lambda = 0$, pour avoir l'équation de la surface engendrée par la parabole enveloppe des droites D lorsque P se déplace parallèlement au plan Q, il suffira d'éliminer le paramètre variable D entre l'équation de la parabole et du plan P. Cette surface a donc pour équation

$$4(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)AB\,xy$$
$$= [(a^2 - c^2)Ax + (c^2 - b^2)By + (b^2 - a^2)(Ax + By + Cz)]^2$$

ou
$$4(a^2-c^2)(c^2-b^2)\,\mathrm{AB}xy = [(b^2-c^2)\mathrm{A}x+(c^2-a^2)\mathrm{B}y+(b^2-a^2)\mathrm{C}z]^2.$$

Cette équation représente un cône du second degré ayant pour sommet l'origine et tangent aux plans de coordonnées, tout le long des droites

$(c^2-a^2)\mathrm{B}y+(b^2-a^2)\mathrm{C}z=0$, pour l'un;

$(b^2-c^2)\mathrm{A}x+(b^2-a^2)\mathrm{C}z=0$, pour l'autre;

$(b^2-c^2)\mathrm{A}x+(c^2-a^2)\mathrm{B}y=0$, pour le troisième.

5° Enfin les conditions qui doivent exister entre A, B, C pour que le cône soit de révolution sont
$$(b^2-c^2)^2\mathrm{A}^2=(c^2-a^2)\mathrm{B}^2=(b^2-a^2)^2\mathrm{C}^2.$$

REMARQUES. — I. Considérons toutes les droites D qui passent par un point fixe A, et parmi ces droites, situées sur le cône des six normales issues de A, considérons-en une extérieure à l'ellipsoïde. Soit δ sa trace sur le plan polaire du point A par rapport à l'ellipsoïde. Si je joins δ aux points M et M', les deux droites δM et δM' seront tangentes à la section faite dans l'ellipsoïde par le plan polaire de A. Donc la droite MM' ou Δ est la polaire du point δ par rapport à l'ellipse e. Il en résulte que tous les plans passant par D auront leur pôle sur Δ et que tous les plans passant par Δ auront leur pôle sur D (*).

Considérons maintenant une droite (D) passant par le point A, et coupant l'ellipsoïde. La droite Δ est toujours la polaire de δ. Elle est alors extérieure à l'ellipsoïde. Puisque tout plan passant par Δ a son pôle sur D, les plans tangents à l'ellipsoïde menés par Δ auront pour points de contact les points N et N' où la droite D coupe l'ellipsoïde, de sorte que les rôles sont renversés, que la droite D joue le rôle de Δ et inversement; d'où les conclusions suivantes :

1° Lorsque les droites D sont assujetties à passer par un point fixe A, et à rester, comme nous l'avons montré, sur le cône des six normales correspondant à ce point, les droites Δ sont assujetties à rester dans un plan fixe, le plan polaire de A, et leur enveloppe dans ce plan est une parabole.

2° Lorsque les droites D sont assujetties à rester dans un

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

plan fixe P tangentiellement à la parabole que nous avons déterminée, les droites Δ sont toutes sur le cône des six normales qui a pour sommet le pôle du plan P par rapport à l'ellipsoïde.

II. Si l'ellipsoïde donné était de révolution, si l'on avait $a = b$, ou $b = c$, ou $c = a$, le lieu des droites D passant par un point donné serait un système de deux plans.

Si l'on supposait à la fois $a = b = c$, la condition (B) est remplie quelle que soit la droite D prise dans l'espace. Dans une sphère, en effet, toutes les normales à la surface se rencontrent au même point, le centre.

Dans un ellipsoïde de révolution, toutes les normales rencontrent l'axe. Deux normales ne peuvent se rencontrer qu'en un point de l'axe; les droites Δ et les droites D sont donc assujetties à être dans des plans perpendiculaires à l'axe, ce qui démontre que les droites D passant par un point fixe sont toutes dans le plan perpendiculaire à l'axe et passant par ce point.

Nota. — Nous avons reçu également une solution de ce même problème par M. Cadot, élève au Lycée Saint-Louis.

QUESTION 2

Solution par M. Kœhler.

Deux paraboles variables sont assujetties : 1° à avoir leurs axes parallèles et à une distance donnée l'un de l'autre; 2° à se couper orthogonalement en deux points.

Trouver l'aire minima comprise entre les deux courbes.

Soit $y^2 = 2px$ l'une des paraboles; b étant la distance des deux axes, l'autre aura pour équation $(y - b)^2 = 2q(x - \alpha)$. Les ordonnées des points communs sont données par

$$y^2(p - q) - 2bpy + p(b^2 + 2q\alpha) = 0. \qquad (1)$$

Les coefficients angulaires des tangentes en un des points d'intersection sont $\frac{p}{y}$ et $\frac{q}{y - b}$; pour que les paraboles

soient orthogonales, on doit avoir la relation

$$y^2 - by + pq = 0. \qquad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) qui doivent avoir les mêmes racines donne

$$q = -p, \quad \alpha = \frac{b^2 + 2p^2}{2p}.$$

L'équation de la seconde parabole devient alors

$$y^2 - 2by + 2px - 2p^2 = 0\,;$$

p doit être considéré comme un paramètre variable, et nous allons le déterminer de telle sorte que l'aire comprise entre les deux courbes soit minima.

L'équation de la corde commune est

$$by - 2px + p^2 = 0.$$

Sa longueur se calcule facilement et a pour expression

$$c = \frac{4p^2 + b^2}{2p}.$$

Les pôles de la corde sont

$\alpha_1 = -\frac{p}{2}$, $\beta_1 = \frac{b}{2}$, par rapport à la première parabole.

$\alpha_2 = \frac{b^2 + 3p^2}{2p}$, $\beta_2 = \frac{b}{2}$, par rapport à la deuxième.

Chacun de ces pôles est distant de la corde commune d'une longueur $h = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4p^2}$. On en conclut que l'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est $\frac{4(p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{4p}$, et l'aire comprise entre les deux paraboles est

$$S = \frac{1}{6p}(4p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette expression est minimum quand on prend $p = \frac{b}{2\sqrt{2}}$ et la valeur de S est alors $\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$.

QUESTION 15 *bis*.

Solution par M. Toqué, élève du Lycée Charlemagne.

Équation du cône ayant pour sommet le centre d'une surface de deuxième ordre et admettant pour génératrices les trois axes de coordonnées rectangulaires et les trois axes de la surface.

Comme le cône contient les trois axes de coordonnées, son équation est de la forme

$$byz + b'zx + b''xy = 0. \quad [1]$$

Soient $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$, $\frac{x}{\alpha_2} = \frac{y}{\beta_2} = \frac{z}{\gamma_2}$, $\frac{x}{\alpha_3} = \frac{y}{\beta_3} = \frac{z}{\gamma_3}$ les trois axes de la surface; pour exprimer qu'ils sont sur le cône, il suffit d'exprimer qu'il y en a deux sur le cône, ce qui donne

$$b\beta_1\gamma_1 + b'\gamma_1\alpha_1 + b''\alpha_1\beta_1 = 0 \quad [2]$$
$$b\beta_2\gamma_2 + b'\gamma_2\alpha_2 + b''\alpha_2\beta_2 = 0 \quad [3]$$

Soit $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 1$ l'équation de la surface.

Posant $\lambda = A - \frac{B'B''}{B}$, $\lambda' = A' - \frac{B''B}{B'}$, $\lambda'' = A'' - \frac{BB'}{B''}$, on sait qu'on a

$$\frac{\alpha_1}{\frac{1}{B(\lambda - S_1)}} = \frac{\beta_1}{\frac{1}{B'(\lambda' - S_1)}} = \frac{\gamma_1}{\frac{1}{B''(\lambda'' - S_1)}},$$

en désignant par S_1 la racine de l'équation en S correspondant à $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

Remplaçant dans (2) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ par ces quantités proportionnelles, on a

$$\frac{b}{B'B''(\lambda' - S_1)(\lambda'' - S_1)} + \frac{b'}{B''B(\lambda'' - S)(\lambda - S_1)} + \frac{b''}{BB'(\lambda - S_1)(\lambda' - S_1)} = 0,$$

ou $\quad Bb(\lambda - S_1) + B'b'(\lambda' - S_1) + B''b''(\lambda'' - S_1) = 0. \quad [4]$

On a de même

$$Bb(\lambda - S_2) + B'b'(\lambda' - S_2) + B''b''(\lambda'' - S_2) = 0. \quad [5]$$

Par soustraction, on déduit $(S_1 - S_2)(Bb + B'b' + B''b'') = 0$. D'ailleurs $S_1 \gtrless S_2$, sans quoi la surface proposée serait de révolution, ce qu'on ne suppose pas.

On a donc $\qquad Bb + B'b' + B''b'' = 0, \qquad$ [6]

(4) devient $\qquad B\lambda b + B'\lambda' b' + B''\lambda'' b'' = 0. \qquad$ [7]

On en déduit

$$\frac{b}{B'B''(\lambda' - \lambda'')} = \frac{b'}{B''B(\lambda'' - \lambda)} = \frac{b''}{BB'(\lambda - \lambda')}.$$

Finalement l'équation demandée est donc

$$\frac{B'B''(\lambda' - \lambda'')}{x} + \frac{B''B(\lambda'' - \lambda)}{y} + \frac{BB'(\lambda - \lambda')}{z} = 0$$

QUESTION 16 *bis*.

Solution par M. Toqué, élève du Lycée Charlemagne.

Ayant posé.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = P_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = P_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = P_3 \end{cases} \begin{cases} x + a_2y + a_3z = Q_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z = Q_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z = Q_3 \end{cases} \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

supposant que $\delta \gtrless 0$, *démontrer que les deux ellipsoïdes*

$$\left.\begin{matrix} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1 \\ Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1 \end{matrix}\right\} \textit{sont égaux.}$$

Il s'agit de démontrer que les axes de ces deux ellipsoïdes sont deux à deux égaux. Or, on sait que a,b,c étant les axes du premier, S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation en S_1, on a $\dfrac{a^2}{\frac{1}{S_1}} = \dfrac{b^2}{\frac{1}{S_2}} = \dfrac{c^2}{\frac{1}{S_3}} = 1$. De même, a', b', c' étant les axes du deuxième, S'_1, S'_2, S'_3 les racines de l'équation en S corrrespondante, on a $\dfrac{a'^2}{\frac{1}{S'_1}} = \dfrac{b'^2}{\frac{1}{S'_2}} = \dfrac{c'^2}{\frac{1}{S'_3}} = 1$.

Si nous pouvons démontrer que les deux équations en S ont les mêmes racines, il en résultera bien que les axes sont égaux. D'ailleurs, le coefficient de S^3 étant 1 pour les deux, il s'agit de montrer que les coefficients sont deux à deux égaux.

Les équations des deux ellipsoïdes sont

$$x^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+y^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+z^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$$
$$+2yz(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)+2zx(c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3)$$
$$+2xy(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=1. \qquad [1]$$

$$x^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+y^2(a_2^2+b_2^2+c_2^2)+z^2(a_3^2+b_3^2+c_3^2)$$
$$+2yz(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)+2zx(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1)$$
$$+2xy(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)=1. \qquad [2]$$

Pour abréger, écrivons ces équations sous la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=1. \qquad [1]$$
$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=1. \qquad [2]$$

Les équations en S correspondantes sont

$$S^3-(A+A'+A'')S^2+(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)$$
$$-\Delta=0.$$
$$S^3-(a+a'+a'')S^2+(a'a''+a''a+aa'-b^2-b'^2-b''^2)$$
$$-\Delta'=0.$$

On a d'abord $A+A'+A''=a+a'+a''$.

$$A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$(c_1^2+c_2^2+c_3^2)+(c_1^2+c_2^2+c_3^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$$
$$+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2$$
$$-(c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3)^2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

Appliquant l'identité de Lagrange, on a

$$A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2$$
$$\left.\begin{matrix}=(b_1c_2-c_1b_2)^2+(b_1c_3-c_1b_3)^2+(b_2c_3-c_2b_3)^2\\+(c_1a_2-a_1c_2)^2+(c_2a_3-a_2c_3)^2+(c_3a_1-a_2c_1)^2\\+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2\end{matrix}\right\}=\Sigma(a_1b_2-b_1a_2)^2$$

En calculant $a'a''+a''a+aa'-b^2-b'^2-b''^2=0$, on trouve la même valeur $\Sigma(a_1b_2-b_1a_2)^2$.

Enfin calculons le terme tout connu,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2, & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3, & c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3, & b_1^2+b_2^2+b_3^2, & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3, & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3, & c_1^2+c_2^2+c_3^2\end{vmatrix}$$

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_2^2+b_2^2+c_2^2, & a_3a_2+b_3b_2+c_3c_2\\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3, & a_3^2+b_3^2+c_3^2\end{vmatrix}$$

Δ et Δ' ne sont autre chose que le carré du déterminant δ : donc ils sont égaux. Par suite, les équations en S sont iden-

tiques ; pour les deux surfaces on a

$$S^3 - (\Sigma a_1^2) S^2 + \Sigma (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 S - \delta^2 = 0.$$

NOTA. — Les mêmes questions ont été résolues par MM. Griffon, à Montpellier ; Thérel, à Versailles.

QUESTION 355

Solution par M Quiquet, élève au Lycée de Lille.

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0 \qquad (1)$$

pour que la somme de trois des racines soit égale à la somme des trois autres.

Formons les deux équations du troisième degré qui admettent, pour racines, la première trois racines de (1), la seconde les trois autres, et écrivons-les sous la forme :

$$x^3 + lx^2 + mx + n = 0$$
$$x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu = 0.$$

On a donc identiquement :

$$x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U$$
$$= (x^3 + lx^2 + mx + n)(x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu)$$

d'où les relations

$$P = l + \lambda$$
$$Q = l\lambda + m + \mu$$
$$R = l\mu + m\lambda + n + \nu$$
$$S = l\nu + n\lambda + m\mu$$
$$T = m\nu + n\mu$$
$$U = n\nu.$$

Pour que la somme de trois des racines de (1) soit égale à la somme des trois autres, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer l et λ, de telle manière que l'on ait $l = \lambda$.

La condition nécessaire et suffisante cherchée s'obtiendra donc en éliminant $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, entre cette dernière relation et les six précédentes.

Posons : $\qquad l = \lambda = L$

d'où
$$P = 2L$$
$$Q = L^2 + m + \mu$$
$$R = L(m + \mu) + n + \nu$$
$$S = L(n + \nu) + m\mu$$
$$T = m\nu + n\mu$$
$$U = n\nu$$

et, en introduisant des fonctions connues des paramètres de (1), M, N, V, on tire de là :

$$L = \frac{P}{2}$$
$$m + \mu = Q - L^2 = M$$
$$n + \nu = R - LM = N$$
$$m\mu = S - LN = V.$$

Remarquant d'ailleurs l'identité :

$$(m\nu + n\mu)[(m + \mu)(n + \nu) - (m\nu + n\mu)] = n\nu(m + \mu)^2 + m\mu(n + \nu)^2 - 4mn\mu\nu$$

l'élimination se fait immédiatement et donne pour le résultat demandé $T(MN - T) = UM^2 + VN^2 - 4UV.$

On peut remarquer que les quantités $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, s'obtiennent par des équations du premier et du second degré, en fonction des coefficients de (1). Cette remarque peut servir à abaisser le degré d'une équation telle que (1), lorsque la condition ci-dessus est satisfaite.

NOTE SUR LA QUESTION 42

Le problème résolu à la page 69 du numéro de mars 1883, question 42, doit, sans peine, être généralisé de la manière suivante :

D'un point fixe O comme centre, décrivez une circonférence de rayon arbitraire, et menez-lui des tangentes par un point fixe A et par un point fixe B; ces deux couples de tangentes se coupent en quatre points M; le lieu de ces points M, quand varie le rayon de la circonférence, est une courbe bien connue qui se nomme la *Focale à nœud* de Quételet; M. *Chasles* en parle dans un de ses mémoires bien connus; c'est aussi le lieu des points de contact des tangentes menées

d'un point fixe à une série de coniques homofocales, et c'est aussi la podaire d'un point fixe relativement à une parabole.

Cette remarque nous semble utile pour nos lecteurs qui peuvent s'exercer sur le problème ainsi posé, et y trouver l'occasion de développer leur sagacité algébrique ou géométrique.

E. V.

QUESTIONS PROPOSÉES

56. — Trouver le lieu des centres des cercles passant par le point de rebroussement d'une cardioïde, et tangente à la courbe en un autre point. Par le second point d'intersection de deux des cercles précédents, on mène une droite quelconque qui rencontre les deux cercles en A et A'. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et A' se coupent sur la cardioïde.

(*J. Kœhler.*)

57. — Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui ont pour asymptotes trois droites données, et l'enveloppe des tangentes de rebroussement.

(*J. Kœhler.*)

58. — On donne la courbe dont l'équation est

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0.$$

1° On propose d'abord de construire cette courbe C; 2° soit M un point quelconque de C; on joint OM, et on trace une droite Δ symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle des axes; cette droite Δ rencontre la perpendiculaire élevée au point M à la droite OM en un point I. Démontrer que le lieu géométrique de ce point I est une hyperbole équilatère; 3° sur OI, on prend OI' = MI. Démontrer que le lieu du point I' est un cercle.

(*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7254-2.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET

Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne

VAZEILLE

Directeur des études à l'école préparatoire de Sainte-Barbe

2e SÉRIE

TOME DEUXIÈME



Année 1883.

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

COMITÉ DE RÉDACTION

MM. BOURGET
DE LONGCHAMPS
VAZEILLE
MOREL
BOQUEL
COCHER

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

ÉTUDE

SUR DE NOUVEAUX POINTS REMARQUABLES DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. Émile **Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

NOTATIONS

A, B, C les sommets du triangle, a, b, c, p ses trois côtés et son demi-périmètre ;

r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits;

A', B', C', les points de contact de BC, AC, AB avec le cercle inscrit;

A'_a, B'_a, C'_a id. avec le cercle ex-inscrit tangent à BC;

A'_b, B', C' id. id. id. AC;

A', B'_c, C' id. id. id. AB;

h_a, h_b, h_c les trois hauteurs;

R, S le rayon du cercle circonscrit au triangle et sa surface.

L'axe des x sera CB et celui des y, CA;

ξ, η seront les coordonnées d'un point Θ du plan ;

La parallèle à CB menée par Θ coupera CA en A_c et BA en A_b

— BC — BC B_c BA B_a

— BA — CA C_a BC C_b

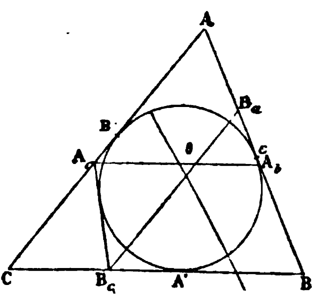
O, o, O_α, O_β, O_γ seront respectivement les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle;

G le centre de gravité.

Problème I. — *On sait que les six points* A_c, C_a, B_a, A_b, C_b, B_c, *intersections avec les côtés du triangle des parallèles à ces côtés menées par* Θ, *forment un hexagone circonscriptible à*

une conique; je vais déterminer les points pour lesquels cette conique est un cercle.

Dans ce cas ce cercle sera évidemment l'un des cercles inscrits ou ex-inscrits au triangle; il ne reste qu'à trouver les points Θ correspondants.



Cherchons le point θ_1, tel que la conique inscrite à l'hexagone soit le cercle inscrit au triangle.

Le point Θ_1 appartient au lieu des points obtenus en menant une tangente quelconque B_c A_c au cercle inscrit, puis par B_c une parallèle à AC et par A_c une parallèle à BC, et en prenant l'intersection de ces parallèles on a

$B_cA_c = B_cA' + A_cB' = CA' - x + CB' - y = 2(p-c) - x - y$

mais on a $\overline{A_cB_c}^2 = \overline{CB_c}^2 + \overline{CA_c}^2 - 2CB_cCA_c \cos C.$

L'équation du lieu est donc

$$[2(p-c) - x - y]^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos C.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(x - \frac{ab}{p}\right)\left(y - \frac{ab}{p}\right) - \frac{(p-a)(p-b)}{p^2} = 0. \quad (1)$$

L'examen de cette équation montre :

1° Que le lieu est une hyperbole;

2° Que le centre de la courbe est le point $\begin{cases} x = \dfrac{ab}{p} \\ y = \dfrac{ab}{p} \end{cases}$ symétrique de C par rapport au centre du cercle inscrit;

3° Que les asymptotes sont les droites $x = \dfrac{ab}{p}$, $y = \dfrac{ab}{p}$ parallèles respectivement à CA et à BC et tangentes au cercle inscrit;

4° Que la bissectrice de l'angle ACB est l'axe transverse de la courbe;

5° Que le lieu passe en A' et en B'.

Le point Θ_1 appartiendra évidemment aussi au lieu analogue construit dans l'angle CBA.

Ce lieu sera une hyperbole qui aura avec la précédente la droite $y = \frac{ab}{p}$ pour asymptote commune et le point A' pour point commun ; l'autre point commun à ces deux courbes et situé à distance finie sera le point Θ_1 cherché.

On trouve par une transformation facile de coordonnées que cette seconde hyperbole a pour équation

$$\left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{p-c}{p}\right) + \frac{b(p-a)(p-c)}{p^2} = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(x - \frac{ab}{p}\right) + \left(y - \frac{ab}{p}\right)\left(\frac{ab}{p} - a + \frac{ac}{p} + \frac{ay}{b}\right)$$
$$+ \frac{ab(p-a)(p-c)}{p^2} = 0. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire pour coordonnées du point Θ_1

$$\Theta_1 \left| \begin{aligned} x &= \frac{a(2b-p)}{p} = 2\frac{ab}{p} - a = \frac{a(3b-a-c)}{2p}, \\ y &= \frac{b(2a-p)}{p} = 2\frac{ab}{p} - b = \frac{b(3a-b-c)}{2p}. \end{aligned} \right.$$

Comme $\frac{ab}{2p}$ représente la valeur des coordonnées du centre du cercle inscrit, on conclut de ces valeurs une construction très simple du point Θ_1.

On voit aussi que si un côté égale le quart du périmètre, par exemple $a = \frac{p}{2}$, le point Θ_1 se trouvera en A'.

On a le théorème suivant :

Théorème I. — *Si dans un triangle un côté égale le quart du périmètre et que par le point de contact du cercle inscrit avec ce côté on mène des parallèles aux deux autres côtés, on formera un parallélogramme dont une des diagonales sera tangente au cercle inscrit.*

Des valeurs des coordonnées de Θ_1 on tire par soustraction

$$y - x = a - b,$$

ce qui prouve que le point Θ_1 est sur cette droite de facile construction ; comme il est aussi sur les droites analogues par rapport aux angles B et C, on peut le construire simplement, ce qui fournit le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient* a, b, c *les côtés d'un triangle rangés par ordre de grandeur croissante.*

Sur AC *et suivant la direction* AC *je prends* AI $= c - b$;

— CB — — CB — $CI_\gamma = b - a$;

— AB — — AB — $BI_\beta = a - c$.

Les trois droites menées par les points I_α, I_γ, I_β, *respectivement parallèles aux bissectrices des angles* CAB, ACB, ABC, *se coupent au même point.*

On calcule facilement

$$A_cA_b = \frac{2a(p-a)}{p},$$

$$B_cC_b = \frac{a(2a-p)}{p},$$

$$A_cB_c = \frac{c(p-c)-(a-b)^2}{p}.$$

On voit aussi que pour le point Θ_1 les trois segments CB_c, B_cC_b, C_bB sont respectivement proportionnels à

$$2b - p, \quad 2a - p, \quad 2c - p.$$

(A suivre.)

ÉQUATION

DU SYSTÈME DES TANGENTES MENÉES A UNE CONIQUE PAR UN POINT DONNÉ

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

$f(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la conique, (α, β, γ) le point donné, soit (x', y', z') le point de contact d'une tangente et (x, y, z) un point de cette droite ; désignons par X, Y, Z les demi-dérivées partielles de $f(x, y, z)$, puis par X', Y', Z' et X_1, Y_1, Z_1, ce qu'elles deviennent respectivement quand on y introduit les coordonnées (x', y', z') et (α, β, γ).

On a
$$\left\{\begin{array}{l} Xx' + Yy' + Zz' = 0, \\ X_1x' + Y_1y' + Z_1z' = 0, \\ X'x' + Y'y' + Z'z' = 0; \end{array}\right. \qquad (1)$$
donc, x' y' z' n'étant pas tous nuls, on a la condition
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que les équations
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda X + \mu X_1 + \nu X' = 0, \\ \lambda Y + \mu Y_1 + \nu Y' = 0, \\ \lambda Z + \mu Z_1 + \nu Z' = 0, \end{array}\right. \qquad (2)$$
sont satisfaites pour des valeurs non toutes nulles de λ, μ, ν. D'ailleurs elles n'admettent pas $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, si le discriminant de $f(x, y, z)$ est différent de zéro, puisque ces hypothèses les réduisent à $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, équations linéaires qui n'auraient pour solution que les valeurs nulles de x', y', z', leur déterminant n'étant pas nul.

Ainsi λ et μ ne sont pas nuls à la fois. Multiplions par x, y, z respectivement les équations (2) et ajoutons membre à membre; puis recommençons la même addition, après avoir multiplié par α, β, γ, il vient, en vertu d'identités connues:
$$\lambda f(x, y, z) + \mu \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma\right] = 0;$$
$$\lambda \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma\right] + \mu f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$
λ et μ n'étant pas nuls à la fois, il faut qu'on ait
$$f(x, y, z) f(\alpha, \beta, \gamma) - \left[x \frac{1}{2} f'_\alpha + y \frac{1}{2} f'_\beta + z \frac{1}{2} f'_\gamma\right]^2 = 0.$$

Réciproquement quand un point (x, y, z) satisfait à cette équation, le point (α, β, γ) est sur l'une des tangentes menées de (x, y, z) à la conique. Elle représente donc le système des deux tangentes menées de (α, β, γ).

Remarque. — Il est aisé d'appliquer la méthode à la recherche de l'équation du cône circonscrit à une quadrique et ayant un sommet donné. C'est un exercice que nous proposons aux jeunes lecteurs du Journal.

QUESTION 5

Solution par M. ALEXANDRE, élève de mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} \dots - x - 1 = 0$$

et montrer que cette équation, en dehors de la racine évidente $x = 1$, *n'a aucune racine réelle si* n *est impair et une seule racine négative si* n *est pair.* (G. L.)

En faisant passer dans le second membre tous les termes à partir du second, on a

$$nx^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 \qquad (1)$$

ou

$$nx^n = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \qquad (2)$$

En multipliant par $x - 1$, ce qui introduit la racine $x = 1$ qui sera alors double, on a

$$nx^{n+1} - (n + 1)\, x^n + 1 = 0. \qquad (3)$$

La dérivée

$$n(n + 1)x^n - n(n + 1)x^{n-1} = 0.$$

a pour racines $x = 1$ et $x = 0$, cette dernière d'ordre de multiplicité $(n - 1)$. L'équation proposée qui n'a pas d'autre racine positive que $x = 1$, aura au plus une racine négative, car si elle en avait deux, la dérivée aurait aussi une racine négative. A la substitution de $-\infty$ et de o dans (3) ne donnent des signes contraires que dans le cas où n est pair. Donc dans ce cas seulement (1) a une racine négative en plus de de la racine $x = 1$.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Lachesnais, au lycée Saint-Louis, P. Godefroy, à Lyon ; Mettetal, à Besançon.

QUESTION 7

Solution par M. GRIFFON, commis des bureaux de l'intendance militaire du 16e corps, Montpellier.

Trouver sans appliquer la règle de L'Hopital, la vraie valeur de l'expression

$$(1)\quad y = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \ldots - 2x - 1}{x-1}$$

pour $x = 1$. (G. L.)

Pour $x = 1$, y prend la forme $\frac{0}{0}$. Or le numérateur peut s'écrire

$$\Big[n + (n-1) + \ldots + 1\Big]x^{n-1}(-x\ 1)$$
$$+\Big[(n-1) + (n-2) + \ldots + 1\Big]x^{n-2}(x-1)$$
$$+ (3+2+1)x^2(x-1) + (2+1)x(x-1) + 1(x-1).$$

On y découvre le facteur $x - 1$; donc la valeur (1) peut s'écrire

$$y = \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \frac{(n-1)x}{2}x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$
$$x^{n-3} + \ldots + \frac{2.3}{2}x + \frac{1.2}{2}$$

et si on y fait $x = 1$

$$y = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \ldots + \frac{1.2}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. P. Godefroy, à Lyon; Mosnat, à Thiers; Alexandre, à Angers; Harang, école Saint-Sigisbert, à Nancy.

QUESTION 34

Solution par M. G. Forest, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

On considère deux points fixes O *et* O′ *et une droite* Δ *perpendiculaire à* OO′ *au point* A; *soit* M *un point quelconque de* Δ; *on mène* MO *et* MO′; *puis à la droite* MO′ *on élève au point* O′ *une perpendiculaire qui rencontre* OM *au point* M′; *on pose alors* M′O′ = x, MO′ = y, *et l'on considère un point* I *qui a pour coordonnées* x *et* y, *par rapport à un angle droit donné* yOx. *Trouver le lieu décrit par ce point* I *quand* M *se meut sur* Δ, *et discuter les différentes formes du lieu quand on donne à* A *toutes les positions possibles sur* OO′. *Démontrer que la courbe est unicursale.* (G. L.)

1. — Posons-nous un problème plus général. Supposons que le point M décrive une certaine courbe $f(y, \omega) = 0$, donnée en coordonnées polaires et rapportée à l'origine O′. Soient a la distance OO′, x et y les deux distances O′M′ et O′M.

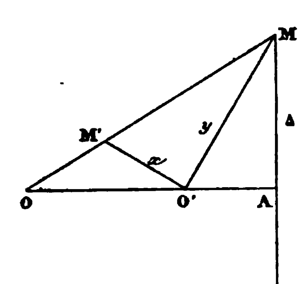


Fig. 1.

Menons par le point M′ une parallèle à O′M, et par M une perpendiculaire à O′M.

Les deux triangles semblables OM′K′ et OMO′ donnent

$$\frac{\text{OM}'}{\text{OM}} = \frac{a - \dfrac{x}{\sin\omega}}{a}.$$

Les deux triangles semblables OMK et OM′O′ donnent

$$\frac{\text{OM}'}{\text{OM}} = \frac{a}{a + \dfrac{y}{\cos\omega}}.$$

Égalant les seconds membres des deux égalités

$$\left(\frac{a - \dfrac{x}{\sin\omega}}{a}\right) = \left(\frac{a}{a + \dfrac{y}{\cos\omega}}\right)$$

ou $$a^2 - \frac{ax}{\sin\omega} - \frac{xy}{\sin\omega\cos\omega} + \frac{ay}{\cos\omega} = a^2$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\sin\omega}{x} - \frac{\cos\omega}{y} = \frac{1}{a}, \qquad [1]$$

Fig. 2.

cette formule donne une relation entre x, y, ω. Par conséquent, si on suppose que le point M décrive un certain lieu géométrique $f(y, \omega) = 0$ [2], on n'aura pour obtenir une relation entre x et y qu'à éliminer l'angle ω entre les deux équations [1] et [2], et la relation $f(x, y) = 0$ représentera l'équation du lieu décrit par le point dont les coordonnées sont x et y.

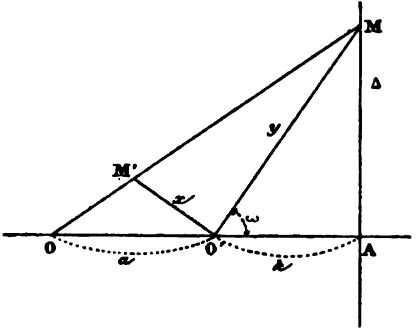


Fig. 3.

2.— Dans le cas du problème que nous avons à résoudre, le lieu du point M est une droite perpendiculaire au point A à la droite OO'.

Soit k la distance O'A, l'équation $f(y, \omega) = 0$ est ici

$$k = y\cos\omega \; [2].$$

Il faut donc éliminer l'angle ω entre les deux équati...

[1] et [2']. On a d'abord $\cos\omega = \dfrac{k}{y}$. [3]

Transportant cette valeur dans l'équation [1]. celle-ci devient résoluble par rapport à $\sin\omega$:

$$\sin\omega = x\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right). \quad [4]$$

La relation demandée est donc

$$\frac{k^2}{y^2} + x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{y^2}\right)^2 = 1.$$

3. — Discussion. — Cette équation est résoluble par rapport à x^2, et l'on a $x^2 = \dfrac{a^2y^2(y^2 - k^2)}{(y^2 + ak)^2}$.

C'est une courbe du 6me degré, symétrique par rapport à l'origine et par rapport aux deux axes. L'origine est un point double isolé. La courbe est tout entière extérieure aux parallèles $y = +k$, $y = -k$.

On peut supposer que le point A se meut de la droite O' vers la gauche, et nous allons montrer qu'il existe cinq formes différentes pour la courbe.

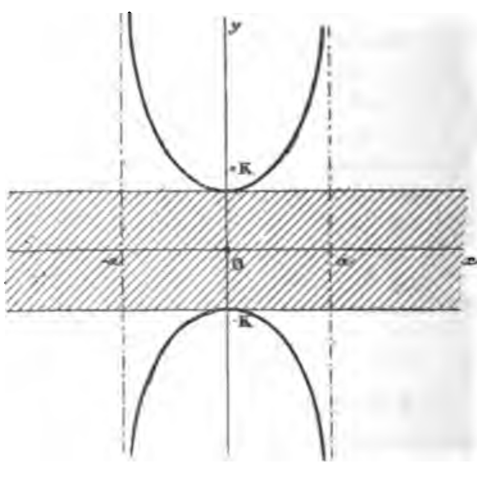


Fig. 4.

1° Supposons le point A à droite de O'; k est compté positivement.

L'équation révèle qu'il n'y a que deux asymptotes parallèles à l'axe des y, données par le coefficient de y^4, $(x^2 - a^2)$. La courbe ne rencontre pas ces asymptotes lorsque k est positif, car on trouve pour les ordonnées des points communs

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a^2k^2}{k(a+k)}},$$ quantités imaginaires si k est positif.

Les points $(-k)$ et $(+k)$ sur l'axe des y font partie de la courbe qui est tangente en ces points aux deux horizontales $y = k$, $y = -k$ (fig. 4).

2° Le point A est en O'. Alors $k = 0$. L'équation devient

$$x^2 = \frac{a^2y^4}{y^4} \text{ ou } x = \pm a.$$

Le lieu se compose des deux verticales $x = + a$, $x = - a$.

3° Le point A est situé entre O et O', par conséquent, k est négatif. Les deux asymptotes $x = \pm a$ sont conservées; on a deux autres asymptotes parallèles à l'axe des x, données par le coefficient de x^2, $y = \pm \sqrt{-ak}$. Ces asymptotes horizontales sont doubles. La figure 2 indique la construction des valeurs OA et OA'.

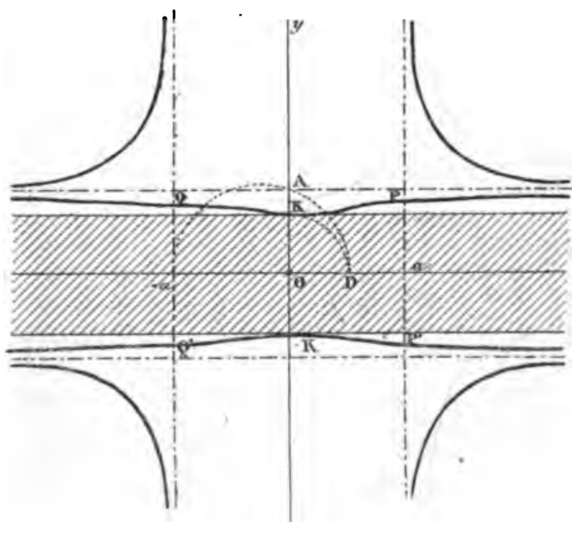


Fig. 5.

La courbe rencontre les asymptotes $x = \pm a$ en quatre points P, P', Q, Q' donnés par l'équation $y = \frac{\pm a\sqrt{-k}}{\sqrt{2a+k}}$.

La figure 5 représente la courbe dans ce cas.

Le point A peut occuper la position particulière du milieu de OO'. Alors $k = -\frac{a}{2}$, l'équation se simplifie:

$$x^2 = \frac{a^2y^2(4y^2 - a^2)}{(2y^2 - a^2)^2}.$$

Les asymptotes doubles A et A' ont dans ce cas pour équation $y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Les droites de séparation en régions deviennent

$$y = \pm\frac{a}{2}.$$

Les ordonnées des points P,P', Q,Q' sont $y = \pm\frac{a\sqrt{3}}{3}$, va-

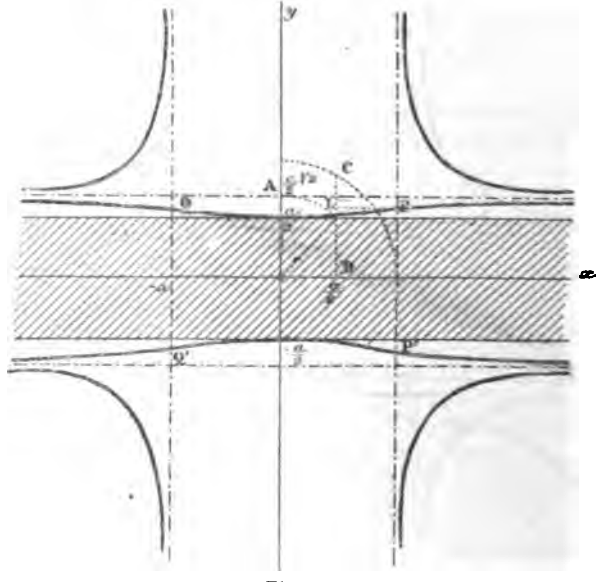


Fig. 6.

leur que l'on peut construire ainsi que l'indique la figure 6 en prenant $LD = \frac{2}{3}$ CD.

4° Le point A est arrivé en O. Alors $k = -a$. L'équation de la courbe est $x^2 = \frac{a^2y^2(y^2 - a^2)}{(y^2 - a^2)^2}$.

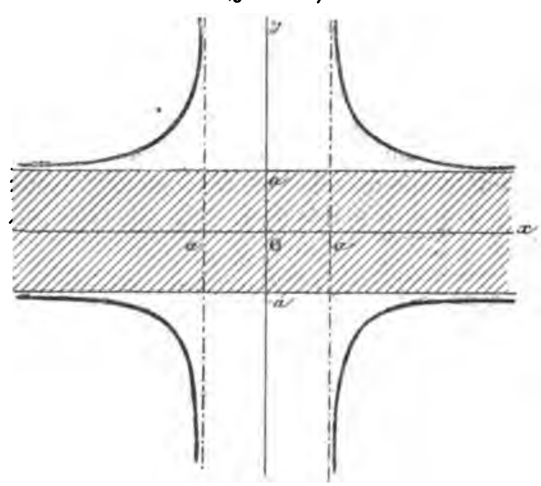


Fig. 7.

On aperçoit le facteur $y^2 - a^2$ qui représente les deux horizontales $y = \pm a$. Les branches de courbe PkQ, P'$(-k)$Q

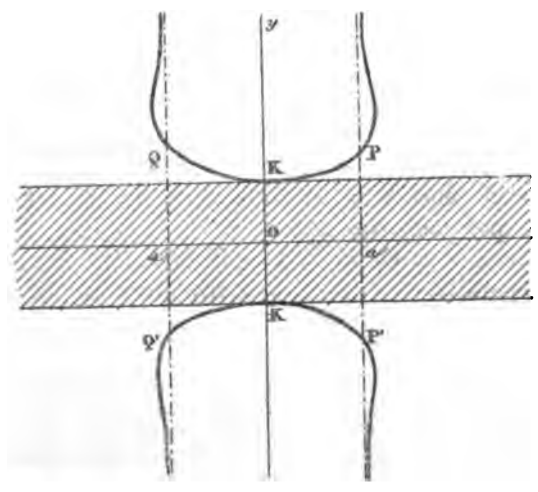


Fig. 8.

se confondent avec ces droites qui font partie du lieu. Les quatre autres branches sont conservées. La courbe est dans ce cas symétrique par rapport aux bissectrices des axes. La figure 7 en indique la forme.

5° H est à gauche de O. Alors $-a > -k < 0$.

Les asymptotes doubles horizontales $y = \pm\sqrt{-ak}$ sont comprises dans la région où il n'y a pas de points de la courbe; elles sont donc imaginaires. Les deux autres asymptotes existent toujours. La courbe rencontre ces deux asymptotes en quatre points P, P', Q, Q', donnés par l'équation $y = \dfrac{\pm a\sqrt{-K}}{\sqrt{2a+K}}$ (*fig.* 8).

On peut encore considérer le cas où le point H est à l'infini. Alors K est infini. On a $x^2 = \dfrac{a^2y^2}{a^2}$ ou $x^2 \times y^2 = 0$. On trouve le point double isolé à l'origine.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE FERMAT

A MERSENNE (1)

. . . .

Je reprends le style géométrique après vous avoir parlé d'affaires.

Premièrement, je vous renvoie le sentiment de M. Descartes sur la géostatique et vous conjure de me faire part de tout ce que vous avez de lui.

Après cela, je satisferai à la question de la tangente du galand (2) parallèle à l'axe, c'est-à-dire qui fasse un angle de 45 degrés avec la droite donnée de position (3).

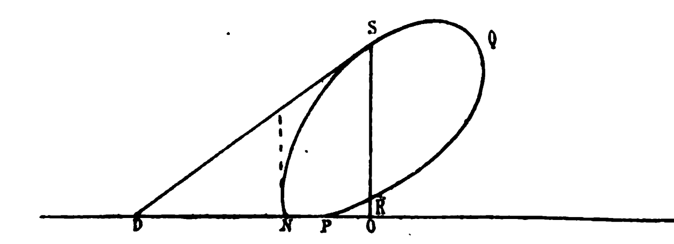
(1) Cette lettre si curieuse et si précieuse pour l'histoire des sciences mathématiques nous a été communiquée par M. Éd. Lucas. Elle lui a été confiée, avec d'autres manuscrits inédits, par le prince Boncompagni, qui l'a autorisé à les publier. La science sera reconnaissante au prince Boncompagni du dévouement constant et désintéressé qu'il ne cesse de lui témoigner. (*G. L.*)

(2) Fermat appelle ainsi la courbe que nous appelons le *folium de Descartes*.

(3) L'axe des x.

Pour satisfaire à cette question, qui semble d'abord malaisée, et qui l'a paru à M. de Roberval (car je n'ai pas encore vu la solution de M. Descartes), je me suis servi de la méthode de mon *Appendix ad Locos* (1), de laquelle l'usage en plusieurs rencontres est miraculeux pour éviter les asymétries (2), et ces longueurs d'équation qui semblent ne devoir jamais prendre fin.

Soit donné le galand NSQR, la droite donnée de position DNOP, et la ligne *z* donnée de grandeur. La propriété du



galand est que, quelque point que vous preniez, comme S ou R, le solide sous *z in NO in OS* est égal aux deux cubes NO et OS, ou bien le solide sous *z in ON in OR* est égal aux deux cubes NO et OR. Il faut trouver la tangente SD, par exemple, du côté d'en haut, qui fasse l'angle SDO égal à la moitié d'un droit. Soit fait.

Par ma méthode des tangentes, si NO est appelé *d*, et OS, *b*. la ligne OS sera égale à

$$\frac{b \text{ cub. bis} - d \text{ cub. } (^3)}{z \text{ in } b - d. \text{ q ter}},$$

et si la tangente était du côté d'en bas, la ligne OD serait

$$\frac{d \text{ cub.} - b \text{ cub. bis}}{d \text{ q. ter} - z \text{ in } b}.$$

Mais nous n'avons besoin que de la première équation, puisque nous ne travaillons qu'au premier cas. Supposons que NO, inconnu, s'appelle *a*, et que OS s'appelle *e*, nous

(1) *Varia opera math.*, p. 9.

(2) Irrationnelles ou radicaux.

(3) Cette expression, avec nos notations actuelles, s'écrirait $\frac{2b^3 - d^3}{zb - 3d^2}$.

aurons pour la ligne OD :

$$\frac{e \text{ cub. bis} - a \text{ cub}}{z \text{ in } e - a \text{ q. ter}}.$$

Or, puisque l'angle D est demi-droit, et que l'angle O est droit, les lignes OD et OS seront égales ; il faudra donc que

$$\frac{e \text{ cub. bis} - a \text{ cub.}}{z \text{ in } e - a \text{ q. ter}} \text{ soit égal à } e.$$

et, par conséquent,

e cub. bis — *a* cub. sera égal à *z* in *e* q. — *a* q. in *e* ter.

Or, par la propriété de la ligne

a cub. est égal à *z* in *a* in *e* — *e* cub.

Nous aurons donc

e cub. — *z* in *a* in *e* égal à *z* in *e* q. — *a* q. in *e* ter [1].

Divisons le tout par *e* ; nous aurons

e q. — *z* in *a* égal à *z* in e — *a* q. ter

et enfin

e q. — in *z* égal à *z* in *a* — *a* q. ter ;

et partant nous avons un lieu elliptique, et le point S *est ad ellipsim positione datam, sed est etiam ad curvam positione datam, ergo datur* par l'intersection de ces deux lieux, et par ma méthode topique.

On fera avec la même facilité la résolution du second cas. Mais, pour rendre la proposition générale, vous pourrez par la même méthode faire l'angle D égal à tel angle que vous voudrez, ou bien, ce qui est la même chose, faire que la ligne DO soit à la ligne OS en proportion donnée. En voilà, à mon avis, assez pour vous témoigner que je ne tiens pas caché ce que je fais.

Pour la tangente de la roulette, bien loin d'en faire un mystère, je veux vous faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées [2] ou les portions de leurs diamètres [3] ont relation à des lignes droites.

---

[1] Il faudrait, au premier terme du premier membre *e* cub. ter ; de même dans les deux égalités suivantes.

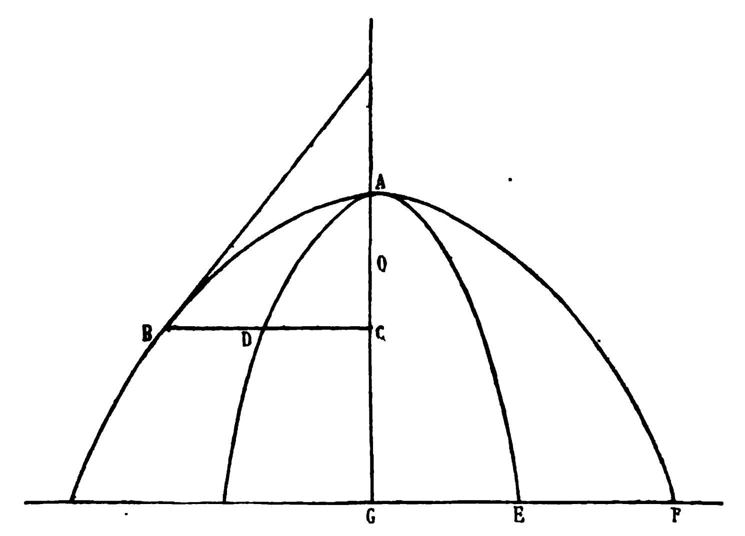
[2] Ordonnées.

[3] Abcisses.

me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leurs diamètres ont relation à d'autres courbes. Je vous ai déjà fait voir l'exemple de la roulette.......

En voici un autre exemple.

Soit la parabole EDAG, de laquelle l'axe AG et le sommet A. Soit une autre courbe ABF de mêmes axe et sommet, et que BC, appliquée, soit égale à la portion [1] de parabole DA, et l'appliquée FG égale à la portion de parabole EA, etc., à l'infini. Il faut mener au point B de cette nouvelle courbe une tangente.

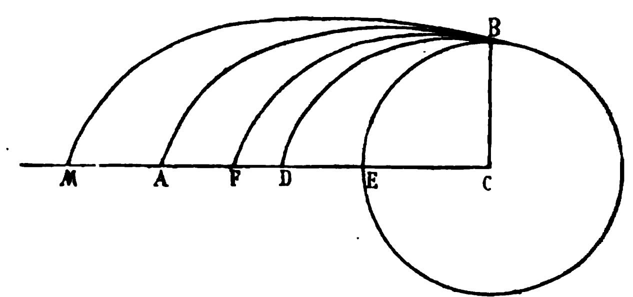


Soit tirée l'appliquée BDC. Soit O le *focus* de la parabole ; faisons comme OA + AC à AC, ainsi du quarré BC au quarré CN; la ligne BN touchera la courbe FBA.

Voilà deux exemples aisés, lesquels vous pourrez proposer à soudre, si vous voulez, avant que d'en faire voir les solutions. Mais pour le suivant je le propose à M. de Roberval, et si j'osais encore, à M. Descartes.

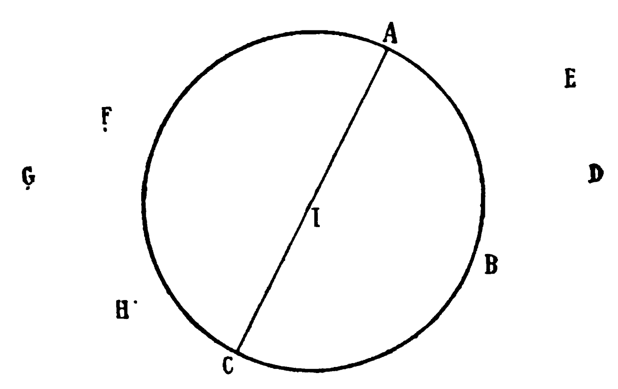
(1) Segment.

Soient autant de courbes qu'on voudra de même sommet B, comme BE, BD, BF, BA, données par position, et soit



imaginée une autre courbe de même sommet comme MB, en sorte que les appliquées de cette dernière, comme MC, soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes AB, BF, BD, BE, et la somme des appliquées AC, FC, DC, EC ; il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe. Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce, sans aucune asymétrie, ce qui semble merveilleux.

Avant de quitter la Géométrie, je vous donne encore une



spéculation, qui est excellente et qui allonge infiniment l'affinité au lieu plan : *Si a quotcunque punctis*, etc., laquelle

j'ai trouvé en cherchant les lieux *ad superficiem*. C'est que, après avoir trouvé un cercle qui satisfasse à la question d'Apollonius *in plano*, comme par exemple : soient les points donnés D, E, F, G, H et le cercle trouvé ABC, en sorte que quel point vous preniez en sa périphérie comme A, les carrés DA, EA, FA, GA, HA soient égaux à un espace donné ; je dis que, si autour du point I comme centre, vous décrivez une sphère de laquelle le cercle ABC soit un des grands, que, quel point vous prendrez en la superficie de la sphère, il satisfera à la question du lieu.

J'ai trouvé ensuite beaucoup de choses merveilleuses sur le sujet des lieux *ad superficiem*, mais je ne puis vous dire tout à la fois.

Le quadrilatère de M. de Roberval que je n'ai pas cru si pressé que la tangente du galand sera différé au premier voyage.

Il faut que je vous dise encore qu'on peut mener la tangente de 45°, au galand, par une voie qui semble plus géométrique ; car là où ma précédente solution a employé la ligne courbe du galand pour trouver le point cherché, par l'intersection du galand et d'une ellipse, cette autre voie n'emploie que les sections coniques.

Supposons que z le côté droit [1] du galand est inconnu, et que AD est une ligne donnée nommée b, que DB est inconnue nommée a.

Donc le côté droit sera

$$\frac{a \text{ cub.} + b \text{ cub.}}{b \text{ in } a}.$$

Par ma méthode des tangentes, la ligne DN qui concourt avec la tangente sera

$$\frac{b \text{ in } a \text{ cub. bis} - b \text{ qq.}}{a \text{ cub} - b \text{ cub. bis}},$$

laquelle il faut faire égale à a.

Nous aurons donc

a qq. — b cub. in a bis égal à b in a cub. bis — b qq.,

[1] Côté droit, *latus rectum*, paramètre.

et enfin

b in *a* cub. bis + *b* cub. in *a* bis — *a* qq. égal à *b* qq., laquelle équation (pour trouver la valeur de *a*) se peut résoudre ou par ma méthode topique ou par telle autre qu'on voudra.

Or *a* étant connu, le côté droit *z* sera connu. Et si le galand donné est différent de celui-ci, il faudra faire : comme le côté droit de celui-ci à la ligne AD ou *b* donnée, ainsi le côté droit du galand donné à une autre ligne qui déterminera un point semblable au point D et la question est faite. Si j'ai manqué ici la supputation, vous la corrigerez, car je n'ai pas seulement le loisir de relire ma lettre.

Pour Galilée j'avais commencé de l'examiner par le menu, et si j'ai du loisir assez je continuerai. Lorsqu'il parle de la proportion de la vitesse en la descente qui se fait en un même ou divers milieux par des corps différents, vous trouvez que son expérience qui précède contredit sa règle qui suit.

Je vous entretiendrai une autre fois plus à loisir, bien que l'oisiveté de la campagne vous ait présentement fait voir une lettre plus longue que je n'avais dessein. Je suis, mon révérend Père, votre, etc..

22 octobre 1638.

FERMAT.

QUESTIONS PROPOSÉES

44. — On considère des coniques inscrites dans un carré dont les diagonales sont prises comme axes de coordonnées. D'un point P, dont les coordonnées sont $(\alpha\beta)$ on abaisse des normales sur ces coniques. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales. En désignant par $2a$ la longueur de la diagonale du carré proposé, on fera voir que ce lieu est une quartique ayant un point double en P, et que l'équation de cette courbe est

$$(\beta x + \alpha y - 2xy)(\alpha x + \beta y - x^2 - y^2) = a^2(\alpha - x)(\beta - y)$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha - x)(\beta - y) + xy\{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2\} = 0$$

On construira cette courbe, et on distinguera les différentes formes, suivant que le point P est situé dans l'une ou l'autre des régions du plan définies par les quatre côtés du carré supposés prolongés indéfiniment.

Enfin, on distinguera sur le lieu les points qui proviennent des ellipses de ceux qui proviennent des hyperboles du faisceau considéré. *(G. L.)*

45. — On considère un point m dont les coordonnées sont x et y ; à ce point on fait correspondre un point M dont les coordonnées X et Y sont liées à x et y par les formules

$$x = X; \; yY = a^2.$$

On propose d'étudier cette transformation ; on établira en particulier les points suivants :

1. A une courbe f, d'ordre p, correspond également une courbe F, d'ordre $2p$; mais si f possède à l'infini, dans la direction Oy, un point de multiplicité k, l'ordre de F n'est plus que $2p - k$.

2. Les tangentes aux courbes f et F aux points correspondants m et M rencontrent Ox en deux points équidistants du pied de l'ordonnée.

3. Appliquer cette remarque à l'hyperbole considérée comme transformée de la droite par ce procédé et retrouver ainsi une construction bien connue.

4. Étudier les cubiques de la troisième classe,

$$x^2y = m^3,$$

en les considérant comme des transformées de la parabole ; montrer en particulier que, si l'on appelle P le pied de l'ordonnée en un point M de cette cubique, et T le point de rencontre de la tangente en M avec Ox, on a

$$OT = \frac{3}{2} OP .$$

5. Déduire de cette transformation et de la théorie des asymptotes qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt. *(G. L.)*

46. — Lorsque les trois premiers coefficients d'une équa-

tion de degré m sont $1,\ p,\ \frac{p(p+1)}{2}$,
l'équation a des racines imaginaires. *(G. L.)*

47. — Lorsque cinq coefficients consécutifs d'une équation sont $A,\ B,\ C,\ 2B - A,\ 2C - B$,
l'équation a des racines imaginaires. *(G. L.)*

48. — Lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation sont $+3A,\ -A,\ -A,\ +3A$,
l'équation a des racines imaginaires. *(G. L.)*

49. — On donne un cercle Δ, et un diamètre OC de ce cercle ; d'un point A, pris sur la circonférence, on abaisse sur OC la perpendiculaire AB, et l'on considère le triangle OAB ;

1° On demande le lieu des centres des cercles tangents aux droites OA, AB, OB ; 2° ce lieu se compose de deux quartiques unicursales; considérant l'une d'entre elles, on demande de distinguer sur cette courbe, formée de deux boucles égales, les points qui appartiennent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits du triangle AOB ; 3° déterminer le cercle qui ayant pour centre le point O, est bitangent à la courbe ; 4° trouver l'aire totale de la courbe.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 286-3.

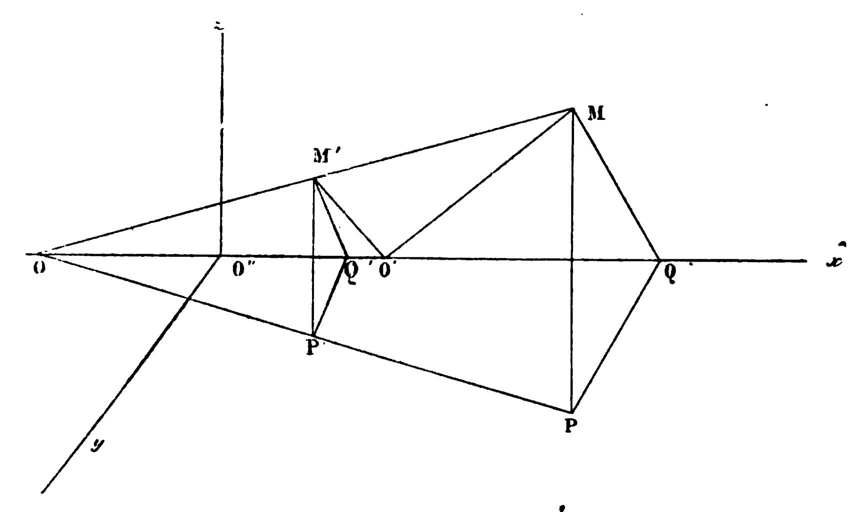
duple.

TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 49, 77, 97, 121)

29. — *Définition de la transformation réciproque dans l'espace.* — Nous nous proposons maintenant d'étendre à l'espace la transformation réciproque.



Imaginons deux points fixes O, O', O étant le pôle principal, O' le pôle secondaire de la transformation. On joint le point O à un point quelconque M de l'espace, et dans le plan MOO' on élève à la droite O'M une perpendiculaire qui rencontre OM en M'. Ce point M' sera dans ce système le transformé ou le correspondant de M.

30. — *Formules relatives à la transformation réciproque dans l'espace.* — Prenons pour axe de x la ligne des pôles, pour origine le milieu O" de OO', pour plan de yz celui qui, en ce point O", est perpendiculaire à OO'; enfin pour axes de y et de z deux droites rectangulaires de ce plan. Dési-

gnons, dans ce système, par x, y, z, les coordonnées du point M; par X, Y, Z, celles du point transformé M'.

Projetons M et M' sur xoy et soient P, P' ces projections qui sont en ligne droite avec O; projetons encore P et P' sur ox en Q et Q'; on forme ainsi des triangles semblables deux à deux qui donnent les relations

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{MP}{M'P'} = \frac{MQ}{M'Q'},$$

ou, en prenant $OO' = 2d$,

$$\frac{d+x}{d+X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{MQ}{M'Q'}. \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles semblables O'MQ, O'M'Q' donnent aussi $MQ.M'Q' = O'Q.O'Q'$

ou encore $MQ.M'Q' = (d-x)(X-d)$.

Les relations (1) peuvent donc s'écrire

$$\frac{d+x}{d+X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{MQ\,.\,M'Q'}{M'Q'^2} = \frac{(d-x)(X-d)}{Y^2+Z^2}$$

On a donc $\dfrac{d+x}{d+X} = \dfrac{(d-x)(X-d)}{Y^2+Z^2}$

qui donne $\dfrac{x}{d} = \dfrac{X^2-Y^2-Z^2-d^2}{X^2+Y^2+Z^2-d^2}$.

On trouve ensuite

$$\frac{y}{d} = \frac{2Y(X-d)}{X^2+Y^2+Z^2-d^2},$$

$$\frac{z}{d} = \frac{2Z(X-d)}{X^2+Y^2+Z^2-d^2}.$$

Il y a d'ailleurs *réciprocité* entre les lettres x, y, z et X, Y, Z; et l'on trouve

$$\frac{X}{d} = \frac{x^2-y^2-z^2-d^2}{x^2+y^2+z^2-d^2},$$

$$\frac{Y}{d} = \frac{2y(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2},$$

$$\frac{Z}{d} = \frac{2z(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2}.$$

Il résulte de ces formules que si l'on veut transformer, dans ce système, une surface de degré m; $f(x, y, z) = 0$. l'équation transformée sera de degré $2m$, du moins en géné-

ral, car nous signalerons tout à l'heure des causes qui font abaisser le degré de la transformée.

31. *Transformation du plan.* — Au plan P, dont l'équation est

$$A\frac{x}{d} + B\frac{y}{d} + C\frac{z}{d} = h$$

correspond la quadrique P',

$$(A - h)X^2 - (A + h)Y^2 - (A + h)Z^2 + 2CZX + 2BXY$$
$$- 2d(BY + CZ) + d^2(h - A) = 0.$$

Cette équation est intéressante à discuter.

L'équation en S appliquée à cette surface est

$$S^3 + (A + 3h)S^2 + [(A + h)(3h - A) - B^2 - C^2]S$$
$$+ (A + h)(h^2 - A^2 - B^2 - C^2) = 0$$

et, si l'on pose $\qquad A^2 + B^2 + C^2 = K^2,$

les trois racines sont

$$S_1 = -(A + h),$$
$$S_2 = -h + K,$$
$$S_3 = -(h + K).$$

Le hessien de la surface est d'ailleurs

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} A - h & B & C & 0 \\ B & -(A + h) & 0 & -B \\ C & 0 & -(A + h) & -C \\ 0 & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

Pour calculer rapidement ce déterminant ajoutons d'abord la quatrième colonne à la première, on aura :

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} A - h & B & C & 0 \\ 0 & -(A + h) & 0 & -B \\ 0 & 0 & -(A + h & -C \\ h - A & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

Ajoutons maintenant la quatrième ligne à la première, il vient :

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h - A \\ 0 & -(A + h) & 0 & -B \\ 0 & 0 & -(A + h) & -C \\ h - A & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

ou $$\frac{H}{d^2} = (A - h)\begin{vmatrix} 0 & -(A + h) & 0 \\ 0 & 0 & -(A + h) \\ h - A & -B & -C \end{vmatrix}$$

on a, finalement :

$$H = - d^2(A + h)^2(A - h^2).$$

L'équation de la surface rapportée à ses axes, quand on suppose K^2 différent h^2, est donc

$$-(A+h)X'^2 + (K-h)Y'^2 - (K+h)Z'^2 = \frac{d^2(A+h)(A-h)^2}{K^2-h^2}$$

32. — Nous reviendrons tout à l'heure sur le cas singulier. celui où l'on suppose $h^2 = K^2$; dans le cas général, l'équation précédente ne peut représenter que des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes. C'est ce que nous allons montrer. On peut toujours supposer $h > o$, et comme K désigne essentiellement la racine réelle positive de l'expression $(A^2 + B^2 + C^2)$, nous pouvons dire que K est aussi une quantité positive. Deux cas seulement sont donc à distinguer. suivant que l'on suppose $h - K > o$ ou $h - K < o$.

La discussion, sur laquelle il est inutile d'insister davantage, peut se résumer dans le tableau suivant :

$h - K > o$	$A + h > o$	*Ellipsoïde réel.*
	$A + h < o$	(Inégalités incompatibles.)
$h - K < o$	$A + h > o$	*Hyperboloïde à deux nappes.*
	$A + h < o$	*(Id.)*

Nous ferons seulement remarquer pourquoi, dans ce tableau. nous avons marqué les inégalités

$$h - K > o \qquad (1)$$

$$A + h < o \qquad (2)$$

comme *incompatibles*. Il ne faut pas oublier que les lettres A, h, K, d, ont une signification géométrique qui ne permet pas d'établir entre elles des inégalités quelconques. La distance ρ de l'origine au plan P est donnée par la formule

$$\rho = \frac{hd}{K}. \qquad (3)$$

D'autre part, le plan P rencontre l'axe des x à une distance ρ' de l'origine, telle que, $\rho' = \frac{hd}{-A}$.

Dans cette formule ρ' désigne la distance absolue quand on suppose $A < o$. Ceci posé on a évidemment $\rho' > \rho$ ou

$$\frac{hd}{-A} > \frac{hd}{K};$$

on a donc $A + K > o$ en chassant les dénominateurs positifs. Or les deux inégalités (1) et (2) donnent par combinaison

$$A + K < o$$

et pour ce motif sont incompatibles. Il faut d'ailleurs remarquer que l'inégalité (2) entraîne nécessairement la condition $A < o$ que nous avons admise.

Si l'on veut maintenant observer que la formule (3) dans l'hypothèse $h - K > o$ donne $\rho > d$, et, au contraire, $\rho < d$ si l'on suppose $h - K < o$, nous pourrons dire :

Théorème. — *Dans la transformation réciproque à un plan* P *correspond une quadrique* P' *qui est un ellipsoïde, si le plan* P *est extérieur à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre; et un hyperboloïde à deux nappes quand le plan* P *coupe cette sphère.*

(A suivre.)

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler**.

(*Suite*, voir page 105.)

III. — Signification géométrique des fonctions I *et* J.

Nous allons chercher l'expression du rapport anharmonique de quatre points déterminés par les deux équations :

$$mx^2 + pxy + qy^2 = o$$

et

$$m'x^2 + p'xy + q'y^2 = o.$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées *binaires* des deux points représentés par la première équation ; (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des deux autres points. Une des valeurs du rapport anharmonique peut s'écrire, soit

$$\rho = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2},$$

soit

$$\rho = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2},$$

suivant que l'on compte les distances à partir de l'origine des x ou de l'origine des y. Mais on peut écrire

$$\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_1}{x_4 y_1 - x_1 y_1}$$
$$= \frac{y_3 x_1 - x_1 y_1}{y_4 x_1 - x_1 y_1} = \frac{x_3 y_1 - y_3 x_1}{x_4 y_1 - y_4 x_1}$$

et de même

$$\frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2} = \frac{x_3 y_2 - x_2 y_3}{x_4 y_2 - y_4 x_2}.$$

Donc on a

$$\rho = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1)(x_4 y_2 - y_4 x_2)}{(x_4 y_1 - y_4 x_1)(x_3 y_2 - y_3 x_2)} = \frac{\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_2}{y_2}\right)}{\left(\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_2}{y_2}\right)} \quad (4)$$

Si maintenant on pose

$$R = \sqrt{p^2 - 4mq}, \quad R' = \sqrt{p'^2 - 4m'q'};$$
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{-p + R}{2m}, \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{-p - R}{2m},$$
$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{-p' + R'}{2m'}, \quad \frac{x_4}{y_4} = \frac{-p' - R'}{2m'},$$

on trouve la formule

$$\rho = \frac{2qm' + 2q'm - pp' + RR'}{2qm' + 2q'm - pp' - RR'}. \quad (5)$$

Nous rappellerons que le rapport anharmonique de quatre points a six valeurs distinctes en général, savoir:

$$\rho, \ \frac{1}{\rho}, \ 1 - \rho, \ \frac{1}{1 - \rho}, \ \frac{\rho - 1}{\rho}, \ \frac{\rho}{\rho - 1},$$

ρ désignant le résultat obtenu en groupant les quatre points d'une manière quelconque. Lorsque les points sont harmoniques, les six valeurs se réduisent à trois, savoir -1, 2 et $\frac{1}{2}$.

Un autre cas particulier est celui où l'on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$; alors les six valeurs se réduisent à deux, qui sont les racines de l'équation précédente, c'est-à-dire les racines cubiques imaginaires de l'unité; les quatre points sont alors en situation *équi-anharmonique*.

Supposons maintenant que J soit nul; l'équation (3) a une racine nulle et la valeur correspondante de λ est $\lambda = c$. L'équation (1) devient:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 - y^2[x^2(4b^2 - 4ac) + 4xy(bc - ad) + y^2(c^2 - ae)] = 0,$$

Le polynôme entre crochets, devant être carré parfait, s'écrira

$$4(b^2 - ac)\left[x - \frac{ad - bc}{2(b^2 - ac)}\,y\right]^2,$$

d'où résulte le mode de décomposition suivant:

$$\left[ax^2 + 2xy(b + \sqrt{b^2 - ac}) + y^2\left(c - \frac{ad - bc}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)\right]$$
$$\left[ax^2 + 2xy(b - \sqrt{b^2 - ac}) + y^2\left(c + \frac{ad - bc}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)\right]$$

En calculant le rapport anharmonique des quatre points représentés par les deux trinômes du second degré, d'après la formule (5), on voit que ρ se réduit à $\frac{+ RR'}{- RR'} = - 1$, parce que $2qm' + 2q'm - pp'$ est identiquement nul.

Donc : *quand on a* $J = 0$, *les quatre points représentés par la forme du quatrième degré sont en situation harmonique, et on est en droit de conclure que* J *est un invariant.*

Supposons maintenant qu'on ait $I = 0$. En divisant par a et en désignant les quatre racines $\frac{x_1}{y_1}$, etc... par $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, l'équation $I = 0$, pourra s'écrire:

$$12\beta\gamma\delta\varepsilon - 3\Sigma\ .\ \Sigma\beta\gamma\delta + (\Sigma\beta\gamma)^2 = 0.$$

Mais on a
$$\Sigma\beta . \Sigma\beta\gamma\delta = \Sigma\beta^2\gamma\delta + 4\beta\gamma\delta\varepsilon$$
$$(\Sigma\beta\gamma)^2 = \Sigma\beta^2\gamma^2 + 2\Sigma\beta^2\gamma\delta + 6\beta\gamma\delta\varepsilon\,;$$

l'équation devient donc

$$\Sigma\beta^2\gamma^2 - \Sigma\beta^2\gamma\delta - 6\beta\gamma\delta\varepsilon = 0$$

ou bien en développant:

$$(\beta\gamma + \delta\varepsilon^2) + (\beta\delta + \gamma\varepsilon)^2 + (\beta\varepsilon + \gamma\delta)^2 - (\beta\delta + \gamma\varepsilon)(\beta\varepsilon + \gamma\delta)$$
$$- (\beta\varepsilon + \gamma\delta)(\beta\gamma + \delta\varepsilon) - (\beta\gamma + \delta\varepsilon)(\beta\delta + \gamma\varepsilon) = 0$$

ou enfin, abréviativement:

$$M^2 + N^2 + P^2 - NP - PM - MN = 0. \qquad (6)$$

Mais la valeur (4) du rapport anharmonique est

$$\rho = \frac{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \beta\varepsilon - \gamma\delta}{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \beta\delta - \gamma\varepsilon} = \frac{M - P}{M - N}.$$

Maintenant l'égalité (6) devient en ajoutant et retranchant des termes

$$(M - P)^2 + (M - N)^2 - M^2 + MP + MN - NP = 0$$

ou $$(M - P)^2 + (M - N)^2 - (M - N)(M - P) = 0$$

ou enfin

$$\left(\frac{M - P}{M - N}\right)^2 + 1 - \frac{M - P}{M - N} = \rho^2 - \rho + 1 = 0.$$

Donc, *quand on a* $I = 0$, *les quatre points représentés par la forme du quatrième degré sont en situation équi-anharmonique: on en conclut que* I *est aussi un invariant.*

Il reste à chercher par quels facteurs I et J sont multipliés lorsqu'on fait la substitution linéaire $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$. Pour cela nous remarquerons que le discriminant $I^3 - 27J^2$ est le produit des carrés des différences des racines, c'est-à-dire de six facteurs de la forme $(x_1y_2 - y_1x_2)^2$ (*).

Lorsqu'on fait la substitution indiquée, on reconnaît que chaque facteur devient $(X_1Y_2 - Y_1X_2)^2(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2$; le discriminant se trouve donc multiplié par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^{12}$. Il en résulte que I est multiplié par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^4$ et J par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^6$.

On peut s'en assurer par un calcul direct en formant les coefficients de la nouvelle expression de f, puis les nouveaux invariants.

IV. — Détermination du rapport anharmonique des quatre points représentés par l'équation f = o.

Nous allons calculer en fonction de I et de J l'expression du rapport anharmonique des quatre points représentés par l'équation $f = 0$, sans faire aucune hypothèse particulière.

Posons pour un instant

$$A = 4b^2 - 6ac + 2a\lambda, \qquad B = 2\lambda b - 2ad;$$

on aura

$$f = (ax^2 + 2bxy + \lambda y^2)^2 - y^2 [Ax^2 + 2Bxy + y^2(\lambda^2 - ae)].$$

Puisque λ est déterminé de telle sorte que le second trinôme soit un carré, on peut écrire:

(*) Voir, pour la démonstration de ce fait, les *Leçons d'Algèbre supérieure de Salmon*, traduction française, p. 78.

$$f = (ax^2 + 2bxy + \lambda y^2)^2 - Ay^2\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2$$

$$= \left[ax^2 + 2bxy + \lambda y^2 - \frac{Axy + By^2}{\sqrt{A}}\right]$$

$$\left[ax^2 + 2bxy + \lambda y^2 + \frac{Axy + By^2}{\sqrt{A}}\right]$$

$$= \left[ax^2 + xy(2b - \sqrt{A}) + y^2\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$

$$\left[ax^2 + xy(2b + \sqrt{A}) + y^2\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right] \quad (7)$$

D'après la formule (5), le rapport anharmonique est

$$\rho = \frac{4a\lambda - 4b^2 + A + R}{4a\lambda - 4b^2 + A - R}$$

R désignant la racine carrée de l'expression

$$\left[(2b - \sqrt{A})^2 - 4a\lambda + \frac{4aB}{\sqrt{A}}\right]\left[(2b + \sqrt{A})^2 - 4a\lambda - \frac{4aB}{\sqrt{A}}\right]$$

Comme on a

$$4a\lambda - 4b^2 + A = 6a(\lambda - c) = 6a\mu,$$

la formule précédente devient

$$6\mu(\rho - 1) = R(\rho + 1),$$

ou bien, en prenant pour inconnue auxiliaire

$$\sigma = \frac{\rho - 1}{\rho + 1},$$

$$36\mu^2\sigma^2 = R^2.$$

Le polynôme R^2 s'exprime très simplement en fonction de I et J; on a

$$R^2 = (4b^2 + A - 4a\lambda)^2 - 16\left(b\sqrt{A} - \frac{aB}{\sqrt{A}}\right)^2$$

$$= (8b^2 - 6ac - 2a\lambda)^2 - \frac{16(6abc - 2a^2d - 4b^3)^2}{4b^2 - 6ac + 2a\lambda}$$

ou, en remplaçant λ par $\mu + c$,

$$R^2 = \frac{1}{2b^2 - 2ac + a\mu}[(8b^2 - 8ac - 2a\mu)^2(2b^2 - 2ac + a\mu)$$
$$- 32(3abc - 2b^3 - a^2d)]$$

$$= \frac{4}{2b^2 - 2ac + a\mu}[a^3\mu^3 - 6a^2\mu^2(b^2 - ac) + 8a^2(3b^2c^2$$
$$- 4ac^3 + 6abcd - a^2d^2 - 4b^3d)]$$

$$= \frac{4a^2}{2b^2 - 2ac + a\mu}\,[a\mu^3 - 6\mu^2(b^2 - ac) + 8aJ$$
$$+ 8I\,(b^2 - ac)]$$

La substitution de cette valeur dans la relation $3\sigma\mu^2\delta^2 = R^2$ donne l'équation

$$\mu^4\,(9\,a\sigma^2 - a^3) + 6\mu^2\,(b^2 - ac)(3\sigma^2 + a^2)$$
$$- 8\,a^2\,(I(b^2 - ac) + aJ) = 0. \qquad (8)$$

Il ne reste plus qu'à éliminer μ entre les deux équations du troisième degré (8) et (3) $\mu^3 - \mu I + 2J = 0$, pour avoir la résolution cherchée entre le rapport anharmonique et les invariants.

Les calculs sont assez prolixes; il n'est guère possible d'éviter le développement complet du résultant des équations (3) et (8). Ce résultant, pour deux équations incomplètes de la forme $Ax^3 + Bx^2 + D = 0$ et $A'x^3 + C'x + D' = 0$ est
$A^3D'^3 - D^3A'^3 - B^3A'D'^2 - A^2DC'^3 - A^2BC'D'^2 - B^2DA'C'^2$
$+ 2AD^2A'^2C' + 3\,AD^2A'^2D' - 3A^2DA'D'^2 - ABDA'B'D'$.

En ordonnant suivant les puissances de σ, on trouve que tous les termes du résultant contiennent en facteur

$$a^3J + a^2I\,(b^2 - ac) - 4(b^2 - ac)^3;$$

après la suppression de ce facteur, il reste

$$5832J^2\sigma^6 + \sigma^4(5832J^2 - 648I^3) + \sigma^2(1944J^2 + 144I^3)$$
$$+ 216J^2 - 8I^3 = 0$$

ou $216J^2(27\sigma^6 + 27\sigma^4 + 9\sigma^2 + 1) - 8I^3(81\sigma^4 - 18\sigma^2 + 1) = 0$

c'est-à-dire $\dfrac{I^3}{J^2} = 27\,\dfrac{(3\sigma^2 + 1)^3}{(9\sigma^2 - 1)^2} = 108\,\dfrac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{(\rho + 1)^2(2\rho^2 - 5\rho + 2)^2}$

$$= 108\,\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{(\rho + 1)^2(2\rho - 1)^2(\rho - 2)^2}$$

Telle est la relation cherchée.

Elle fait retrouver des résultats déjà obtenus; si l'invariant I est nul, on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$; si J est nul, on a soit $\rho + 1 = 0$, soit $2\rho - 1 = 0$, et l'une quelconque des valeurs -1, $\frac{1}{2}$ et 2 pour ρ, caractérise la situation harmonique.

Enfin, on voit aussi que $\frac{I^3}{J^2}$ est un *invariant absolu*, c'est-à-dire une fonction qui se reproduit sans l'adjonction d'aucun

facteur, lorsqu'on fait une transformation linéaire, car le rapport anharmonique ne change pas.

On voit d'ailleurs que I^8 et J^2 sont multipliés chacun par la douzième puissance du déterminant $\alpha\beta' - \beta\alpha'$. *(A suivre.)*

CONSTRUCTION DES ASYMPTOTES
DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE PASSANT PAR QUATRE POINTS DONNÉS

1. — On sait que l'hyperbole équilatère qui est circonscrite à un triangle passe par le centre des hauteurs de ce triangle : on pourra donc déterminer un cinquième point de l'hyperbole : par cinq points on ne peut faire passer qu'une seule conique et l'on voit ainsi que le problème ne comporte qu'une solution.

On peut d'ailleurs trouver le centre d'une conique déterminée par cinq points; il suffit, comme on le sait, de déterminer les extrémités de deux cordes parallèles au moyen du théorème de Pascal. La droite qui joint les milieux de ces deux cordes est un diamètre; le centre peut donc être construit au moyen de deux diamètres, ainsi déterminés.

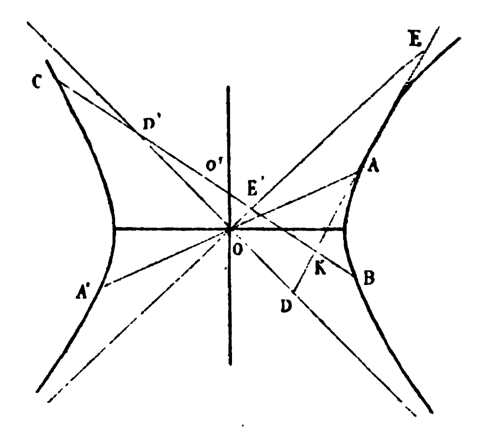
2. — D'après cette remarque nous supposons que l'hyperbole équilatère H est définie par deux points A, B et le centre O de la courbe et nous nous proposons de trouver ses asymptotes. Voici une solution simple de ce problème.

Soit A' le symétrique de A par rapport à O; par les trois points A, A', B faisons passer un cercle Δ; soit O' le centre et C l'extrémité du diamètre qui passe par B. On sait que : *si sur la corde d'une hyperbole équilatère comme diamètre on décrit un cercle, celui-ci coupe l'hyperbole en deux autres points qui sont les extrémités d'un diamètre de cette courbe.*

Il résulte de ce théorème que le point C est un point de l'hyperbole.

Le triangle rectangle BAC étant inscrit à l'hyperbole, on sait par une autre propriété, également bien connue, que *la*

tangente à H *au point* A *est perpendiculaire à l'hypoténuse* BC. Ayant, d'après cette remarque, abaissé du point A une perpendiculaire AK sur CB, les asymptotes cherchées sont deux droites rectangulaires ayant leur sommet en O et interceptant sur AK un segment dont le milieu est le point A. Il suffit donc pour les obtenir, et comme l'indique la figure, de décrire du point A comme centre avec AO pour rayon un cercle qui rencontre AK aux points D et E : OD et OE sont les asymptotes.



3. — On peut remarquer que si l'on prolonge les asymptotes OD et OE jusqu'à ce qu'elles rencontrent le diamètre BC aux points D' et E', les triangles OO'E', OO'D' sont isoscèles et l'on a OO' = O'E' = O'D'. On peut alors déterminer les asymptotes de l'hyperbole en décrivant du point O' comme centre avec O'O pour rayon un cercle qui coupe BC en deux points, et en joignant ces points au centre donné O on obtient les deux asymptotes.

L'une et l'autre des deux constructions précédentes sont plus simples que celle qu'on indique ordinairement. Celle-ci

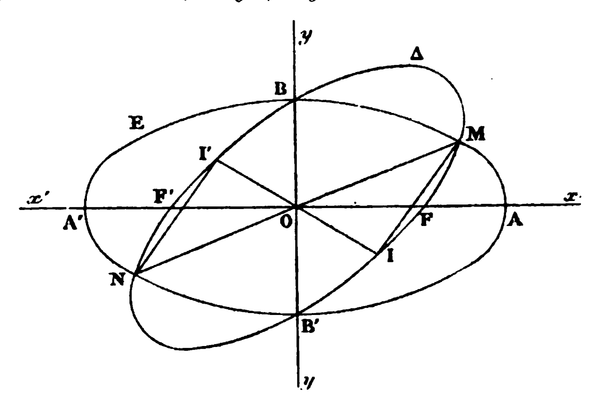
consiste à tracer les bissectrices des angles formés par les droites BC, AA'; on mène ensuite par O des parallèles à ces bissectrices et on a les axes en position. De ces axes on déduit ensuite les asymptotes; mais dans la pratique il est visible que cette construction est moins rapide que celle que nous venons d'exposer, et qui donne immédiatement les asymptotes au moyen du tracé d'un seul arc de cercle.

QUESTION 16

Solution par M. E. Devin, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

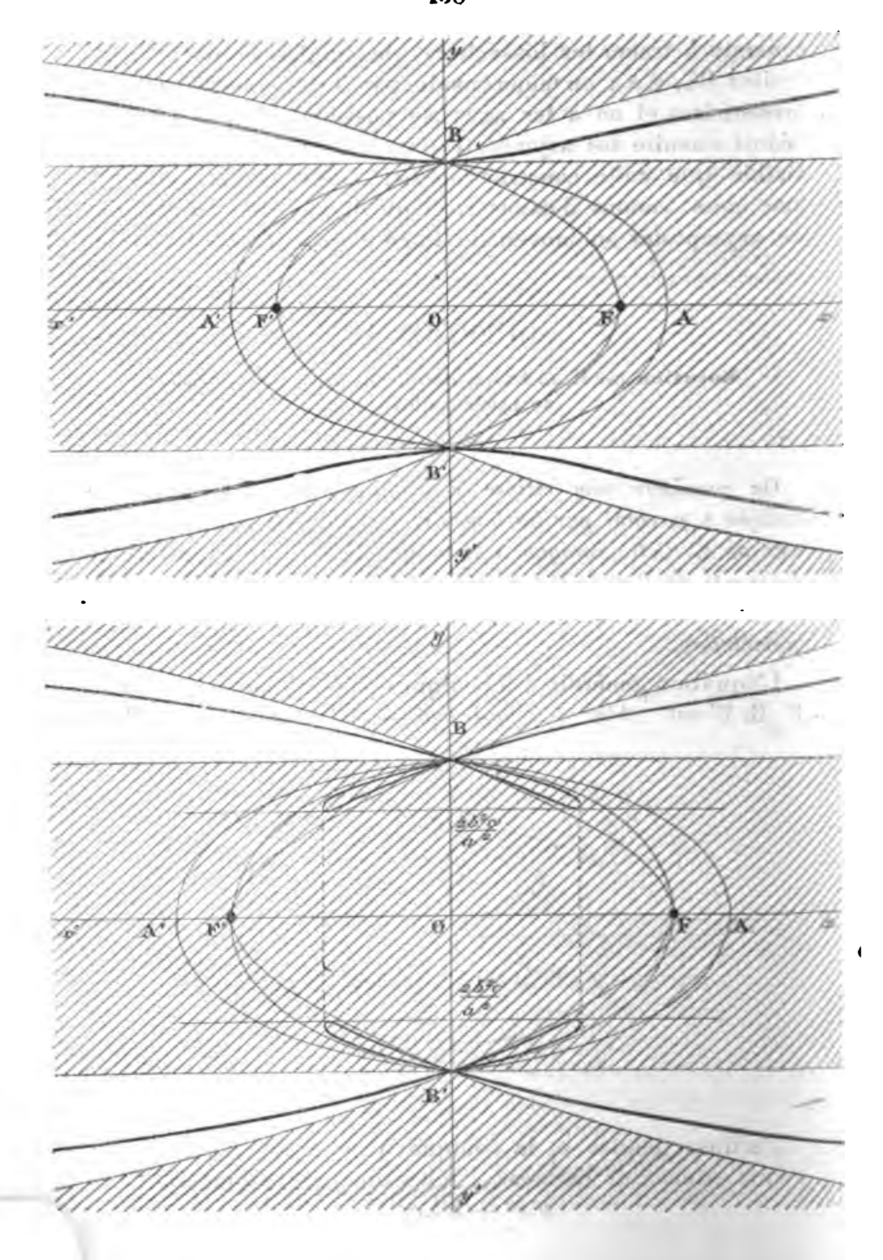
On considère une ellipse E *rapportée à ses axes et une conique* Δ *passant par les foyers et les extrémités* B, B' *du petit axe de* E. *Cette conique* Δ *rencontre* E *en deux points* M, N *différents de* B *et de* B'; *en ces points on mène à* E *des normales qui rencontrent* Δ *en des points* I, I' *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

L'équation générale des coniques passant par les points F, F', B, B' est $b^2x^2 + \lambda xy + c^2y^2 - b^2c^2 = 0.$ (1)



L'ellipse donnée et la conique Δ se coupent en quatre points situés sur les deux droites dont l'équation est

$$b^4x^2 + a^2\lambda xy = 0,$$


y
B
x'
A'
F'
O
F
A
x
B'
y'
y
B
x'
A'
F'
O
F
A
x
B'
y'

combinaison homogène de l'équation (1) et de celle de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

L'équation du diamètre MN commun aux deux courbes est donc $b^4x + a^2\lambda y = 0$

et son coefficient angulaire, m

$$-\frac{b^4}{a^2\lambda} = m.$$

Soit m' celui de la tangente en M; on a

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2};$$

ainsi
$$m'\frac{b^4}{a^2\lambda} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou
$$m' = \frac{\lambda}{b^2}.$$

Soit m'' le coefficient angulaire de la normale au point M on a
$$m'm'' = -1$$

d'où
$$m'' = -\frac{b^2}{\lambda}.$$

Ceci posé, les points M et N étant les extrémités d'un diamètre de l'ellipse donnée, les deux normales MI et NI' sont parallèles et, d'après l'équation générale des normales à l'ellipse, en fonction du coefficient angulaire, qui est

$$y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

nous aurons pour l'ensemble de ces deux normales, dont le coefficient angulaire est m'', l'équation

$$\left(y + \frac{b^2}{\lambda}x\right)^2\left(a^2 + \frac{b^6}{\lambda^2}\right) = \frac{c^4b^4}{\lambda^2}$$

ou, en multipliant les deux membres par λ^2,

$$(\lambda y + b^2x)^2\left(a^2 + \frac{b^6}{\lambda^2}\right) = c^4b^4$$

ou encore
$$(\lambda y + b^2x)^2(\lambda^2a^2 + b^6) = c^4b^4\lambda^2. \qquad (2)$$

Nous allons maintenant, pour éviter d'introduire l'ellipse donnée dans l'équation du lieu, chercher à former l'équation de la droite II'; et, cette équation obtenue, il nous suffira, pour obtenir le lieu demandé, d'éliminer λ entre l'équation de la droite II' et celle de la conique mobile.

La droite MN étant un diamètre de la conique, et les droites MI et NI' étant parallèles entre elles, les points I et I' sont les extrémités d'un même diamètre de cette conique.

L'équation de II' est donc de la forme

$$y + \alpha x = 0.$$

D'ailleurs l'équation de MN est

$$b^4 x + a^2\lambda y = 0.$$

L'ensemble de ces deux droites est donc représenté par l'équation homogène

$$(b^4 x + a^2\lambda y)(y + \alpha x) = 0. \qquad (3)$$

Il faut déterminer α.

Pour cela, nous allons former, avec l'équation de la conique mobile et celle qui représente les deux droites MI et NI', une combinaison homogène, qui, elle aussi, représentera l'ensemble des deux droites II' et MN; en identifiant cette équation avec l'équation (3) nous pourrons déterminer α.

L'ensemble des deux normales peut s'écrire

$$\lambda^2(a^2\lambda^2 + b^6)y^2 + b^4(a^2\lambda^2 + b^6)x^2 + 2\lambda b^2(a^2\lambda^2 + b^6)xy - b^4c^4\lambda^2 = 0. \qquad (4)$$

La conique mobile étant

$$c^2y^2 + b^2x^2 + \lambda xy - b^2c^2 = 0.$$

multiplions cette dernière équation par $\lambda^2 b^2 c^2$ et retranchons de (4) le résultat, il vient

$$\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]y^2 + b^4[a^2\lambda^2 + b^6 - c^4\lambda^2]x^2 + \lambda b^2[2a^2\lambda^2 + 2b^6 - \lambda^2c^2]xy = 0$$

ou

$$\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]y^2 + b^6[\lambda^2 + b^4]x^2 + \lambda b^2[a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 + 2b^6]xy = 0.$$

Identifiant cette équation avec

$$a^2\lambda y^2 + \alpha b^4x^2 + (b^4 + \alpha\lambda a^2)xy = 0$$

on a

$$\frac{\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]}{a^2\lambda} = \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\alpha} = \frac{\lambda b^2[a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 - 2b^6]}{b^4 + \alpha\lambda a^2}$$

de la première de ces égalités je tire

$$\alpha = \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\lambda[\lambda^2 + b^2(b^2 + c^2)]}.$$

L'équation de la droite II' est donc

$$y + \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\lambda[\lambda^2 + b^2(b^2 - c^2)]}\,x = 0.$$

Eliminons maintenant λ entre cette équation et

$$b^2x^2 + \lambda xy + c^2y^2 - b^2c^2 = 0$$

on a

$$\frac{b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2}{x}\left[\frac{(b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2)^2}{x^2y^2} - b^2(c^2 - b^2)\right] + b^2x\left[b^4 + \frac{(b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2)^2}{x^2y^2}\right] = 0$$

ou encore

$$(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)^3 - b^2x^2(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)^2 - b^2x^2y^2(c^2 - b^2)(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2) - b^6x^4y^2 = 0$$

et, après calcul,

$$[b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2]\,[c^2(y^4 - 2b^2y^2 + b^4) - b^4x^2] = b^4x^2y^2(b^2 - y^2).$$

Remarquant que la seconde parenthèse est une différence de deux carrés, on a

$$(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2 - c^2)\,[c^2(y^2b^2)^2 - b^4x^2] = b^4x^2y^2(b - y^2)$$

ou $(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)\,[c(y^2 - b^2)\,x - b^2]\,[c(y^2 - b^2) + b^2x]$

$$= b^4x^2y^2(b^2 - y^2). \qquad (5)$$

Cette équation se présente alors sous la forme de quatre facteurs et permet ainsi de séparer le plan en régions.

Les courbes qui séparent le plan en régions sont :

1° $b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0$

ou $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

C'est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ceux de l'ellipse donnée, et dont les sommets sont les foyers de celle-ci et les sommets B et B′ de cette même ellipse.

2° La parabole $cy^2 - b^2x - b^2c = 0.$

C'est la parabole qui a pour sommet le foyer F de l'ellipse, pour axe l'axe ox, et qui passe par les points B et B′ ; elle est bien déterminée.

3° La parabole $cy^2 + b^2x - b^2c = 0.$

C'est la parabole qui a pour axe l'axe ox, pour sommet le point F′, foyer de gauche de l'ellipse donnée, et qui passe par les points B et B′; elle est aussi bien déterminée.

4° Les deux droites $y = b,$

$y = -b,$

ce sont les parallèles à ox, qui passent par les points B et B′.

Reportons-nous à l'équation (5).

Si $(b^2 - y^2) > 0$, le second membre est positif; le facteur $c(y^2 - b^2) - b^2x$, en supposant x positif, est positif; il faut que $(b^2x^2 + e^2y^2 - b^2c^2)\,[c(y^2 - b^2) + b^2x]$ soit négatif.

Il peut donc y avoir des points de la courbe dans l'espace compris entre la parabole

$$c(y^2 - b^2) + b^2x = 0$$

et l'ellipse $\qquad b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0.$

Alors la courbe ne pénètre pas dans toutes les parties ombrées de la figure.

Occupons-nous maintenant de la discussion de l'équation en la considérant comme bicarrée en x.

L'équation développée s'écrit

$$b^2a^2x^2y^4 - 3b^4c^2x^2y^2 + 2b^6c^2x^2 - b^6x^4 + c^4y^6 - 3b^2c^4y^4 + 3b^4c^4y^2 - b^6c^4 = 0$$

ou, en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$b^6x^4 - b^2a^2y^4x^2 + 3b^4c^2y^2x^2 - 2b^6c^2x^2 - c^4y^6 + 3b^2c^4y^4 - 3b^4c^4y^2 + b^6c^4 = 0$$

ou

$$b^6x^4 - b^2x^2(a^2y^4 - 3b^2c^2y^2 + 2b^4c^2) - c^4y^2(y^4 - 3b^2y^2 - 2b^4) - c^4b^4(y^2 - b^2) = 0. \qquad (6)$$

Si dans cette équation on fait $x = 0$, on a

$$(y^2 - b^2)^3 = 0,$$

qui prouve que les points B et B′ sont des points triples de la courbe.

Si d'autre part on fait $y = 0$ dans l'équation (5), on a

$$(x^2 - c^2)^2 = 0,$$

qui prouve que les points F et F′ sont des points doubles; mais ce sont des points doubles isolés, car les tangentes en ces points sont imaginaires.

Tangentes horizontales. — Cherchons les points de la courbe où la tangente est horizontale. Pour cela, il faut former la dérivée par rapport à x et l'égaler à zéro.

On a $\quad f' = 4b^6x^3 - 2b^2c^2x\,(y^4 - 3b^2y^2 + b^4) = 0,$

d'où d'abord la solution $x = 0$ qui indique qu'aux points B et B′ les tangentes à la courbe sont parallèles à ox.

Ayant supprimé cette solution et divisé par b^2c^2 on a

$$2b^4x^2 - c^2(y^2 - 2b^2)(y^2 - b^2) = 0,$$

qui est satisfaite pour une valeur de y comprise entre les deux droites $y = \pm b$.

La courbe ne renferme dans son équation que des puissance paires de x et de y; elle est donc symétrique par rapport aux axes de coordonnées, et l'origine est au centre.

L'équation (6) bicarrée en x^4 est

$$b^6x^4 - x^2(a^2b^2y^4 + 2b^6c^2 - 3a^2b^4y^2) - c^4(y^2 - b^2)^3 = 0$$

ou $b^6x^4 - b^2(y^2 - b^2)(a^2y^2 - 2b^2c^2)\,x^2 - c^4(y^2 - b^2)^3 = 0.$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut avoir

$$b^4(y^2 - b^2)^2(a^2y^2 - 2b^2c^2)^2 + 4b^6c^4(y^2 - b^2)^3 \geq 0$$

ou $$b^4(y^2 - b^2)^2[a^4y^4 - 4a^2b^2c^2y^2 + 4b^2c^4y^2] \geq 0$$

ou $$b^4y^2(y^2 - b^2)^2[a^4y^2 - 4b^4c^2] \geq 0$$

ou $$b^4y^2(y^2 - b^2)^2(a^2y - 2b^2c)(a^2y + 2b^2c) \geq 0.$$

Pour que cette quantité soit positive, il faut et il suffit que l'on ait $$a^4y^2 - 4b^4c^2 \geq 0.$$

Il n'y a donc pas de points de la courbe entre les deux parallèles à ox $$y = \pm \frac{2b^2c}{a^2}.$$

Ces deux parallèles, construites sur la figure, sont comprises entre les deux droites $y = \pm b$.

Car la condition $$\frac{2b^2c}{a^2} \leq b$$

revient à celle-ci $(b - c)^2 \geq 0$ qui est évidente.

D'ailleurs le signe de la somme des racines de l'équation bicarrée en x dépend de la qualité

$$(y^2 - b^2)(a^2y^2 - 2b^2c^2).$$

Si $y^2 - b^2$ est < 0, pour que la somme soit positive, il faut que l'on ait $$y^2 - \frac{2b^2c^2}{a^2} < 0$$

ou $$y^2 < \frac{2b^2c^2}{a^2}.$$

Comparant cette quantité à b^2, posant par exemple

$$\frac{2b^2c^2}{a^2} < b^2,$$

on a $$2c^2 < a^2$$

ou $$2c^2 < b^2 + c^2$$

ou enfin $$c^2 < b^2.$$

Nous sommes ainsi amenés à distinguer les trois cas suivants:

1° $c^2 - b^2 > 0$.
2° $c^2 - b^2 = 0$.
3° $c^2 - b^2 < 0$.

PREMIER CAS : $c^2 > b^2$.

Si $(c^2 - b^2)$ est > 0 il existe, pour toutes les valeurs de y comprises entre les parallèles $y = \pm b$, quatre valeurs réelles de x; et, quand y^2 est $> b^2$ deux des valeurs de x seulement sont réelles; les deux autres sont imaginaires. Les tangentes horizontales étant les deux droites

$$y = \pm \frac{2b^2c}{a^2},$$

il n'y pas de points de la courbe entre ces deux parallèles.

Tangentes aux points B *et* B'. — Pour avoir les tangentes en ces points, nous allons transporter les axes au point B, par exemple.

Pour cela il faut dans l'équation du lieu faire

$$x = X$$
$$y = Y + b;$$

celle-ci devient

$$b^6X^4 - b^2[(Y+b)^2 - b^2][a^2(Y+b)^2 - 2b^2c^2]X^2$$
$$- c^4[(Y+b)^2 - b^2]^2 = 0$$

ou $$b^6X^4 - b^2[Y^2 + 2bY][a^2Y^2 - 2a^2bY + a^2b^2 - 2b^2c^2]$$
$$- c^4[Y^2 + 2bY]^2 = 0$$

L'ensemble des termes de degré le moins élevé est

$$b^4YX^2(c^2 - b^2) - 4c^4Y^4 = 0,$$

ce qui donne d'abord la droite $Y = 0$, solution déjà trouvée; et les deux autres tangentes sont

$$Y^2 = (c^2 - b^2)\frac{b^2}{4c^4}x^2.$$

On voit encore par là que : si $c^2 > b^2$ les tangentes en ces points sont réelles; si $c^2 < b^2$ elles sont imaginaires. La courbe a donc dans ce cas la forme que lui donne la figure 1.

DEUXIÈME CAS : $c^2 = b^2$.

Dans ce cas, les tangentes aux points B et B' sont données par l'équation $Y^3 = 0$ ou, en revenant aux anciens axes de coordonnées, $(y - b)^3 = 0$.

Ceci prouve que les parallèles à Ox menées par les points B et B' sont des tangentes triples de la courbe.

Quand $y^2 - b^2$ est négatif, les valeurs de x sont imaginaires toutes les quatre ; et deux des valeurs de x seulement sont réelles quand $y^2 - b^2 > 0$.

La courbe a donc dans ce cas la forme que lui donne la figure 2.

TROISIÈME CAS : $c^2 < b^2$.

Quand on a $c^2 < b^2$, les tangentes aux points B et B' autres que les droites $y = \pm b$, sont imaginaires ; car elles sont données par l'équation

$$Y^2 = (c^2 - b^2)\frac{b^2}{4c^4}x^2,$$

qui prouve que les parallèles menées par B et B' à Ox sont des tangentes imaginaires de la courbe.

D'ailleurs, d'après la discussion, faite précédemment, de l'équation du quatrième degré en x, les quatre valeurs de x correspondant aux valeurs de y comprises entre les parallèles à Ox menées par les points B et B' sont imaginaires ; et, en dehors de ces deux parallèles il y a seulement deux valeurs réelles de x. Les boucles de la figure 1 disparaissent et la courbe a encore la forme de la figure 2 ; mais les tangentes parallèles à Ox aux points B et B' ne sont plus des tangentes triples de la courbe, comme dans le cas précédent.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Mettental, à Besançon.

QUESTIONS

POSÉES AUX EXAMENS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1882 (1er degré).

1. — *Trouver, sans employer l'équation en* S, *la direction des axes de la surface* $x^2 - 2yz = 1$.

L'équation étant

$$f(x_1y_1z) = \varphi(x_1y_12) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + \mu = 0,$$

les directions principales sont les génératrices communes aux deux cônes $\dfrac{\varphi'_x}{x} = \dfrac{\varphi'_y}{y} = \dfrac{\varphi'_z}{z}$

2. — *Discuter les diverses surfaces représentées par l'équation:* $z = x^2 + y^2 - 2\lambda xy + x - y + 1$ *quand on suppose que* λ *est variable. — Quelles sont les valeurs de* λ *pour lesquelles cette surface représente un paraboloïde elliptique?*

3. *On donne deux axes rectangulaires* ox, oy*; soit* A *un point dont les coordonnées sont* 1 *et* 2*; soit* A' *son symétrique par rapport à* o*, trouver l'équation d'une hyperbole équilatère ayant les points* AA' *pour sommets réels.*

4. — *Former le développement de* $\frac{1}{(x^2 - 1) f(x)}$, $f(x) = 0$ *ayant pour racines* $\alpha, \beta \ldots \gamma$.

5. — *Trouver, sans employer la règle de l'Hôpital, la limite de* y, $y = \frac{a^x}{x}$ *quand* x *tend vers l'infini.*

On supposera d'abord que x tend vers l'infini par des valeurs entières; soit $a = 1 + \alpha$: (α étant positif) la formule du binôme peut s'appliquer au développement de $(1 + \alpha)^x$ et il en résulte notamment

$$(1 + \alpha)^x > 1 + \alpha x + \frac{x(x - 1)}{2} \alpha^2;$$

par suite $$y > \frac{1}{x} + \alpha + \frac{x - 1}{2} \alpha.$$

Quand x croît au delà de toute limite, le second membre de l'inégalité précédente croît pour des raisons évidentes, au delà de toute limite. Ainsi y croît lui-même au delà de toute limite.

On examine ensuite le cas où x tend vers l'infini par des valeurs quelconques et l'on ramène ce cas au précédent en observant que tout nombre x, non entier, est toujours compris entre deux nombres entiers consécutifs. Enfin on aura à considérer le cas où x tend vers $-y$ et celui où b est plus petit que 1. On ramène sans difficulté ces différents cas au précédent.

6. — *On donne un plan par ses traces, rendre ce plan de front par une seule rotation. Nouvelle projection verticale d'un point du plan.*

7. — *Trouver l'angle de deux plans qui passent par un point* m, m', *et par deux droites* D, D' *situées dans le même plan horizontal. Résoudre la question en imaginant la construction qui exige aussi peu de lignes qu'il est possible.*

8. — *Exprimer qu'un cône est de révolution en faisant voir que ses génératrices font un angle constant avec une droite fixe passant par le sommet du cône.*

9. — *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un des facteurs soit nul.*

La proposition est admise comme évidente pour des facteurs réels. Examinons d'abord le cas de deux facteurs imaginaires.

Soit $$U = (a + bi)(a' + b'i),$$
c'est-à-dire $$U = aa' - bb' + (ab' + ba')i;$$
si l'on suppose $U = 0$ on a donc
$$aa' - bb' = 0 \qquad (1)$$
$$ab' + ba' = 0$$
si a' et b' ne sont pas nuls à la fois, ces équations linéaires et homogènes en a' et b' admettent une solution différente de zéro; le déterminant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$
doit être nul, ainsi $$a^2 + b^2 = 0,$$
d'où $$a = 0 \quad b = 0.$$

Réciproquement, si $a = 0$, les équations (1) sont vérifiées et l'on a $U = 0$.

Il reste à généraliser cette proposition et à l'étendre à un produit de p facteurs imaginaires; p étant un nombre entier quelconque. Ceci se fait sans difficulté en multipliant *successivement* les facteurs du produit.
$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i)\,\ldots\,(a_p + b_p i)$$
jusqu'à ce qu'on trouve un résultat nul. A cet instant on applique la remarque faite tout à l'heure, pour deux facteurs.

10. — *Condition pour que les deux faisceaux*
$$Ax^2 + + 2Bxy + Cy^2 = 0$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$
soient harmoniques.



En coupant par la droite $y = 1$ en deux équations du second degré dont les racines $\alpha\beta$, pour la première ; $\alpha'\beta'$, pour l'autre, satisfont à la relation

$$2(\alpha\beta + \alpha'\beta') = (\alpha + \alpha')(\beta + \beta'),$$

on trouve ainsi les conditions

$$2BB' = AC' + CA'.$$

ERRATUM

A la fin de la page 128 et pour la suivante corriger et remplacer la fin de l'article par ce qui suit :

or les deux premières relations donnent comme valeurs proportionnelles de α, β, γ, les expressions

$$l(-lA + mB + nC)$$
$$m(lA - mB + nC)$$
$$n(lA + mB - nC)$$

que je représente par

$$l.L$$
$$m.M$$
$$n.N$$

donc le lieu du centre a pour équation

$$\sqrt{A_1.L} + \sqrt{B_1.M} + \sqrt{C_1.M} = 0,$$

ce qui prouve : que le lieu est une conique tangente aux trois droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés du triangle primitif ; nous laissons au lecteur le soin de fixer en détail la situation et la forme du lieu géométrique ; notre seul but était d'indiquer un procédé qui peut servir dans beaucoup de questions.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 13542-2

TRANSFORMATIONS RÉCIPROQUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 49, 77 et 97.)

17. — La transformation que nous étudions appartient au genre des transformations de *Magnus*; elles sont définies par les formules $x = \dfrac{U}{W}$, $y = \dfrac{V}{W}$, U, V, W étant des fonctions du second degré en X, Y. Dans les transformations de cette espèce, à une courbe *f*, de degré *m*, correspond, en général, et comme nous l'avons fait remarquer plus haut, une courbe F, de degré $2m$. Mais la courbe F peut être d'un degré moindre et nous nous proposons d'indiquer maintenant les causes qui font abaisser le degré de la transformée. Nous ferons voir ainsi comment, par suite de cet abaissement, nous avons été conduit à la construction de l'ellipse, point par point, au moyen d'une équerre, construction que nous avons exposée au début de ce travail.

18. — Pour plus de clarté dans les développements qui vont suivre, nous rappelons que nous avons nommé *pôle principal* celui des deux points donnés d'où partent les rayons vecteurs; le second point donné pour cette transformation sera nommé *pôle secondaire*. Les axes de coordonnées sont, comme précédemment, la ligne des pôles qui est prise pour axe des x, et la perpendiculaire élevée à cette droite au milieu de la ligne des pôles.

19. Théorème. — *Lorsque la courbe* f *passe par le pôle principal, le degré de la courbe transformée* F *est abaissé d'une unité.*

Les formules établies plus haut (p. 78)

$$(A)\left\{\begin{aligned} \frac{x}{d} &= \frac{Y^2 - X^2 + d^2}{d^2 - X^2 - Y^2} \\ \frac{y}{d} &= \frac{2Y(d - X)}{d^2 - X^2 - Y^2} \end{aligned}\right.$$

donnent $$\frac{y}{x+d} = \frac{Y}{X+d},$$
formule qui a d'ailleurs servi à les établir.

Si la courbe f passe par le pôle principal, on a
$$yf_1(x, y) = (x+d) f_2(x, y), \qquad (1)$$
f_1 et f_2 étant des fonctions entières en x et y, l'une et l'autre de degré $(m-1)$, tout au plus, en supposant f de degré m.

Or, si dans une fonction entière $\varphi(x, y)$, de degré m, on remplace x et y par les formules de Magnus
$$x = \frac{V}{W}, y = \frac{U}{W},$$
$\varphi(x, y)$ devient $\frac{\Phi(X, Y)}{W^m}$, Φ étant en général de degré $2m$, dans tous les cas, Φ ne peut pas être d'un degré supérieur.

D'après cette remarque, l'équation (1) deviendra
$$\frac{Y}{X+d} \frac{F_1(X, Y)}{W^{m-1}} = \frac{F_2(X, Y)}{W^{m-1}},$$
F_1 et F_2 étant de degré $(2m-2)$. L'équation transformée
$$YF_1(X, Y) = (X+d)F_2(X, Y)$$
est donc de degré $(2m-1)$ seulement. On voit aussi que cette courbe passe par le pôle principal.

20. — Théorème. — *Si la courbe* f *passe par le pôle secondaire, le degré de la courbe transformée* F *est abaissé d'une unité.*

Les formules (A) donnent
$$\frac{y}{x-d} = \frac{X-d}{Y} \quad (*)$$

Si la courbe f, qu'on transforme, passe par le pôle secondaire, son équation peut s'écrire
$$yf_1(x, y) = (x-d)f_2(x, y)$$
et, en raisonnant comme nous l'avons fait pour établir le théorème précédent, on voit que le degré de la transformée F est seulement égal à $(2m-1)$.

21. — Théorème. — *Si la courbe qu'on transforme* f, *passe par le pôle secondaire, normalement à la ligne des pôles, le degré de la transformée est abaissé de deux unités.*

(*) Voir p. 78.

L'équation de f est alors

$$y^2 f_1(x, y) = (x - d) f_2(x, y).$$

Les formules (A) donnent d'ailleurs

$$\frac{y^2}{d(x-d)} = \frac{2(X-d)^2}{W}$$

en posant, $\quad W = d^2 - X^2 - Y^2.$

D'autre part, et d'après la remarque que nous avons faite tout à l'heure, $f(x, y)$ devient $\frac{F_1(X, Y)}{W^{m-2}}$; et, puisque f_1 est de degré $(m - 2)$ seulement, F_1 est de degré $(2m - 4)$. De même $f_2(x, y)$ devient $\frac{F_2(X, Y)}{W^{m-1}}$, F_2 étant de degré $(2m - 2)$.

L'équation transformée est donc

$$\frac{2d(X-d)^2}{W} \cdot \frac{F_1(X, Y)}{W^{m-2}} = \frac{F_2(X, Y)}{W^{m-1}}$$

ou $\quad 2d(X - d)^2 F_1(X, Y) = F_2(X, Y).$

Ce que nous venons de dire du degré des fonctions F_1 et F_2 prouve que cette équation est seulement de degré $(2m - 2)$.

22. — Corollaire I. — *A une courbe de degré* m *on peut, à volonté, faire correspondre des courbes de degré* 2m, (2m — 1), (2m — 2), *ou enfin* (2m — 3).

23. — Corollaire II. — *A une conique on peut faire correspondre une quartique, une cubique, une conique, ou une droite suivant le choix que l'on fait des pôles.*

24. — On comprend maintenant comment, en disposant des pôles conformément à la remarque précédente, on peut faire correspondre une droite à une conique et construire celle-ci point par point au moyen d'une équerre.

En faisant passer la conique: 1° par le pôle principal; 2° par le pôle secondaire; 3° normalement à la ligne des pôles en ce point, la transformée qui est au plus de degré 4, s'abaisse de trois unités. Ainsi à la conique correspond une droite. Si de plus on fait passer la conique par le pôle principal, mais normalement à la ligne des pôles, la symétrie exige que la droite transformée soit perpendiculaire à la

ligne des pôles; et c'est ainsi qu'en cherchant à favoriser, *autant qu'il est possible*, la transformation d'une conique, dans ce système de transformation, nous avons trouvé la construction que nous venons de rappeler.

25. — Au cercle décrit sur la ligne des pôles comme diamètre correspond la droite de l'infini. Si l'on considère des cercles passant par le pôle secondaire, ayant leur centre sur la ligne des pôles, mais ne passant pas par le pôle principal, la transformée est nécessairement une conique (21). Il est facile de reconnaître soit par la géométrie, soit au moyen des formules de transformation, que cette transformée est un cercle. Le pôle principal est le centre de similitude de ces deux cercles, qui sont d'ailleurs tangents l'un à l'autre au pôle secondaire.

26. — Théorème. — *A une conique* Δ, *passant par les deux pôles, correspond une conique* Δ' *qui, elle aussi, passe par ces points et ces deux courbes jouissent de cette propriété, que si l'on fait tourner les axes de l'une de 45°, ils deviennemt parallèles à ceux de la seconde conique.*

En effet à la conique Δ

$$x^2 - d^2 = y\,(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

correspond la conique Δ'

$$X^2 - d^2 = Y\,(\alpha' X + \beta' Y + \gamma')$$

en posant

$$-\alpha' = 2d\,\frac{\beta + 1}{\alpha d + \gamma},$$

$$\beta' = \frac{\alpha d - \gamma}{\alpha d + \gamma},$$

$$\gamma' = \frac{2d^2\,(\beta - 1)}{\alpha d + \gamma},$$

et l'on peut facilement vérifier que les axes de la première sont parallèles aux bissectrices des axes de la seconde.

27. — *Construction des axes et des sommets d'une conique* Δ *définie par cinq points.*

Parmi les cinq points donnés, nous en distinguons un en particulier, le point O', qui sera le pôle secondaire de notre transformation. On peut, par le théorème de Pascal, déterminer, avec une règle, la tangente à Δ au point O' et, avec

une équerre, la normale qui sera prise pour ligne des pôles. Cette droite rencontre la conique en un point O, que le théorème de Pascal permet encore de déterminer. C'est le point O qui sera le pôle principal.

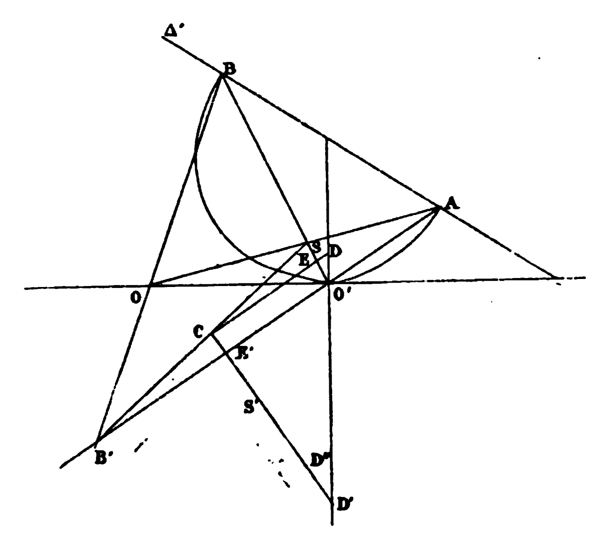


Fig. 7.

Si maintenant avec ces points O et O' on transforme les points donnés, et il y en a quatre indépendamment de O', on obtiendra quatre points en ligne droite; soit Δ' cette droite transformée de Δ.

Aux cercles qui sont bitangents à Δ et dont l'un des points de contact est le point O' correspondent des cercles tangents à Δ' et coupant O'O normalement au point O' (25). On obtient ainsi, et comme l'indique la figure, les deux cordes principales O'A', O'B', du point O'. On détermine donc, par cette construction simple, le centre C, et les axes en position sont les droites CD, CD'.

Pour trouver les sommets, il faut observer que l'on a les relations, S, S' étant les points inconnus

$$\overline{CS}^2 = CD.CE, \qquad \overline{S'C}^2 = CE'.CD',$$

qui permettent de les obtenir facilement.

28. — *Détermination du cercle de courbure en un point d'une conique définie par cinq points.*

Si l'on considère le cercle U de courbure au point O', ce cercle se transforme en un cercle U', qui passe par O' normalement à O'O et qui, pour des raisons évidentes, passe aussi par le point commun à Δ' et à OO' Le cercle U est en

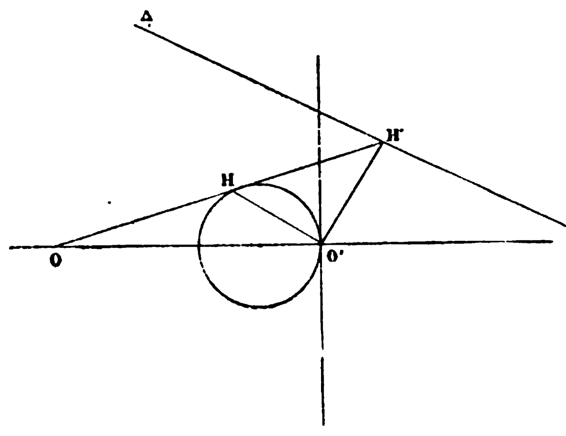


Fig. 8.

effet caractérisé par cette propriété que trois de ses points d'intersection avec Δ sont confondus en O'. Il faut donc que le cercle transformé U' rencontre Δ' en deux points dont l'un est confondu avec le point de rencontre de Δ' et de OO'.

Quant à l'autre point, il coïncide donc d'après cette remarque avec la projection de O' sur Δ'. Soit H' ce point (*fig. 8*); en transformant H' le point H appartient au cercle de courbure qui est donc déterminé par le point H, et le contact en O' avec la perpendiculaire à la ligne des pôles.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Pour déterminer le centre d'une conique dont l'équation en coordonnées cartésiennes est

$$f(x, y) = 0,$$

on prend habituellement l'intersection des deux droites dont les équations sont

$$f'_x(x, y) = 0; \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Mais cette règle pratique doit être entendue en ce sens que le centre est l'intersection de deux diamètres de la courbe; et il n'est pas indispensable de prendre les deux diamètres qui sont conjugués l'un à ox, l'autre à oy; souvent même l'équation de la conique peut fournir deux diamètres distincts dont l'emploi sera plus commode; nous indiquerons l'exemple suivant.

Désignons par A, B, et C les trois fonctions linéaires

$$ax + a'y + a'' = A$$
$$bx + b'y + b'' = B$$
$$cx + c'y + c'' = C$$

et supposons en outre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro; l'équation

$$\alpha^2A^2 + \beta^2B^2 + \gamma^2C^2 - 2\beta\gamma BC - 2\gamma\alpha CA - 2\alpha\beta AB = 0$$

est, pour chaque système de valeurs des paramètres α, β. γ, l'équation d'une conique inscrite au triangle dont les côtés ont pour équations respectives

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

proposons-nous de déterminer le centre de cette courbe.

L'équation de la conique peut s'écrire

$$(\alpha A + \beta B - \gamma C)^2 - 4\alpha\beta \,.\, AB = 0,$$

ce qui met en évidence deux tangentes et leur corde de contact; si nous menons par le point de concours de ces deux

tangentes deux droites

$$\lambda A + \mu B = 0 \qquad (1)$$
$$\lambda A - \mu B = 0 \qquad (2)$$

et si la première est parallèle à la corde de contact, la seconde sera un diamètre; or, pour que les droites

$$\lambda A + \mu B = 0$$
$$\alpha A + \beta B - \gamma C = 0$$

soient parallèles, il faut la condition

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\beta - c\gamma & a'\alpha + b'\beta - c'\gamma \\ a\lambda + b\mu & a'\lambda + b'\mu \end{vmatrix} = 0,$$

qui devient, après calcul,

$$(n\beta + m\gamma)\lambda - (n\alpha + l\gamma)\mu = 0;$$

donc la droite (2) a pour équation

$$\begin{vmatrix} A & B \\ n\beta + m\gamma & n\alpha + l\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ou bien $\quad nA\alpha - nB\beta + (lA - mB)\gamma = 0.$

(Dans cette équation, nous avons posé

$$bc' - cb' = l$$
$$ca' - ac' = m$$
$$ab' - ba' = n.)$$

On trouvera, par une permutation tournante, l'équation d'un autre diamètre

$$(mB - nC)\alpha + lB\beta - lC\gamma = 0;$$

donc enfin le centre est l'intersection des deux droites

$$\begin{cases} nA\alpha - nB\beta + (lA - mB)\gamma = 0, \\ (mB - nC)\alpha + lB\beta - lC\gamma = 0. \end{cases}$$

Cela posé, si on demande le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et passent en outre par un point donné, ce lieu s'obtiendra de la manière suivante :

Désignons par A_1, B_1, C_1 les valeurs que prennent, pour le point donné, les fonctions linéaires A, B, C; puis éliminons α, β, γ entre les équations homogènes

$$\left[\begin{array}{l} nA\alpha - nB\beta + (lA - mB)\gamma = 0 \\ (mB - nC)\alpha + lB\beta - lC\gamma = 0 \\ \sqrt{\alpha A_1} \quad \sqrt{\beta B_1} + \sqrt{\gamma C_1} = 0 \end{array}\right.$$

Or les deux premières relations donnent comme valeurs proportionnelles de α, β, γ, les expressions suivantes:

$$l^2A, \ m^2B, \ n^2C;$$

donc le lieu des centres a pour équation

$$\sqrt{A_1 l^2 . A} + \sqrt{B_1 m^2 . B} + \sqrt{C_1 n^2 . C} = 0;$$

ce qui nous apprend que le lieu est une conique qui passe par le point donné et est inscrite au même triangle que toutes les coniques dont elle contient les centres. Nous n'avions pas pour objet spécial d'indiquer ces résultats si faciles à prévoir par la géométrie des coniques; nous voulions seulement indiquer un procédé de recherche qui sera utile dans beaucoup d'autres questions.

Un abonné.

NOTE

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

Par M. **Aug. Daguillon**, élève de l'École normale supérieure.

Cet article a pour but de montrer comment la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques permet quelquefois de résoudre le problème de mener la tangente en un point d'une courbe algébrique.

Résolvons préalablement cette question :

Étant donnée l'équation d'une courbe $f(x, y) = 0$, *les coordonnées* α *et* β *du pôle et la puissance* μ *d'inversion, trouver l'équation de la courbe inverse de la courbe donnée (les axes étant d'ailleurs rectangulaires).*

Soit M un point de la courbe donnée, de coordonnées x et y. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point P; les formules de transformation seront

$$x = x_1 + \alpha,$$
$$y = y_1 + \beta,$$

x_1 et y_1 désignant les nouvelles coordonnées du point P; et l'équation de la courbe deviendra

$$f(x_1 + \alpha, y_1 + \beta) = 0.$$

Si nous passons en coordonnées polaires, le pôle étant en

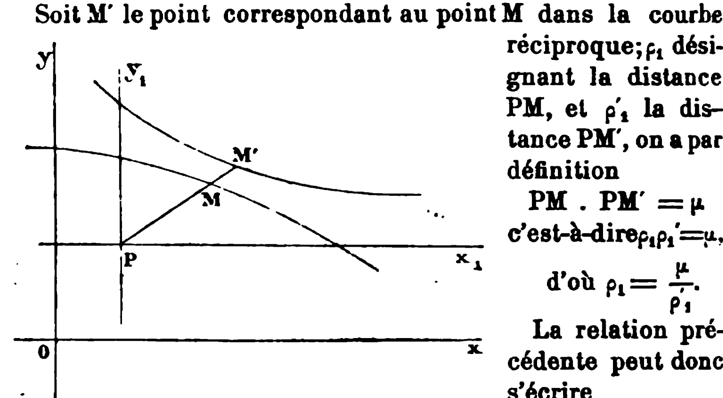
P et ox_1 étant l'axe polaire, au moyen des formules

$$x_1 = \rho_1 \cos \omega,$$
$$y_1 = \rho_1 \sin \omega,$$

l'équation de la courbe pr endra la forme

$$f(\rho_1 \cos \omega + \alpha, \rho_1 \sin \omega + \beta) = 0.$$

Soit M' le point correspondant au point M dans la courbe réciproque; ρ_1 désignant la distance PM, et ρ'_1 la distance PM', on a par définition



$$PM \cdot PM' = \mu$$

c'est-à-dire $\rho_1 \rho_1' = \mu$,

d'où $\rho_1 = \frac{\mu}{\rho_1'}$.

La relation précédente peut donc s'écrire

$$f\left(\frac{\mu \cos \omega}{\rho_1'} + \alpha, \frac{\mu \sin \omega}{\rho_1'} + \beta\right) = 0$$

et sous cette forme elle représente l'équation polaire de la courbe réciproque cherchée. Si nous voulons en avoir l'équation cartésienne, les formules de transformation seront

$$\cos \omega = \frac{x_1'}{\rho_1'} \quad \sin \omega = \frac{y_1'}{\rho_1'} \quad \rho_1'^2 = x_1'^2 + y_1'^2$$

et il viendra

$$f\left(\frac{\mu x_1'}{x_1'^2 + y_1'^2} + \alpha, \frac{\mu y_1'}{x_1'^2 + y_1'^2} + \beta\right) = 0.$$

Enfin, si nous revenons au premier système d'axes, cette équation se mettra sous la forme

$$f\left(\frac{\mu(x' - \alpha)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} + \alpha, \frac{\mu(y' - \beta)}{(x' - \alpha)^2 = (y' - \beta)^2} + \beta\right) = 0$$

On voit donc que, pour avoir l'équation de la courbe réciproque d'une courbe donnée, α et β étant les coordonnées du pole, μ la puissance d'inversion, il suffit de faire dans l'équation de la courbe donnée

$$x = \frac{\mu(x' - \alpha)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} + \alpha,$$

$$y = \frac{\mu(y' - \beta)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} + \beta,$$

x' et y' désignant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe réciproque.

Dans le cas où le pôle est à l'origine des coordonnées, ces formules se simplifient :

$$x = \frac{\mu x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{\mu y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Ceci posé, on sait que si l'on considère deux points M et M de deux courbes inverses situés sur un même rayon vecteur les tangentes en ces points font des angles égaux avec ce rayon vecteur. Si donc on peut construire simplement la tangente au point M, on en déduira aisément la tangente en M'. Prenons un exemple

Soit une parabole $y^2 - 2px = 0$. *Cherchons quelle en est l'inverse, le pôle étant au sommet de la parabole.*

Les formules de transformation seront

$$x = \frac{\mu x'}{x'^2 + y'^2} \quad y = \frac{\mu y'}{x'^2 + y'^2}$$

et la courbe réciproque aura pour équation

$$\frac{\mu^2 y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} = \frac{2p\mu x'}{x'^2 + y'^2}$$

ou $$\mu y'^2 = 2px'(x'^2 + y'^2). \tag{1}$$

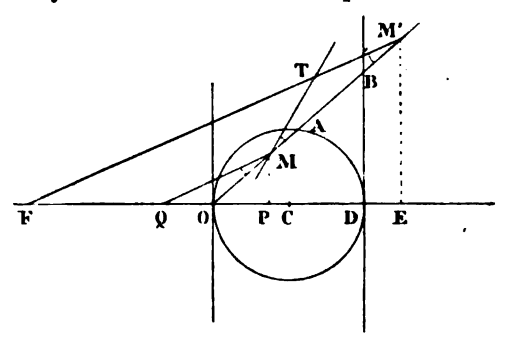
D'autre part, l'équation de la cissoïde définie par un cercle de rayon a, ayant son centre sur l'axe de la parabole, et passant en son sommet, celui-ci étant le point de rebroussement de la cissoïde, serait

$$2ay^2 = x(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) étant de même forme, on voit que la figure inverse de la parabole est une cissoïde. Inversement, si on se donne cette dernière courbe et le paramètre p d'une parabole, on peut toujours déterminer une puissance μ d'inversion telle que la cissoïde soit la figure inverse de la parabole; il suffit pour cela d'identifier les équations (1) et (2), ce qui donne

$$\frac{2p}{\mu} = \frac{1}{2a} \text{ d'où } \mu = 4pa.$$

Ayant alors construit un point M de la cissoïde, si l'on voulait déterminer la tangente en ce point, il suffirait de chercher sur le rayon vecteur OM le point correspondant M' de la parabole, de mener en ce point la tangente à la parabole, et de



faire en M avec MM' un angle TMM' = TM'M; mais ici il est bon de remarquer que, toutes les paraboles de même axe et de même sommet étant homothétiques, et ayant par suite des tangentes parallèles en leurs points homologues, on peut prendre arbitrairement le point M' sur le prolongement de OM. La construction s'achève en abaissant M'E perpendiculaire sur OD, prenant OF = OE, et joignant M'F, ce qui donne la direction de la tangente à la parabole; il suffit alors de faire TMM' = TM'M pour avoir la tangente à la cissoïde.

En particulier, on peut supposer que le point M' se confonde avec M; alors la construction se réduit à ceci : prendre à gauche du point O une longueur OQ égale à l'abscisse du point M; joindre QM et tracer la droite MT, symétrique de QM par rapport à OM.

Voici un nouvel exemple de l'application que l'on peut faire de la méthode d'inversion par rayons vecteurs réciproques au tracé des tangentes aux courbes algébriques.

On sait que la *lemniscate de Bernouilli* est le lieu des points tels que le produit des distances de chacun d'eux aux points fixes F et F' soit égal au carré de la moitié de la longueur FF'.

L'équation de cette courbe, rapportée à la droite FF' et à la perpendiculaire Oy élevée en son milieu, est la suivante:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

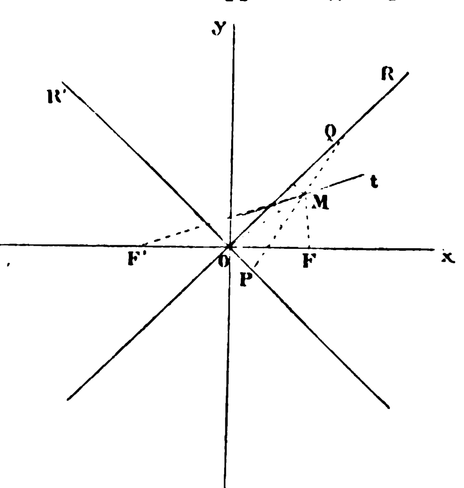
Prenons le point O pour pôle, et soit μ la puissance d'inversion ; la courbe réciproque de la lemniscate proposée aura, en vertu des formules de passage que nous avons indiquées dans un précédent article, pour équation

$$x^2 - y^2 - \frac{\mu^2}{2a^2} = 0.$$

Ce sera donc une hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Ceci nous conduit à la construction suivante :

Soit M un point de la lemniscate. Supposons (ce qui est toujours possible) que nous ayons choisi μ de telle sorte que le point M se confonde avec son inverse M', et soient OR, OR' les bissectrices des angles des axes, asymptotes de l'hyperbole à laquelle appartient M'. La tangente à l'hyperbole en ce point s'obtient facilement en menant une droite PMQ telle que PM = MQ. La tangente à la lemniscate sera une droite, MT faisant avec le rayon vecteur OM un angle égal et de sens contraire à OMP.



ETUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir page 89.)

DE LA LIGNE DROITE

Equation de la ligne droite en coordonnées trilinéaires. — L'équation $Ax + By + C = o$ se transformant en une équation homogène du même degré en coordonnées trilinéaires, toute droite a une équation de la forme

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = o$$

où m, n, p sont des constantes.

On peut d'ailleurs établir ce théorème directement comme il suit : $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ *étant les équations en coordonnées rectilignes de trois droites non concourantes, toute droite du plan est comprise dans l'équation* $m\alpha + n\beta + p\gamma = o$.

En effet, cette équation représente des droites, puisqu'elle est du premier degré en x et y; elle contient deux paramètres arbitraires qui sont les rapports de deux quelconques des quantités m, n, p à la troisième; on peut donc profiter de l'indétermination de ces deux paramètres pour faire passer la droite que représente l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma$ o par deux points $(x'\ y')$, $(x''\ y'')$ pris à volonté.

Si l'on désigne par α', β', γ', α'', β'', γ'', ce que deviennent les fonctions linéaires α, β, γ, quand on y remplace x et y respectivement par x' et y', x'' et y'', on aura, pour déterminer les deux paramètres dont il s'agit, les deux conditions

$$m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = o,$$
$$m\alpha'' + n\beta'' + p\gamma'' = o.$$

Il y aura toujours une solution unique et bien déterminée, à moins que les quantités α', β', γ', α'', β'', γ'', ne satisfassent aux relations $\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\gamma'}{\gamma''}$.

Or, ces conditions expriment précisément que les trois droites

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ passent par un même point, ce qui est contraire à l'hypothèse (*).

Si elles étaient remplies, il y aurait une infinité de valeurs pour les trois paramètres à déterminer, et alors l'équation $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$ représenterait toutes les droites passant par le point de concours des trois droites $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

— *Équations des axes de référence.* — Ces équations sont respectivement, quels que soient les paramètres de référence:

pour BC : $\alpha = 0$; pour AC : $\beta = 0$; pour AB : $\gamma = 0$.

Car, pour tous les points de la première de ces droites, par exemple, et pour ces points seulement, on doit avoir $MP = 0$; or $MP = \frac{\alpha}{\lambda}$, et comme le paramètre de référence n'est pas infini, il en résulte $\alpha = 0$.

Ces équations sont comprises dans l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, en y supposant nulles deux des trois constantes m, n, p.

— *Équation d'une droite passant par l'un des sommets du triangle de référence.* — L'équation d'une droite passant, par exemple, par le sommet A, doit être vérifiée par les coordonnées de ce sommet, qui sont $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; la constante m de l'équation générale doit donc être identiquement nulle, ce qui donne une équation de la forme

$$n\beta + p\gamma = 0 \text{ ou } \beta = K\gamma,$$

K étant un paramètre arbitraire.

De même, les droites passant par les sommets B et C ont respectivement pour équations

$$m\alpha + p\gamma = 0, \text{ ou } \gamma = g\alpha$$

et

$$m\alpha + n\beta = 0, \text{ ou } \alpha = f\beta$$

dans lesquelles g et f sont des paramètres arbitraires.

(*) Si l'on désigne par $-\lambda$ la valeur commune des trois rapports $\frac{\alpha'}{\alpha''}, \frac{\beta'}{\beta''}, \frac{\gamma'}{\gamma''}$, le point par lequel passeraient alors les trois droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ aurait pour coordonnées rectilignes $x = \frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}$; c'est-à-dire que ce serait le point qui divise le segment $[(x' y'), (x'' y'')]$ dans le rapport λ.

Ces résultats sont d'ailleurs des conséquences immédiates de la transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées trilinéaires.

On remarquera à ce sujet que, lorsqu'on emploie en coordonnées rectilignes une équation symbolique de la forme $\alpha = 0$, on ne fait, en réalité, qu'employer une équation en coordonnées trilinéaires, la droite considérée étant prise pour l'un des axes de référence, et qu'il en est de même pour une équation de la forme $\alpha + \lambda\beta = 0$, qui représente une droite quelconque passant par celui des trois sommets du triangle de référence dont les coordonnées sont $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Ajoutons qu'on peut déjà constater, dès à présent, combien les coordonnées trilinéaires sont avantageuses dans un grand nombre de questions de géométrie; car, si l'on se reporte à des démonstrations données dans tous les cours et par conséquent trop connues pour que nous y revenions ici, par exemple, pour établir sur les équations symboliques que les bissectrices ou les médianes d'un triangle se coupent en un même point, on reconnaîtra que, dans ce mode de raisonnement, on ne fait au fond que prendre le triangle considéré pour triangle de référence, et écrire les équations en coordonnées trilinéaires de ses bissectrices ou de ses médianes. Or on sait par expérience combien ces démonstrations sont simples et élégantes.

— *Equation générale des droites qui passent par un point donné* $(\alpha', \beta', \gamma')$. — Il faut écrire que l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$ est vérifiée par les coordonnées du point $(\alpha'\beta'\gamma')$. On obtient ainsi la condition

$$m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0.$$

Cette condition détermine l'un des rapports $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ en fonction de l'autre, et si l'on substitue la valeur de n, par exemple, dans l'équation générale, on obtient l'équation cherchée, qui est $m(\alpha\beta' - \beta\alpha') + p(\gamma\beta' - \beta\gamma') = 0$.

Cette équation ne renferme plus que le seul paramètre arbitraire $\frac{m}{p}$. Mais, dans un grand nombre d'applications

on préfère conserver l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, qui contient deux paramètres arbitraires, en y joignant la condition $m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0$, qui relie entre eux ces deux paramètres ; on obtient, en effet, par cette manière d'opérer, des calculs généralement plus symétriques.

— *Equation de la droite qui passe par deux points donnés* $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$. — L'équation générale de la droite étant $m\alpha + n\beta + p\beta = 0$, on devra exprimer qu'elle est vérifiée par les coordonnées des deux points donnés.

On aura donc $$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0 \qquad (1)$$
avec les conditions
$$m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0, \qquad (2)$$
$$m\alpha'' + n\beta'' + p\gamma'' = 0. \qquad (3)$$

Il faut tirer des deux conditions (2) et (3) les valeurs de deux des trois paramètres m, n, p en fonction du troisième, et les reporter dans l'équation (1), où le paramètre qui reste disparaîtra de lui-même comme facteur commun. Ce calcul n'est autre chose que l'élimination de m, n, p entre les trois équations linéaires et homogènes (1), (2), (3), et par conséquent il donne pour résultat l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

qui est celle de la droite passant par les deux points donnés.

Cette équation ne prendrait la forme indéterminée que si les trois mineurs

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

étaient simultanément nuls, ce qui donnerait

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\gamma'}{\gamma''},$$

et les trois axes de référence devraient être alors des droites concourantes, ce qui est contraire à l'hypothèse fondamentale.

Corollaire. — *Coordonnées trilinéaires du point qui divise un segment donné* $[(\alpha'\beta'\gamma'), (\alpha''\beta''\gamma'')]$ *dans un rapport donné.* —

L'équation de la droite qui passe par deux points peut être écrite sous la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\alpha' + \lambda\alpha''}{1+\lambda} & \frac{\beta' + \lambda\beta''}{1+\lambda} & \frac{\gamma' + \lambda\gamma''}{1+\lambda} \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

en supposant $1 + \lambda$ différent de o.

Cette droite renferme donc tous les points dont les coordonnées sont exprimées par les formules

$$\alpha = \frac{\alpha' + \lambda\alpha''}{1+\lambda}, \quad \beta = \frac{\beta' + \lambda\beta''}{1+\lambda}, \quad \gamma = \frac{\gamma' + \lambda\gamma''}{1+\lambda},$$

où λ est un paramètre variable, en y comprenant même le point correspondant à la valeur $\lambda = -1$, dont les coordonnées sont infinies, et que l'on peut regarder comme le point à l'infini sur la droite.

Quelle est la signification géométrique du paramètre λ? Il est facile de reconnaître qu'il exprime le rapport dans lequel le point mobile M divise le segment M′ M″. En effet, de la formule $\alpha = \frac{\alpha' + \lambda\alpha''}{1+\lambda}$ on tire $\lambda = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha'' - \alpha}$.

Si R est le paramètre de référence relatif à l'axe BC, on aura, en appelant P, P′, P″ les pieds des pyramides abaissées respectivement des points M, M′ M″, sur cet axe de référence:

$$\lambda = \frac{R.MP - R.M'P'}{R.M''P'' - R.MP},$$

c est-à-dire

$$\lambda = \frac{MP - M'P'}{M''P'' = MP} = \frac{MG}{M''D} = \frac{M'M}{MM''}, \text{ c. q. f. d.}$$

Les conséquences géométriques de la formule $x = \frac{x' + \lambda x''}{1+\lambda}$ s'étendent donc complètement aux coordonnées trilinéaires, puisque la signification du paramètre λ reste la même dans ce nouveau système.

Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Le rapport anharmonique de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, situés en ligne droite, est, comme on sait, le quotient du rapport des distances de deux de ces points au troisième par le

rapport des distances des deux premiers points au quatrième. En employant la notation connue (M_1, M_1, M_3, M_4), le rapport désigné par cette notation est $\frac{M_3 M_1}{M_3 M_2} : \frac{M_4 M_1}{M_4 M_2}$.

Or, nous venons de voir qu'on a

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \text{ et } \frac{M_4M_1}{M_4M_2} = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2};$$

donc

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} : \frac{M_4M_1}{M_4M_2} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2},$$

formule tout à fait pareille à celle que nous avons déjà trouvée dans les coordonnées tangentielles.

Quand ce rapport est égal à — 1, les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 forment une division harmonique, dans laquelle les points M_1 et M_2, d'une part, M_3 et M_4, d'autre part, sont les points conjugués.

(A suivre.)

QUESTION 369

Solution par M. Lelieuvre, élève au Lycée de Rouen.

On considère une ellipse rapportée à ses axes : soit M *un point de l'ellipse; par le point* M, *le point* M' *diamétralement opposé et les extrémités* AA' *du grand axe on fait passer une hyperbole équilatère* H ; *puis on prend un cercle passant par* M, A *et* A'; *cela posé, l'hyperbole et le cercle ont un quatrième point commun* P; *on mène* MP. *et on demande, le point* M *parcourant l'ellipse, de déterminer la trajectoire orthogonale des droites* MP. *C'est une ellipse ; cette ellipse n'est jamais un cercle et n'est pas non plus homothétique à l'ellipse donnée. On suppose* a > b. (G. L.)

Prenons pour déterminer le point M l'anomalie excentrique φ de ce point. Ses coordonnées sont alors

$$x = a \cos \varphi, \ y = b \sin \varphi.$$

L'équation de l'hyperbole équilatère passant par A, A', M et M' et ayant par suite son centre en O est de la forme

$$x^2 - y^2 + 2Bxy + F = 0.$$

Elle passe par les extrémités du grand axe.

Donc on a $a^2 + F = 0, \quad F = -a^2.$

De plus elle passe par le point M; donc on a

$$a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi + 2Bab \sin \varphi \cos \varphi - a^2 = 0$$

$$2B = \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{ab \cos \varphi}.$$

L'équation est donc

$$x^2 - y^2 + xy \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{ab \cos \varphi} - a^2 = 0.$$

L'équation d'un cercle passant par A et A' est de la forme :

$$x^2 + (y - d)^2 = a^2 + d^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2dy - a^2 = 0.$$

Ce cercle passe par le point M. Donc on a

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - 2bd \sin \varphi - a^2 = 0$$

$$2d = -\frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{b}.$$

L'équation du cercle est donc

$$x^2 + y^2 + \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{b} y - a^2 = 0.$$

Pour avoir le système des sécantes communes, retranchons les deux équations membre à membre :

$$2y^2 + \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{b} y - xy \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{ab \cos \varphi} = 0$$

qui donne $y = 0$ pour AA', et pour la droite MP :

$$y - x \frac{a^2 + b^2}{2ab} \operatorname{tg} \varphi + \frac{a^2 - b^2}{2b} \sin \varphi = 0.$$

Or, considérons une ellipse ayant même direction d'axes que l'ellipse donnée ; soient A et B les longueurs de ces axes. Si on prend un point sur cette ellipse dont l'anomalie soit l'angle φ, la normale à l'ellipse en ce point est

$$y - \frac{A}{B} x \operatorname{tg} \varphi + \frac{A^2 - B^2}{B} \sin \varphi = 0,$$

équation identique à celle de MP. Donc toutes les droites MR sont normales à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant AA' et BB' et sont donnés par les équations

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \quad \frac{A^2 - B^2}{B} = \frac{a^2 - b^2}{2b}.$$

D'ailleurs chaque droite MP est normale à cette ellipse

en un point tel que son anomalie soit la même que celle du point M correspondant de l'ellipse donnée. Il est facile d'avoir A et B; car la première équation donne

$$\frac{A^2 - B^2}{B^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}.$$

On a aussi $$\frac{A^2 - B^2}{B} = \frac{a^2 - b^2}{2b};$$

donc $$B = \frac{2a^2b}{a^2 - b^2},$$

par suite $$A = \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}.$$

On a aussi $$A^2 - B^2 = a^2.$$

Donc les foyers de la trajectoire sont aux points A et A'.

Cette trajectoire n'est jamais un cercle, car si l'on avait $A = B$, il s'ensuivrait :

$$a^2 + b^2 = 2ab, \quad (a - b)^2 = 0, \quad a = b.$$

Or, on suppose $a > b$.

De plus, elle n'est jamais homothétique à l'ellipse donnée, car on aurait alors

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

d'où $a^2 = b^2$. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Le Pont, à Cherbourg.

QUESTION 8

Solution par M. CARTIER, élève au Lycée d'Angoulême.

On considère une ellipse rapportée à ses axes, et le cercle Δ qui, passant par les foyers, est concentrique à cette ellipse. Par un point M, *pris sur le cercle, on mène à l'ellipse deux tangentes qui coupent le cercle aux points* A *et* B, *différents de* M. *Démontrer que* AB *est parallèle au grand axe de l'ellipse.* (G. L.)

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Celle du cercle. $x^2 + y^2 - c^2 = 0$. (A)

Soit (α, β) un point M de ce cercle ; on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2. \qquad (1)$$

L'équation du couple de tangentes menées de ce point à l'ellipse est

$$(\alpha^2 - a^2)(y-\beta)^2 - 2\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta^2 - b^2)(x-\alpha)^2 = 0. \qquad (2)$$

Soit $y = m$ l'équation d'une droite AB.

L'équation du couple de droites qui joignent M aux points A et B où elle coupe A est

$$(m-\beta)^2(x-\alpha)^2 + 2\alpha(m-\beta)(x-\alpha)(y-\beta) + (\alpha^2 + m^2 - c^2)(y-\beta)^2 = 0. \qquad (3)$$

On peut identifier (2) et (3). En effet, on a en même temps pour une valeur convenable de m

$$\frac{(m-\beta)^2}{\beta^2 - b^2} = \frac{\alpha^2 - c^2 + m^2}{\alpha^2 - a^2} = -\frac{m-\beta}{\beta}$$

ou, en remplaçant α^2 par sa valeur tirée de (1),

$$\frac{(m-\beta)^2}{\beta^2 - b^2} = -\frac{m^2 - \beta^2}{\beta^2 + b^2} = -\frac{m-\beta}{\beta}$$

ou
$$\frac{m-\beta}{\beta^2 - b^2} = -\frac{m+\beta}{\beta^2 + b^2} = -\frac{1}{\beta}.$$

Il suffit de prendre $m = \dfrac{b^2}{\beta}$.

La proposition se déduit facilement de là.

On peut remarquer que $\dfrac{b^2}{\beta}$ est l'ordonnée à l'origine de la tangente à l'ellipse menée par le point d'ordonnée β, c'est-à-dire situé sur la parallèle au grand axe menée par M.

Seconde solution par M. GODEFROY, élève au Lycée de Lyon.

On a d'après un théorème connu

angle AMF = angle BMF'.

Joignons AF' ; d'après la mesure des angles on a aussi

AF'F = AMF et BAF' = BMF'.

Mais AMF = BMF', donc aussi AF'F = BAF'.

égalité qui prouve que les deux droites AB et FF′ sont parallèles.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Mettetal, à Besançon; M. S., à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

20. — On considère une surface fixe du second degré, et une série de surfaces homothétiques du second degré circonscrites à la première. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à ces surfaces.

21. — Trouver le lieu des points de contact d'une série de surfaces homofocales du second degré avec des plans passant par une droite donnée ou par un point donné.

22. — On considère une surface du second degré et une courbe gauche du troisième degré passant au centre de la surface, et ayant pour directions asymptotiques les axes de cette surface. Faire voir que les normales à la surface aux six points où elle est coupée par la courbe gauche appartiennent à un même hyperboloïde. (*G. Kœnigs.*)

23. — On considère une ellipse E, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

et un diamètre quelconque PP′. Par les extrémités P,P′ de ce diamètre et par les foyers de l'ellipse donnée, on fait passer une hyperbole équilatère H, qui rencontre E en deux points diamétralement opposés, Q, Q′. Ceci posé, aux points P, Q, on mène les tangentes à E; ces droites se rencontrent en un point I: 1° trouver le lieu de ce point quand PP′ tourne autour du centre de E. Ce lieu est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

2° Au point I, on abaisse des perpendiculaires sur les asymptotes de H: trouver le lieu de ces projections. Ce lieu est la podaire du centre de l'ellipse E.

3° On demande de vérifier ces deux résultats par des con-

sidérations géométriques en établissant d'abord le théorème élémentaire suivant : on considère un triangle ABC, et sur la base BC deux points D et D′ également éloignés du milieu de BC. Soit D″ la symétrique de D par rapport au point A. La droite D′D″ rencontre AC en un point M; la droite qui va de D′ au milieu de MC est parallèle à AB. *(G. L.)*

24. — On considère deux droites rectangulaires ox et oy, et un cercle C tangent à l'axe ox au point P′. Soit P′ la symétrique de P par rapport à l'origine. Par ce point P′, on mène une transversale L, qui rencontre C en deux points A et B. On joint alors le point P au point A et à cette droite on élève en ce point P une perpendiculaire qui rencontre L en un point I. Trouver le lieu du point I quand L tourne autour de P′. — Ce lieu est une cissoïde oblique ayant pour point de rebroussement le point P. On propose enfin de démontrer ce résultat par la géométrie. *(G. L.)*

25. — On considère sur une ellipse E un diamètre A′A″ et deux points quelconques A, B. Les droites AA′ et BA″ se coupent en un point P; AA″ et BA′ en un point Q; le pôle de AB est évidemment situé, ainsi que le prouve le théorème de Pascal, sur PQ; mais on propose de démontrer qu'il est placé au milieu même de PQ. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

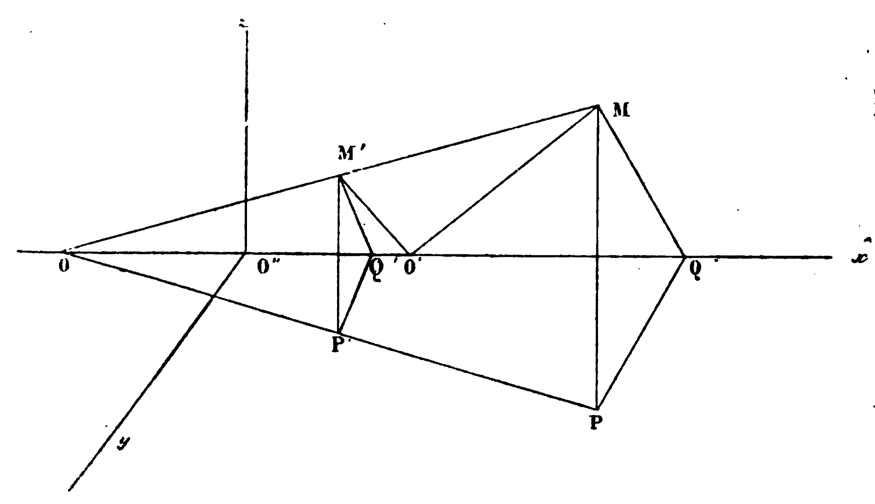
PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 13734-2

TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 49, 77, 97, 121)

29. — *Définition de la transformation réciproque dans l'espace.* — Nous nous proposons maintenant d'étendre à l'espace la transformation réciproque.



Imaginons deux points fixes O, O', O étant le pôle principal, O' le pôle secondaire de la transformation. On joint le point O à un point quelconque M de l'espace, et dans le plan MOO' on élève à la droite O'M une perpendiculaire qui rencontre OM en M'. Ce point M' sera dans ce système le transformé ou le correspondant de M.

30. — *Formules relatives à la transformation réciproque dans l'espace.* — Prenons pour axe de x la ligne des pôles, pour origine le milieu O'' de OO', pour plan de yz celui qui, en ce point O', est perpendiculaire à OO'; enfin pour axes de y et de z deux droites rectangulaires de ce plan. Dési-

gnons, dans ce système, par x, y, z, les coordonnées du point M; par X, Y, Z, celles du point transformé M'.

Projetons M et M' sur xoy et soient P, P' ces projections qui sont en ligne droite avec O; projetons encore P et P' sur ox en Q et Q'; on forme ainsi des triangles semblables deux à deux qui donnent les relations

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{MP}{M'P'} = \frac{MQ}{M'Q'},$$

ou, en prenant $OO' = 2d$,

$$\frac{d+x}{d+X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{MQ}{M'Q'}. \tag{1}$$

D'autre part, les triangles semblables O'MQ, O'M'Q' donnent aussi $\quad MQ.M'Q' = O'Q.O'Q'$

ou encore $\quad MQ.M'Q' = (d-x)(X-d)$.

Les relations (1) peuvent donc s'écrire

$$\frac{d+x}{d+X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{MQ\ .\ M'Q'}{M'Q'^2} = \frac{(d-x)(X-d)}{Y^2+Z^2}$$

On a donc $\quad \dfrac{d+x}{d+X} = \dfrac{(d-x)(X-d)}{Y^2+Z^2}$

qui donne $\quad \dfrac{x}{d} = \dfrac{X^2-Y^2-Z^2-d^2}{X^2+Y^2+Z^2-d^2}$.

On trouve ensuite

$$\frac{y}{d} = \frac{2Y(X-d)}{X^2+Y^2+Z^2-d^2},$$

$$\frac{z}{d} = \frac{2Z(X-d)}{X^2+Y^2+Z^2-d^2}.$$

Il y a d'ailleurs *réciprocité* entre les lettres x, y, z et X, Y, Z ; et l'on trouve

$$\frac{X}{d} = \frac{x^2-y^2-z^2-d^2}{x^2+y^2+z^2-d^2},$$

$$\frac{Y}{d} = \frac{2y(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2},$$

$$\frac{Z}{d} = \frac{2z(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2}.$$

Il résulte de ces formules que si l'on veut transformer, dans ce système, une surface de degré m, $f(x, y, z) = 0$. l'équation transformée sera de degré $2m$, du moins en géné-

ral, car nous signalerons tout à l'heure des causes qui font abaisser le degré de la transformée.

31. *Transformation du plan.* — Au plan P, dont l'équation est

$$A\frac{x}{d} + B\frac{y}{d} + C\frac{z}{d} = h$$

correspond la quadrique P',

$$(A - h)X^2 - (A + h)Y^2 - (A + h)Z^2 + 2CZX + 2BXY$$
$$- 2d(BY + CZ) + d^2(h - A) = 0.$$

Cette équation est intéressante à discuter.

L'équation en S appliquée à cette surface est

$$S^3 + (A + 3h)S^2 + [(A + h)(3h - A) - B^2 - C^2]S$$
$$+ (A + h)(h^2 - A^2 - B^2 - C^2) = 0$$

et, si l'on pose $\quad A^2 + B^2 + C^2 = K^2,$

les trois racines sont

$$S_1 = -(A + h),$$
$$S_2 = -h + K,$$
$$S_3 = -(h + K).$$

Le hessien de la surface est d'ailleurs

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} A - h & B & C & 0 \\ B & -(A + h) & 0 & -B \\ C & 0 & -(A + h) & -C \\ 0 & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

Pour calculer rapidement ce déterminant ajoutons d'abord la quatrième colonne à la première, on aura :

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} A - h & B & C & 0 \\ 0 & -(A + h) & 0 & -B \\ 0 & 0 & -(A + h & -C \\ h - A & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

Ajoutons maintenant la quatrième ligne à la première, il vient :

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h - A \\ 0 & -(A + h) & 0 & -B \\ 0 & 0 & -(A + h) & -C \\ h - A & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

ou $$\frac{H}{d^2} = (A - h)\begin{vmatrix} 0 & -(A + h) & 0 \\ 0 & 0 & -(A + h) \\ h - A & -B & -C \end{vmatrix}$$

on a, finalement :

$$H = -d^2(A+h)^2(A-h^2).$$

L'équation de la surface rapportée à ses axes, quand on suppose K^2 différent h^2, est donc

$$-(A+h)X'^2 + (K-h)Y'^2 - (K+h)Z'^2 = \frac{d^2(A+h)(A-h)^2}{K^2-h^2}$$

32. — Nous reviendrons tout à l'heure sur le cas singulier, celui où l'on suppose $h^2 = K^2$; dans le cas général, l'équation précédente ne peut représenter que des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes. C'est ce que nous allons montrer. On peut toujours supposer $h > o$, et comme K désigne essentiellement la racine réelle positive de l'expression $(A^2 + B^2 + C^2)$, nous pouvons dire que K est aussi une quantité positive. Deux cas seulement sont donc à distinguer, suivant que l'on suppose $h - K > o$ ou $h - K < o$.

La discussion, sur laquelle il est inutile d'insister davantage, peut se résumer dans le tableau suivant :

$h - K > o$	$A + h > o$	*Ellipsoïde réel.*
	$A + h < o$	(Inégalités incompatibles.)
$h - K < o$	$A + h > o$	*Hyperboloïde à deux nappes.*
	$A + h < o$	*(Id.)*

Nous ferons seulement remarquer pourquoi, dans ce tableau, nous avons marqué les inégalités

$$h - K > o \qquad (1)$$

$$A + h < o. \qquad (2)$$

comme *incompatibles*. Il ne faut pas oublier que les lettres A, h, K, d, ont une signification géométrique qui ne permet pas d'établir entre elles des inégalités quelconques. La distance ρ de l'origine au plan P est donnée par la formule

$$\rho = \frac{hd}{K}. \qquad (3)$$

D'autre part, le plan P rencontre l'axe des x à une distance ρ' de l'origine, telle que, $\rho' = \frac{hd}{-A}$.

Dans cette formule ρ' désigne la distance absolue quand on suppose $A < o$. Ceci posé on a évidemment $\rho' > \rho$ ou

$$\frac{hd}{-A} > \frac{hd}{K} ;$$

on a donc $A + K > o$ en chassant les dénominateurs positifs. Or les deux inégalités (1) et (2) donnent par combinaison

$$A + K < o$$

et pour ce motif sont incompatibles. Il faut d'ailleurs remarquer que l'inégalité (2) entraîne nécessairement la condition $A < o$ que nous avons admise.

Si l'on veut maintenant observer que la formule (3) dans l'hypothèse $h - K > o$ donne $\rho > d$, et, au contraire, $\rho < d$ si l'on suppose $h - K < o$, nous pourrons dire :

Théorème. — *Dans la transformation réciproque à un plan* P *correspond une quadrique* P' *qui est un ellipsoïde, si le plan* P *est extérieur à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre ; et un hyperboloïde à deux nappes quand le plan* P *coupe cette sphère.* *(A suivre.)*

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler.**

(*Suite*, voir page 105.)

III. — Signification géométrique des fonctions I *et* J.

Nous allons chercher l'expression du rapport anharmonique de quatre points déterminés par les deux équations :

$$mx^2 + pxy + qy^2 = o$$

et

$$m'x^2 + p'xy + q'y^2 = o.$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées *binaires* des deux points représentés par la première équation ; (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des deux autres points. Une des valeurs du rapport anharmonique peut s'écrire, soit

$$\rho = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2},$$

soit

$$\rho = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2},$$

suivant que l'on compte les distances à partir de l'origine des x ou de l'origine des y. Mais on peut écrire

$$\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_1}{x_4 y_1 - x_1 y_1}$$

$$= \frac{y_3 x_1 - x_1 y_1}{y_4 x_1 - x_1 y_1} = \frac{x_3 y_1 - y_3 x_1}{x_4 y_1 - y_4 x_1}$$

et de même

$$\frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2} = \frac{x_3 y_2 - x_2 y_3}{x_4 y_2 - y_4 x_2}.$$

Donc on a

$$\rho = \frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1)(x_4 y_2 - y_4 x_2)}{(x_4 y_1 - y_4 x_1)(x_3 y_2 - y_3 x_2)} = \frac{\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_2}{y_2}\right)}{\left(\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_2}{y_2}\right)} \qquad (4)$$

Si maintenant on pose

$$\mathrm{R} = \sqrt{p^2 - 4mq}, \quad \mathrm{R}' = \sqrt{p'^2 - 4m'q'};$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{-p + \mathrm{R}}{2m}, \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{-p - \mathrm{R}}{2m},$$

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{-p' + \mathrm{R}'}{2m'}, \quad \frac{x_4}{y_4} = \frac{-p' - \mathrm{R}'}{2m'},$$

on trouve la formule

$$\rho = \frac{2qm' + 2q'm - pp' + \mathrm{RR}'}{2qm' + 2q'm - pp' - \mathrm{RR}'}. \qquad (5)$$

Nous rappellerons que le rapport anharmonique de quatre points a six valeurs distinctes en général, savoir :

$$\rho, \ \frac{1}{\rho}, \ 1 - \rho, \ \frac{1}{1 - \rho}, \ \frac{\rho - 1}{\rho}, \ \frac{\rho}{\rho - 1},$$

ρ désignant le résultat obtenu en groupant les quatre points d'une manière quelconque. Lorsque les points sont harmoniques, les six valeurs se réduisent à trois, savoir -1, 2 et $\frac{1}{2}$.

Un autre cas particulier est celui où l'on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$; alors les six valeurs se réduisent à deux, qui sont les racines de l'équation précédente, c'est-à-dire les racines cubiques imaginaires de l'unité; les quatre points sont alors en situation *équi-anharmonique*.

Supposons maintenant que J soit nul ; l'équation (3) a une racine nulle et la valeur correspondante de λ est $\lambda = c$, L'équation (1) devient :

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 - y^2[x^2(4b^2 - 4ac) + 4xy(bc - ad) + y^2(c^2 - ae)] = 0.$$

Le polynôme entre crochets, devant être carré parfait, s'écrira $4(b^2 - ac)\left[x - \frac{ad - bc}{2(b^2 - ac)}y\right]^2$, d'où résulte le mode de décomposition suivant :

$$\left[ax^2 + 2xy\left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) + y^2\left(c - \frac{ad - bc}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)\right]$$
$$\left[ax^2 + 2xy\left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) + y^2\left(c + \frac{ad - bc}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)\right]$$

En calculant le rapport anharmonique des quatre points représentés par les deux trinômes du second degré, d'après la formule (5), on voit que ρ se réduit à $\frac{+ RR'}{- RR'} = -1$, parce que $2qm' + 2q'm - pp'$ est identiquement nul.

Donc : *quand on a* $J = 0$, *les quatre points représentés par la forme du quatrième degré sont en situation harmonique, et on est en droit de conclure que J est un invariant.*

Supposons maintenant qu'on ait $I = 0$. En divisant par a et en désignant les quatre racines $\frac{x_1}{y_1}$, etc... par $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, l'équation $I = 0$, pourra s'écrire :

$$12\beta\gamma\delta\varepsilon - 3\Sigma\beta . \Sigma\beta\gamma\delta + (\Sigma\beta\gamma)^2 = 0.$$

Mais on a $\Sigma\beta . \Sigma\beta\gamma\delta = \Sigma\beta^2\gamma\delta + 4\beta\gamma\delta\varepsilon$

$$(\Sigma\beta\gamma)^2 = \Sigma\beta^2\gamma^2 + 2\Sigma\beta^2\gamma\delta + 6\beta\gamma\delta\varepsilon ;$$

l'équation devient donc

$$\Sigma\beta^2\gamma^2 - \Sigma\beta^2\gamma\delta - 6\beta\gamma\delta\varepsilon = 0$$

ou bien en développant :

$$(\beta\gamma + \delta\varepsilon)^2 + (\beta\delta + \gamma\varepsilon)^2 + (\beta\varepsilon + \gamma\delta)^2 - (\beta\delta + \gamma\varepsilon)(\beta\varepsilon + \gamma\delta) - (\beta\varepsilon + \gamma\delta)(\beta\gamma + \delta\varepsilon) - (\beta\gamma + \delta\varepsilon)(\beta\delta + \gamma\varepsilon) = 0$$

ou enfin, abréviativement :

$$M^2 + N^2 + P^2 - NP - PM - MN = 0. \qquad (6)$$

Mais la valeur (4) du rapport anharmonique est

$$\rho = \frac{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \beta\varepsilon - \gamma\delta}{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \beta\delta - \gamma\varepsilon} = \frac{M - P}{M - N}.$$

Maintenant l'égalité (6) devient en ajoutant et retranchant des termes

$$(M-P)^2+(M-N)^2-M^2+MP+MN-NP=0$$

ou $$(M-P)^2+(M-N)^2-(M-N)(M-P)=0$$

ou enfin

$$\left(\frac{M-P}{M-N}\right)^2+1-\frac{M-P}{M-N}=\rho^2-\rho+1=0.$$

Donc, *quand on a* I = o, *les quatre points représentés par la forme du quatrième degré sont en situation équi-anharmonique: on en conclut que* I *est aussi un invariant.*

Il reste à chercher par quels facteurs I et J sont multipliés lorsqu'on fait la substitution linéaire $x=\alpha X+\beta Y$, $y=\alpha' X+\beta' Y$. Pour cela nous remarquerons que le discriminant I^3-27J^2 est le produit des carrés des différences des racines, c'est-à-dire de six facteurs de la forme $(x_1y_2-y_1x_2)^2$ (*).

Lorsqu'on fait la substitution indiquée, on reconnaît que chaque facteur devient $(X_1Y_2-Y_1X_2)^2(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2$; le discriminant se trouve donc multiplié par $(\alpha\beta'-\beta\alpha')^{12}$. Il en résulte que I est multiplié par $(\alpha\beta'-\beta\alpha')^4$ et J par $(\alpha\beta'-\beta\alpha')^6$.

On peut s'en assurer par un calcul direct en formant les coefficients de la nouvelle expression de f, puis les nouveaux invariants.

IV. — *Détermination du rapport anharmonique des quatre points représentés par l'équation* f = o.

Nous allons calculer en fonction de I et de J l'expression du rapport anharmonique des quatre points représentés par l'équation $f=0$, sans faire aucune hypothèse particulière.

Posons pour un instant

$$A=4b^2-6ac+2a\lambda,\qquad B=2\lambda b-2ad;$$

on aura

$$f=(ax^2+2bxy+\lambda y^2)^2-y^2[Ax^2+2Bxy+y^2(\lambda^2-ae)].$$

Puisque λ est déterminé de telle sorte que le second trinôme soit un carré, on peut écrire:

(*) Voir, pour la démonstration de ce fait, les *Leçons d'Algèbre supérieure de Salmon*, traduction française, p. 78.

$$f = (ax^2 + 2bxy + \lambda y^2)^2 - Ay^2\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2$$

$$= \left[ax^2 + 2bxy + \lambda y^2 - \frac{Axy + By^2}{\sqrt{A}}\right]$$

$$\left[ax^2 + 2bxy + \lambda y^2 + \frac{Axy + By^2}{\sqrt{A}}\right]$$

$$= \left[ax^2 + xy\,(2b - \sqrt{A}) + y^2\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$

$$\left[ax^2 + xy(2b + \sqrt{A}) + y^2\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right] \quad (7)$$

D'après la formule (5), le rapport anharmonique est

$$\rho = \frac{4a\lambda - 4b^2 + A + R}{4a\lambda - 4b^2 + A - R}$$

R désignant la racine carrée de l'expression

$$\left[(2b - \sqrt{A})^2 - 4a\lambda + \frac{4aB}{\sqrt{A}}\right]\left[(2b + \sqrt{A})^2 - 4a\lambda - \frac{4aB}{\sqrt{A}}\right]$$

Comme on a

$$4a\lambda - 4b^2 + A = 6a(\lambda - c) = 6a\mu,$$

la formule précédente devient

$$6\mu(\rho - 1) = R(\rho + 1),$$

ou bien, en prenant pour inconnue auxiliaire

$$\sigma = \frac{\rho - 1}{\rho + 1},$$

$$36\mu^2\sigma^2 = R^2.$$

Le polynôme R^2 s'exprime très simplement en fonction de I et J; on a

$$R^2 = (4b^2 + A - 4a\lambda)^2 - 16\left(b\sqrt{A} - \frac{aB}{\sqrt{A}}\right)^2$$

$$= (8b^2 - 6ac - 2a\lambda)^2 - \frac{16(6abc - 2a^2d - 4b^3)^2}{4b^2 - 6ac + 2a\lambda}$$

ou, en remplaçant λ par $\mu + c$,

$$R^2 = \frac{1}{2b^2 - 2ac + a\mu}[(8b^2 - 8ac - 2a\mu)^2(2b^2 - 2ac + a\mu)$$
$$- 32\,(3abc - 2b^3 - a^2d)]$$

$$= \frac{4}{2b^2 - 2ac + a\mu}\,[a^3\mu^3 - 6a^2\mu^2\,(b^2 - ac) + 8a^2\,(3b^2c^2$$
$$- 4ac^3 + 6abcd - a^2d^2 - 4b^3d)]$$

$$= \frac{4a^2}{2b^2 - 2ac + a\mu}\left[a\mu^3 - 6\mu^2(b^2 - ac) + 8aJ + 8I(b^2 - ac)\right]$$

La substitution de cette valeur dans la relation $3\sigma\mu^2 S^2 = R^2$ donne l'équation

$$\mu^4(a\sigma^2 - a^2) + 6\mu^2(b^2 - ac)(3\sigma^2 + a^2) - 8a^2(I(b^2 - ac) + aJ) = 0. \qquad (8)$$

Il ne reste plus qu'à éliminer μ entre les deux équations du troisième degré (8) et (3) $\mu^3 - \mu I + 2J = 0$, pour avoir la résolution cherchée entre le rapport anharmonique et les invariants.

Les calculs sont assez prolixes: il n'est guère possible d'éviter le développement complet du résultant des équations (3) et (8). Ce résultant, pour deux équations incomplètes de la forme $Ax^3 - Bx^2 + D = 0$ et $A'x^3 + C'x + D' = 0$ est

$$A'D'^3 - D'A'^3 - B^3A'D'^2 - A^2DC'^2 - A^2BC'D'^2 - B^2DA'C'^2$$
$$+ 2AD^2A'^2C' + 3AD^2A'^2D' - 3A^2DA'D'^2 - ABDA'B'D'.$$

En ordonnant suivant les puissances de σ, on trouve que tous les termes du résultant contiennent en facteur

$$a^3J + a^2I(b^2 - ac) - 4(b^2 - ac)^3;$$

après la suppression de ce facteur, il reste

$$5832J^2\sigma^6 + \sigma^4(5832J^2 - 648I^3) + \sigma^2(1944J^2 + 144I^3) + 216J^2 - 8I^3 = 0$$

ou $216J^2(27\sigma^6 + 27\sigma^4 + 9\sigma^2 + 1) - 8I^3(81\sigma^4 - 18\sigma^2 + 1) = 0$

c'est-à-dire $\dfrac{I^3}{J^2} = 27\,\dfrac{(3\sigma^2 + 1)^3}{(9\sigma^2 - 1)^2} = 108\,\dfrac{(\rho^2 - \rho + 1)^2}{(\rho + 1)^2(2\rho^2 - 5\rho + 2)^2}$

$$= 108\,\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{(\rho + 1)^2(2\rho - 1)^2(\rho - 2)^2}$$

Telle est la relation cherchée.

Elle fait retrouver des résultats déjà obtenus; si l'invariant I est nul, on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$; si J est nul, on a soit $\rho + 1 = 0$, soit $2\rho - 1 = 0$, et l'une quelconque des valeurs -1, $\frac{1}{2}$ et 2 pour ρ, caractérise la situation harmonique.

Enfin, on voit aussi que $\frac{I^3}{J^2}$ est un *invariant absolu*, c'est-à-dire une fonction qui se reproduit sans l'adjonction d'aucun

facteur, lorsqu'on fait une transformation linéaire, car le rapport anharmonique ne change pas.

On voit d'ailleurs que I^8 et J^2 sont multipliés chacun par la douzième puissance du déterminant $\alpha\beta' - \beta\alpha'$. *(A suivre.)*

CONSTRUCTION DES ASYMPTOTES
DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE PASSANT PAR QUATRE POINTS DONNÉS

---

1. — On sait que l'hyperbole équilatère qui est circonscrite à un triangle passe par le centre des hauteurs de ce triangle : on pourra donc déterminer un cinquième point de l'hyperbole ; par cinq points on ne peut faire passer qu'une seule conique et l'on voit ainsi que le problème ne comporte qu'une solution.

On peut d'ailleurs trouver le centre d'une conique déterminée par cinq points; il suffit, comme on le sait, de déterminer les extrémités de deux cordes parallèles au moyen du théorème de Pascal. La droite qui joint les milieux de ces deux cordes est un diamètre ; le centre peut donc être construit au moyen de deux diamètres, ainsi déterminés.

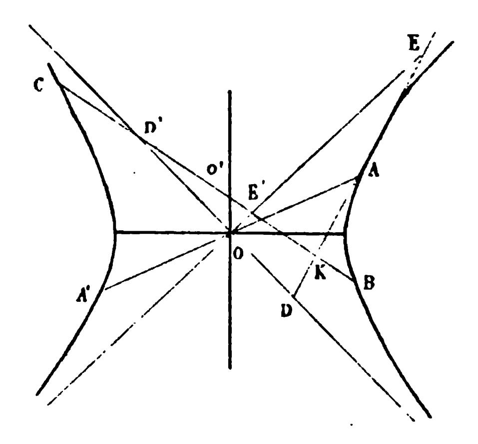
2. — D'après cette remarque nous supposons que l'hyperbole équilatère H est définie par deux points A, B et le centre O de la courbe et nous nous proposons de trouver ses asymptotes. Voici une solution simple de ce problème.

Soit A' le symétrique de A par rapport à O; par les trois points A, A', B faisons passer un cercle Δ ; soit O' le centre et C l'extrémité du diamètre qui passe par B. On sait que : *si sur la corde d'une hyperbole équilatère comme diamètre on décrit un cercle, celui-ci coupe l'hyperbole en deux autres points qui sont les extrémités d'un diamètre de cette courbe.*

Il résulte de ce théorème que le point C est un point de l'hyperbole.

Le triangle rectangle BAC étant inscrit à l'hyperbole, on sait par une autre propriété, également bien connue, que *la*

tangente à H *au point* A *est perpendiculaire à l'hypoténuse* BC. Ayant, d'après cette remarque, abaissé du point A une perpendiculaire AK sur CB, les asymptotes cherchées sont deux droites rectangulaires ayant leur sommet en O et interceptant sur AK un segment dont le milieu est le point A. Il suffit donc pour les obtenir, et comme l'indique la figure, de décrire du point A comme centre avec AO pour rayon un cercle qui rencontre AK aux points D et E : OD et OE sont les asymptotes.



3. — On peut remarquer que si l'on prolonge les asymptotes OD et OE jusqu'à ce qu'elles rencontrent le diamètre BC aux points D′ et E′, les triangles OO′E′, OO′D′ sont isoscèles et l'on a OO′ = O′E′ = O′D′. On peut alors déterminer les asymptotes de l'hyperbole en décrivant du point O′ comme centre avec O′O pour rayon un cercle qui coupe BC en deux points, et en joignant ces points au centre donné O on obtient les deux asymptotes.

L'une et l'autre des deux constructions précédentes sont plus simples que celle qu'on indique ordinairement. Celle-ci

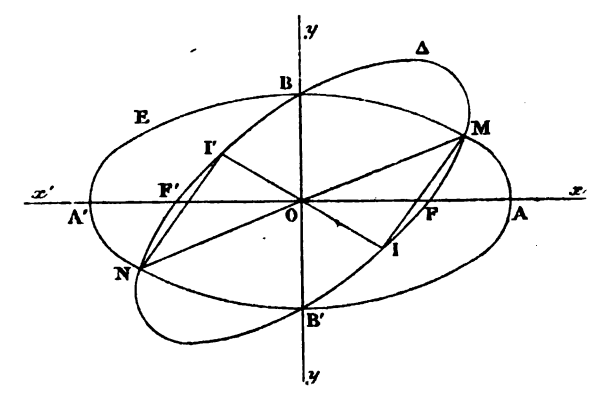
consiste à tracer les bissectrices des angles formés par les droites BC, AA'; on mène ensuite par O des parallèles à ces bissectrices et on a les axes en position. De ces axes on déduit ensuite les asymptotes; mais dans la pratique il est visible que cette construction est moins rapide que celle que nous venons d'exposer, et qui donne immédiatement les asymptotes au moyen du tracé d'un seul arc de cercle.

QUESTION 16

Solution par M. E. Devin, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

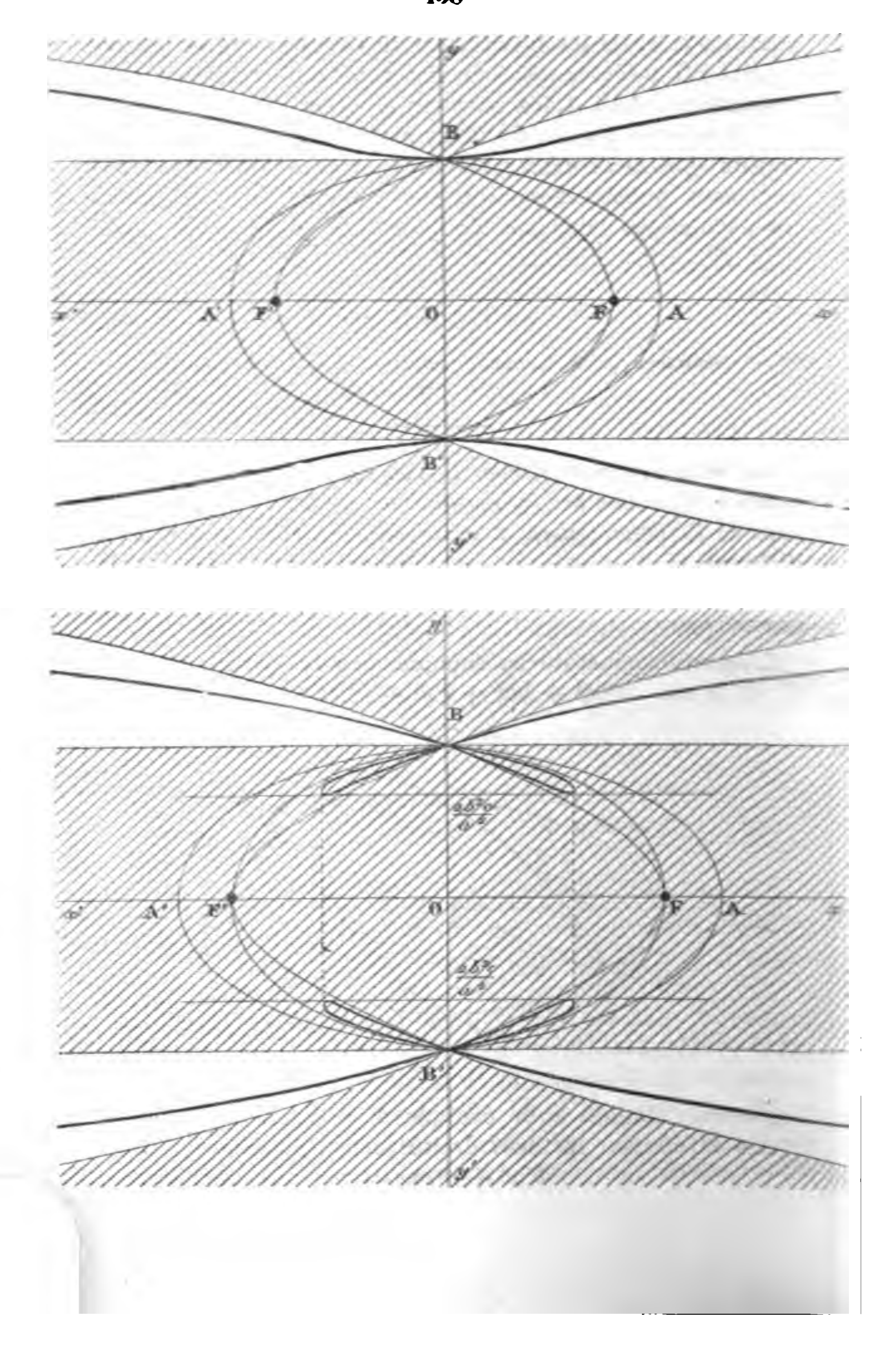
On considère une ellipse E *rapportée à ses axes et une conique* Δ *passant par les foyers et les extrémités* B, B' *du petit axe de* E. *Cette conique* Δ *rencontre* E *en deux points* M, N *différents de* B *et de* B'*; en ces points on mène à* E *des normales qui rencontrent* Δ *en des points* I, I' *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

L'équation générale des coniques passant par les points F, F', B, B' est $b^2x^2 + \lambda xy + c^2y^2 - b^2c^2 = 0.$ (1)



L'ellipse donnée et la conique Δ se coupent en quatre points situés sur les deux droites dont l'équation est

$$b^4x^2 + a^2\lambda xy = 0,$$


y
B
x'
A'
F'
O
F
A
x
B'
y'
y
B
x'
A'
F'
O
F
A
x
B'
y'

combinaison homogène de l'équation (1) et de celle de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$

L'équation du diamètre MN commun aux deux courbes est donc $b^4x + a^2\lambda y = 0$
et son coefficient angulaire, m

$$-\frac{b^4}{a^2\lambda} = m.$$

Soit m' celui de la tangente en M; on a

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2};$$

ainsi $$m'\frac{b^4}{a^2\lambda} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou $$m' = \frac{\lambda}{b^2}.$$

Soit m'' le coefficient angulaire de la normale au point M on a $$m'm'' = -1$$

d'où $$m'' = -\frac{b^2}{\lambda}.$$

Ceci posé, les points M et N étant les extrémités d'un diamètre de l'ellipse donnée, les deux normales MI et NI' sont parallèles et, d'après l'équation générale des normales à l'ellipse, en fonction du coefficient angulaire, qui est

$$y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

nous aurons pour l'ensemble de ces deux normales, dont le coefficient angulaire est m'', l'équation

$$\left(y + \frac{b^2}{\lambda}x\right)^2\left(a^2 + \frac{b^6}{\lambda^2}\right) = \frac{c^4b^4}{\lambda^2}$$

ou, en multipliant les deux membres par λ^2,

$$(\lambda y + b^2x)^2\left(a^2 + \frac{b^6}{\lambda^2}\right) = c^4b^4$$

ou encore $$(\lambda y + b^2x)^2(\lambda^2a^2 + b^6) = c^4b^4\lambda^2. \qquad (2)$$

Nous allons maintenant, pour éviter d'introduire l'ellipse donnée dans l'équation du lieu, chercher à former l'équation de la droite II'; et, cette équation obtenue, il nous suffira, pour obtenir le lieu demandé, d'éliminer λ entre l'équation de la droite II' et celle de la conique mobile.

La droite MN étant un diamètre de la conique, et les droites MI et NI′ étant parallèles entre elles, les points I et I′ sont les extrémités d'un même diamètre de cette conique.

L'équation de II′ est donc de la forme

$$y + \alpha x = 0.$$

D'ailleurs l'équation de MN est

$$b^4 x + a^2\lambda y = 0.$$

L'ensemble de ces deux droites est donc représenté par l'équation homogène

$$(b^4 x + a^2\lambda y)(y + \alpha x) = 0. \quad (3)$$

Il faut déterminer α.

Pour cela, nous allons former, avec l'équation de la conique mobile et celle qui représente les deux droites MI et NI′, une combinaison homogène, qui, elle aussi, représentera l'ensemble des deux droites II′ et MN; en identifiant cette équation avec l'équation (3) nous pourrons déterminer α.

L'ensemble des deux normales peut s'écrire

$$\lambda^2(a^2\lambda^2 + b^6)y^2 + b^4(a^2\lambda^2 + b^6)x^2 + 2\lambda b^2(a^2\lambda^2 + b^6)xy$$
$$- b^4c^4\lambda^2 = 0. \quad (4)$$

La conique mobile étant

$$c^2y^2 + b^2x^2 + \lambda xy - b^2c^2 = 0.$$

multiplions cette dernière équation par $\lambda^2 b^2 c^2$ et retranchons de (4) le résultat, il vient

$$\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]y^2 + b^4[a^2\lambda^2 + b^6 - c^2\lambda^2]x^2$$
$$+ \lambda b^2[2a^2\lambda^2 + 2b^6 - \lambda^2c^2]xy = 0$$

ou

$$\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]y^2 + b^6[\lambda^2 + b^4]x^2$$
$$+ \lambda b^2[a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 + 2b^6]xy = 0.$$

Identifiant cette équation avec

$$a^2\lambda y^2 + \alpha b^4 x^2 + (b^4 + \alpha\lambda a^2)xy = 0$$

on a

$$\frac{\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]}{a^2\lambda} = \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\alpha} = \frac{\lambda b^2[a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 - 2b^6]}{b^4 + \alpha\lambda a^2}$$

de la première de ces égalités je tire

$$\alpha = \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\lambda[\lambda^2 + b^2(b^2 + c^2)]}.$$

L'équation de la droite II′ est donc

$$y + \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\lambda[\lambda^2 + b^2(b^2 - c^2)]}\,x = 0.$$

Eliminons maintenant λ entre cette équation et

$$b^2x^2 + \lambda xy + c^2y^2 - b^2c^2 = 0$$

on a

$$\frac{b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2}{x}\left[\frac{(b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2)^2}{x^2y^2} - b^2(c^2 - b^2)\right]$$
$$+ b^2x\left[b^4 + \frac{(b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2)^2}{x^2y^2}\right] = 0$$

ou encore

$$(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)^3 - b^2x^2(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)^2$$
$$- b^2x^2y^2(c^2 - b^2)(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2) - b^6x^4y^2 = 0$$

et, après calcul,

$$[b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2][c^2(y^4 - 2b^2y^2 + b^4) - b^4x^2]$$
$$= b^4x^2y^2(b^2 - y^2).$$

Remarquant que la seconde parenthèse est une différence de deux carrés, on a

$$(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2 - c^2)[c^2(y^2b^2)^2 - b^4x^2] = b^4x^2y^2(b - y^2)$$

ou $(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)[c(y^2 - b^2)x - b^2][c(y^2 - b^2) + b^2x]$

$$= b^4x^2y^2(b^2 - y^2). \qquad (5)$$

Cette équation se présente alors sous la forme de quatre facteurs et permet ainsi de séparer le plan en régions.

Les courbes qui séparent le plan en régions sont :

1° $$b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0$$

ou $$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

C'est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ceux de l'ellipse donnée, et dont les sommets sont les foyers de celle-ci et les sommets B et B′ de cette même ellipse.

2° La parabole $cy^2 - b^2x - b^2c = 0$.

C'est la parabole qui a pour sommet le foyer F de l'ellipse, pour axe l'axe ox, et qui passe par les points B et B′; elle est bien déterminée.

3° La parabole $cy^2 + b^2x - b^2c = 0$.

C'est la parabole qui a pour axe l'axe ox, pour sommet le point F′, foyer de gauche de l'ellipse donnée, et qui passe par les points B et B′; elle est aussi bien déterminée.

4° Les deux droites $y = b$,

$$y = -b,$$

ce sont les parallèles à ox, qui passent par les points B et B′.

Reportons-nous à l'équation (5).

Si $(b^2 - y^2) > 0$, le second membre est positif; le facteur $c(y^2 - b^2) - b^2x$, en supposant x positif, est positif; il faut que $(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)[c(y^2 - b^2) + b^2x]$ soit négatif.

Il peut donc y avoir des points de la courbe dans l'espace compris entre la parabole

$$c(y^2 - b^2) + b^2x = 0$$

et l'ellipse $\qquad b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0.$

Alors la courbe ne pénètre pas dans toutes les parties ombrées de la figure.

Occupons-nous maintenant de la discussion de l'équation en la considérant comme bicarrée en x.

L'équation développée s'écrit

$$b^2a^2x^2y^4 - 3b^4c^2x^2y^2 + 2b^6c^2x^2 - b^8x^4 + c^4y^6 - 3b^2c^4y^4 + 3b^4c^4y^2 - b^6c^4 = 0$$

ou, en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$b^8x^4 - b^2a^2y^4x^2 + 3b^4c^2y^2x^2 - 2b^6c^2x^2 - c^4y^6 + 3b^2c^4y^4 - 3b^4c^4y^2 + b^6c^4 = 0$$

ou

$$b^6x^4 - b^2x^2(a^2y^4 - 3b^2c^2y^2 + 2b^4c^2) - c^4y^2(y^4 - 3b^2y^2 - 2b^{\cdot} - c^4b^4(y^2 - b^2) = 0. \qquad (1)$$

Si dans cette équation on fait $x = 0$, on a

$$(y^2 - b^2)^3 = 0,$$

qui prouve que les points B et B′ sont des points triples de la courbe.

Si d'autre part on fait $y = 0$ dans l'équation (5), on a

$$(x^2 - c^2)^2 = 0,$$

qui prouve que les points F et F′ sont des points doubles: mais ce sont des points doubles isolés, car les tangentes en ces points sont imaginaires.

Tangentes horizontales. — Cherchons les points de la courbe où la tangente est horizontale. Pour cela, il faut former la dérivée par rapport à x et l'égaler à zéro.

On a $\quad f' = 4b^6x^3 - 2b^2c^2x\,(y^4 - 3b^2y^2 + b^4) = 0,$

d'où d'abord la solution $x = 0$ qui indique qu'aux points B et B′ les tangentes à la courbe sont parallèles à ox.

Ayant supprimé cette solution et divisé par b^2c^2 on a

$$2b^4x^2 - c^2(y^2 - 2b^2)(y^2 - b^2) = 0,$$

qui est satisfaite pour une valeur de y comprise entre les deux droites $y = \pm b$.

La courbe ne renferme dans son équation que des puissance paires de x et de y; elle est donc symétrique par rapport aux axes de coordonnées, et l'origine est au centre.

L'équation (6) bicarrée en x^4 est

$$b^6x^4 - x^2(a^2b^2y^4 + 2b^6c^2 - 3a^2b^4y^2) - c^4(y^2 - b^2)^3 = 0$$

ou $b^6x^4 - b^2(y^2 - b^2)(a^2y^2 - 2b^2c^2)\, x^2 - c^4(y^2 - b^2)^3 = 0.$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut avoir

$$b^4(y^2 - b^2)^2(a^2y^2 - 2b^2c^2)^2 + 4b^6c^4(y^2 - b^2)^3 \geq 0$$

ou $$b^4(y^2 - b^2)^2[a^4y^4 - 4a^2b^2c^2y^2 + 4b^2c^4y^2] \geq 0$$

ou $$b^4y^2(y^2 - b^2)^2[a^4y^2 - 4b^4c^2] \geq 0$$

ou $$b^4y^2(y^2 - b^2)^2(a^2y - 2b^2c)(a^2y + 2b^2c) \geq 0.$$

Pour que cette quantité soit positive, il faut et il suffit que l'on ait $$a^4y^2 - 4b^4c^2 \geq 0.$$

Il n'y a donc pas de points de la courbe entre les deux parallèles à ox $$y = \pm \frac{2b^2c}{a^2}.$$

Ces deux parallèles, construites sur la figure, sont comprises entre les deux droites $y = \pm b$.

Car la condition $$\frac{2b^2c}{a^2} \leq b$$

revient à celle-ci $(b - c)^2 \geq 0$ qui est évidente.

D'ailleurs le signe de la somme des racines de l'équation bicarrée en x dépend de la qualité

$$(y^2 - b^2)(a^2y^2 - 2b^2c^2).$$

Si $y^2 - b^2$ est < 0, pour que la somme soit positive, il faut que l'on ait $$y^2 - \frac{2b^2c^2}{a^2} < 0$$

ou $$y^2 < \frac{2b^2c^2}{a^2}.$$

Comparant cette quantité à b^2, posant par exemple

$$\frac{2b^2c^2}{a^2} < b^2,$$

on a $$2c^2 < a^2$$

ou $$2c^2 < b^2 + c^2$$

ou enfin $$c^2 < b^2.$$

Nous sommes ainsi amenés à distinguer les trois cas suivants:

$$1^\circ \quad c^2 - b^2 > 0.$$
$$2^\circ \quad c^2 - b^2 = 0.$$
$$3^\circ \quad c^2 - b^2 < 0.$$

PREMIER CAS: $c^2 > b^2$.

Si $(c^2 - b^2)$ est > 0 il existe, pour toutes les valeurs de y comprises entre les parallèles $y = \pm b$, quatre valeurs réelles de x; et, quand y^2 est $> b^2$ deux des valeurs de x seulement sont réelles; les deux autres sont imaginaires. Les tangentes horizontales étant les deux droites

$$y = \pm \frac{2b^2c}{a^2},$$

il n'y pas de points de la courbe entre ces deux parallèles.

Tangentes aux points B *et* B'. — Pour avoir les tangentes en ces points, nous allons transporter les axes au point B, par exemple.

Pour cela il faut dans l'équation du lieu faire

$$x = X$$
$$y = Y + b;$$

celle-ci devient

$$b^4X^4 - b^2[(Y+b)^2 - b^2][a^2(Y+b)^2 - 2b^2c^2]X^2$$
$$- c^4[(Y+b)^2 - b^2]^2 = 0$$

ou $$b^4X^4 - b^2[Y^2 + 2bY][a^2Y^2 - 2a^2bY + a^2b^2 - 2b^2c^2]$$
$$- c^4[Y^2 + 2bY]^2 = 0$$

L'ensemble des termes de degré le moins élevé est

$$b^2YX^2(c^2 - b^2) - 4c^4Y^4 = 0,$$

ce qui donne d'abord la droite $Y = 0$, solution déjà trouvée; et les deux autres tangentes sont

$$Y^2 = (c^2 - b^2)\frac{b^2}{4c^4}x^2.$$

On voit encore par là que: si $c^2 > b^2$ les tangentes en ces points sont réelles; si $c^2 < b^2$ elles sont imaginaires. La courbe a donc dans ce cas la forme que lui donne la figure 1.

DEUXIÈME CAS: $c^2 = b^2$.

Dans ce cas, les tangentes aux points B et B' sont données par l'équation $Y^3 = 0$ ou, en revenant aux anciens axes de coordonnées, $(y - b)^3 = 0$.

Ceci prouve que les parallèles à Ox menées par les points B et B' sont des tangentes triples de la courbe.

Quand $y^2 - b^2$ est négatif, les valeurs de x sont imaginaires toutes les quatre ; et deux des valeurs de x seulement sont réelles quand $y^2 - b^2 > 0$.

La courbe a donc dans ce cas la forme que lui donne la figure 2.

TROISIÈME CAS : $c^2 < b^2$.

Quand on a $c^2 < b^2$, les tangentes aux points B et B' autres que les droites $y = \pm b$, sont imaginaires ; car elles sont données par l'équation

$$Y^2 = (c^2 - b^2)\frac{b^2}{4c^4}x^2,$$

qui prouve que les parallèles menées par B et B' à Ox sont des tangentes imaginaires de la courbe.

D'ailleurs, d'après la discussion, faite précédemment, de l'équation du quatrième degré en x, les quatre valeurs de x correspondant aux valeurs de y comprises entre les parallèles à Ox menées par les points B et B' sont imaginaires ; et, en dehors de ces deux parallèles il y a seulement deux valeurs réelles de x. Les boucles de la figure 1 disparaissent et la courbe a encore la forme de la figure 2; mais les tangentes parallèles à Ox aux points B et B' ne sont plus des tangentes triples de la courbe, comme dans le cas précédent.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Mettental, à Besançon.

QUESTIONS

POSÉES AUX EXAMENS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1882 (1er degré).

1. — *Trouver, sans employer l'équation en* S, *la direction des axes de la surface* $x^2 - 2yz = 1$.

L'équation étant

$$f(x,y,z) = \varphi(x,y,z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + \mu = 0,$$

les directions principales sont les génératrices communes aux deux cônes $\frac{\varphi'_x}{x} = \frac{\varphi'_y}{y} = \frac{\varphi'_z}{z}$

2. — *Discuter les diverses surfaces représentées par l'équation:* $z = x^2 + y^2 - 2\lambda xy + x - y + 1$
quand on suppose que λ *est variable.* — *Quelles sont les valeurs de* λ *pour lesquelles cette surface représente un paraboloïde elliptique?*

3. *On donne deux axes rectangulaires* ox, oy; *soit* A *un point dont les coordonnées sont* 1 *et* 2; *soit* A' *son symétrique par rapport à* o, *trouver l'équation d'une hyperbole équilatère ayant les points* AA' *pour sommets réels.*

4. — *Former le développement de* $\frac{1}{(x^2 - 1) f(x)}$, $f(x) = 0$ *ayant pour racines* $\alpha, \beta \ldots \gamma$.

5. — *Trouver, sans employer la règle de l'Hôpital, la limite de* y, $y = \frac{a^x}{x}$ *quand* x *tend vers l'infini.*

On supposera d'abord que x tend vers l'infini par des valeurs entières; soit $a = 1 + \alpha$: (α étant positif) la formule du binôme peut s'appliquer au développement de $(1 + \alpha)^x$ et il en résulte notamment

$$(1 + \alpha)^x > 1 + \alpha x + \frac{x(x - 1)}{2} \alpha^2;$$

par suite $$y > \frac{1}{x} + \alpha + \frac{x - 1}{2} \alpha.$$

Quand x croît au delà de toute limite, le second membre de l'inégalité précédente croît pour des raisons évidentes, au delà de toute limite. Ainsi y croît lui-même au delà de toute limite.

On examine ensuite le cas où x tend vers l'infini par des valeurs quelconques et l'on ramène ce cas au précédent en observant que tout nombre x, non entier, est toujours compris entre deux nombres entiers consécutifs. Enfin on aura à considérer le cas où x tend vers $-y$ et celui où b est plus petit que 1. On ramène sans difficulté ces différents cas au précédent.

6. — *On donne un plan par ses traces, rendre ce plan de front par une seule rotation. Nouvelle projection verticale d'un point du plan.*

7. — *Trouver l'angle de deux plans qui passent par un point* m, m', *et par deux droites* D, D' *situées dans le même plan horizontal. Résoudre la question en imaginant la construction qui exige aussi peu de lignes qu'il est possible.*

8. — *Exprimer qu'un cône est de révolution en faisant voir que ses génératrices font un angle constant avec une droite fixe passant par le sommet du cône.*

9. — *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un des facteurs soit nul.*

La proposition est admise comme évidente pour des facteurs réels. Examinons d'abord le cas de deux facteurs imaginaires.

Soit $$U = (a + bi)(a' + b'i),$$
c'est-à-dire $$U = aa' - bb' + (ab' + ba')i;$$
si l'on suppose $U = 0$ on a donc
$$aa' - bb' = 0 \qquad (1)$$
$$ab' + ba' = 0$$
si a' et b' ne sont pas nuls à la fois, ces équations linéaires et homogènes en a' et b' admettent une solution différente de zéro; le déterminant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$
doit être nul, ainsi $$a^2 + b^2 = 0,$$
d'où $$a = 0 \quad b = 0.$$

RÉCIPROQUEMENT, si $a = 0$, les équations (1) sont vérifiées et l'on a $U = 0$.

Il reste à généraliser cette proposition et à l'étendre à un produit de p facteurs imaginaires; p étant un nombre entier quelconque. Ceci se fait sans difficulté en multipliant *successivement* les facteurs du produit.
$$(a_1 + b_1i)\,(a_2 + b_2i)\,\ldots\,(a_p + b_pi)$$
jusqu'à ce qu'on trouve un résultat nul. A cet instant on applique la remarque faite tout à l'heure, pour deux facteurs.

10. — *Condition pour que les deux faisceaux*
$$Ax^2 + + 2Bxy + Cy^2 = 0$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$
soient harmoniques.

En coupant par la droite $y = 1$ en deux équations du second degré dont les racines $\alpha\beta$, pour la première ; $\alpha'\beta'$, pour l'autre, satisfont à la relation

$$2(\alpha\beta + \alpha'\beta') = (\alpha + \alpha')(\beta + \beta'),$$

on trouve ainsi les conditions

$$2BB' = AC' + CA'.$$

ERRATUM

A la fin de la page 128 et pour la suivante corriger et remplacer la fin de l'article par ce qui suit :

or les deux premières relations donnent comme valeurs proportionnelles de α, β, γ, les expressions

$$l(-lA + mB + nC)$$
$$m(lA - mB + nC)$$
$$n(lA + mB - nC)$$

que je représente par

$$l.L$$
$$m.M$$
$$n.N$$

donc le lieu du centre a pour équation

$$\sqrt{A_1.L} + \sqrt{B_1 M} + \sqrt{C_1.M} = 0,$$

ce qui prouve : que le lieu est une conique tangente aux trois droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés du triangle primitif ; nous laissons au lecteur le soin de fixer en détail la situation et la forme du lieu géométrique ; notre seul but était d'indiquer un procédé qui peut servir dans beaucoup de questions.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 15542-2

CONDITIONS DE RÉALITÉ

DE TOUTES LES RACINES D'UNE ÉQUATION

Par **M. Walecki**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

1. — Je me propose de déduire ces conditions du théorème de Rolle, sans faire usage de l'énoncé du théorème de Sturm.

Soit $f(x)$ le premier membre d'une équation algébrique, $f'(x)$ sa dérivée, Q le quotient et $-\varphi(x)$ le reste de leur division.

Théorème. —*Si* f(x) *a toutes ses racines simples et réelles, et son premier terme positif, il en est de même pour* φ(x) ; *et les racines de* φ *séparent celles de* f'.

Soient α, β ... λ, les $m - 1$ racines, par ordre croissant, de f'; en vertu du théorème de Rolle, elles séparent celles de f et les deux suites identiques

$$f(\alpha), f(\beta) \ldots f(\lambda) \qquad (1)$$
$$-\varphi(\alpha), -\varphi(\beta) \ldots -\varphi(\lambda) \qquad (2)$$

ne présentent que des variations. Cette propriété de la dernière suite montre que φ est de degré $m - 2$ et a toutes ses racines réelles. De plus, les racines de f' séparent et limitent les racines de φ.

Pour reconnaître le signe du premier terme de φ, je remarque que $f(\lambda)$ est négatif, car entre λ et $+\infty$ il y a une seule racine de f, donc $\varphi(\lambda)$ est positif; comme λ est limite supérieure des racines de φ, le premier terme de φ est positif, *c.q.f.d.*

La démonstration qui précède suppose seulement que f et f' sont de degrés consécutifs, et que les racines de f' séparent celles de f.

Ceci posé, je remarque que le premier terme de f' est positif, j'opère sur f' et φ comme sur f et f' et je forme une suite complète de polynômes

$$f \quad f' \quad R_{m-2} \quad R_{m-3} \ldots R_0$$

de degrés marqués par leurs indices.

Chacun de ces polynômes a ses racines réelles, séparées

par celles du suivant. La démonstration précédente montre que tous les premiers termes sont positifs. En l'écrivant on a $m - 1$, conditions qui sont nécessaires pour la réalité des racines de f.

2. — Je dis maintenant que ces conditions sont suffisantes. Je les suppose réalisées.

Soient $f(x)$, $f'(x)$ et $\varphi(x)$ trois consécutifs quelconques de ces polynômes, je suppose qu'on ait démontré que les racines de f' sont réelles, simples et séparées par celles de φ; je dis que les racines de f sont toutes réelles et séparées par celles de f'.

En effet, par les mêmes notations que précédemment, la suite (2) ne présente que des variations, donc aussi la suite (1); et f a au moins $m - 2$ racines réelles. D'ailleurs $\varphi(\lambda)$ est positif, puisque λ est limite supérieure des racines de φ, donc $f(\lambda)$ est négatif, et *comme son premier terme est positif*, f a une autre racine au delà de λ, et par suite aussi une inférieure à α. f a donc toutes ses racines réelles et séparées par celles de f'.

D'ailleurs sur l'égalité $R_2 = R_1Q_1 - R_0$, on voit immédiatement que R_2 a ses racines réelles, séparées par celle de R_1: donc le théorème est vrai pour R_3, R_4 et ainsi de suite jusqu'à $f(x)$ qui a donc toutes ses racines réelles, c. *q. f. d.*

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ(*)

Par M. G. de Longchamps.

1. — Soit,

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \qquad (1)$$

l'équation proposée ; désignons par x_1, x_2, x_3, x_4, ses quatre racines. Sur une droite indéfinie D, et à partir d'une origine O.

(*) Hermite, *Journal de Boschardt*, t. 52.

Darboux, *Journal des mathématiques pures et appliquées*, t. 18, p. 220.

Mathieu, mémoire sur la résolution des équations, *Annali di mathematica pura ed applicata*, t. IV, 1862.

C'est par erreur que cette indication bibliographique a été donnée, dans le numéro de juillet (*Math. elém.*), à propos des équations quadratiques ; elle se rapporte à l'équation du quatrième degré.

portons ces valeurs dans le sens indiqué par leurs signes : on obtiendra quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. Si sur $A_1 A_2$ comme diamètre on décrit un cercle $\Delta_{1.2}$, on obtiendra ainsi, en combinant les points deux à deux, six cercles ; et si l'on désigne par $O_{12.34}$ le point où l'axe radical des deux cercles Δ_{12}. Δ_{34} coupe la droite D, on obtiendra ainsi trois points $O_{12.34}$, $O_{13.24}$, $O_{14.23}$; la connaissance de ces points dépend d'une équation du troisième degré que nous allons former et qui est une résolvante de l'équation donnée.

2. — Cherchons quelle relation doit exister entre les coefficients de l'équation (1) pour que les racines puissent se séparer en deux groupes : x_1, x_2 d'une part ; x_3, x_4 d'autre part, ces nombres satisfaisant à la même équation homographique en involution. Supposons que l'on ait les relations

$$x_1x_2 - \lambda(x_1 + x_2) + \mu = 0$$
$$x_3x_4 - \lambda(x_3 + x_4) + \mu = 0$$

et cherchons la relation qui en résulte pour les coefficients de l'équation donnée.

Ces relations peuvent s'écrire

$$(x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda) = \lambda^2 - \mu$$
$$(x_3 - \lambda)(x_4 - \lambda) = \lambda^2 - \mu,$$

si l'on pose $$x - \lambda = X.$$

L'équation $f(X + \lambda) = 0$ a donc quatre racines telles que le produit de deux d'entre elles, convenablement choisies, est égal au produit des deux autres. Or on a, par un développement connu,

$$f(X+\lambda) = f(\lambda) + Xf'(\lambda) + \frac{X^2}{1.2}f''(\lambda) + \frac{X^3}{1.2.3}f'''(\lambda) + \frac{X^4}{1.2.3.4}f''''(\lambda) ;$$

d'ailleurs,

$$f'(\lambda) = 4A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 2C\lambda + D$$
$$\frac{1}{2}f''(\lambda) = 6A\lambda^2 + 3B\lambda + C$$
$$\frac{1}{6}f'''(\lambda) = 4A\lambda + B$$
$$\frac{1}{24}f''''(\lambda) = A$$

On sait aussi, et l'on vérifie facilement que si l'équation

$$A'X^4 + B'X^3 + C'X^2 + D'X + E' = 0$$

a quatre racines X_1, X_2, X_3, X_4, telles que $X_1 X_2 = X_3 X_4$, on a, entre les coefficients, la relation

$$A'D'^2 = B'^2E'.$$

La relation cherchée est donc

$$A(4A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 2C\lambda + D)^2$$
$$= (4A\lambda + B)^2(A\lambda_4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E).$$

Développons les calculs : on peut observer que les termes en λ^6, λ^5 et λ^4 disparaissent, et l'on obtient finalement le résultat suivant :

(A) $$H\lambda^3 + I\lambda^2 + J\lambda + K = 0$$

en posant

(B) $$\begin{cases} H = 8A^2D - 4ABC + B^3 \\ I = 16A^2E + 2ABD + B^2C - 4AC^2 \\ J = 8ABE + B^2D - 4ACD \\ K = B^2E - AD^2. \end{cases}$$

Si l'on peut déterminer λ par cette équation du troisième degré, alors l'équation en X devient quadratique et se décompose, comme l'on sait, en deux équations du second degré. Enfin, on aura les racines cherchées par la relation

$$x = X + \lambda.$$

3. — On peut faire ici plusieurs remarques. On voit d'abord comment les considérations géométriques du § 1 conduisent naturellement à l'équation (A) et, au fond, le problème d'algèbre que nous avons résolu en la formant, se trouve naturellement indiqué quand on cherche à déterminer les trois centres d'involution qui correspondent à quatre points arbitrairement pris sur une droite.

L'équation (1) sera quadratique toutes les fois qu'on pourra trouver une racine de l'équation (A). Deux cas particuliers se présentent immédiatement : 1° celui qui correspond à l'hypothèse $K = 0$ et pour lequel on a une racine nulle dans (A) ; 2° le cas de $H = 0$ qui donne pour λ une racine infinie. Dans le premier cas on a $x_1 x_2 = x_3 x_4$; dans l'autre $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Nous avons (*) examiné ces deux

(*) Voir le journal de *Math. Élém.*, p. 156 et 169.

cas remarquables et montré qu'en effet, dans l'une et l'autre de ces hypothèses, l'équation du quatrième degré pouvait se résoudre par les équations du second degré seulement.

4. — Parmi les méthodes connues pour résoudre les équations du quatrième degré, celles de Ferrari et de Lagrange doivent leur succès (*) « *à cette seule circonstance que l'on peut former des fonctions de quatre variables qui n'ont que trois valeurs* ». La méthode que nous venons d'exposer rentre dans cette idée générale. En effet, l'inconnue auxiliaire λ que nous avons introduite, la racine de la résolvante, jouit de la propriété de satisfaire à la relation

$$(x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda) = (x_3 - \lambda)(x_4 - \lambda)$$

ou

$$\lambda = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Or avec quatre lettres x_1, x_2, x_3, x_4, on ne peut former que trois valeurs analogues à λ ; donc *à priori* l'équation en λ doit être du troisième degré seulement.

Cette manière d'envisager la résolution algébrique des équations, et qui est celle qui a dirigé les travaux de Lagrange et d'Abel lorsque le premier a cherché la résolution algébrique des équations et l'autre lorsqu'il a établi, le premier, l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations d'un degré supérieur à quatre, cette manière, disons-nous, met en lumière ce fait que nous voulons signaler ici, savoir *qu'il existe une infinité de résolvantes du troisième degré pour l'équation du quatrième degré.* Si nous désignons, en effet, par y une fonction des lettres x_1, x_2, x_3, x_4, tellement choisie que, en posant

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

le symbole d'opération désigné par f ne donne pour y que trois valeurs quand on permute les indices 1, 2, 3, 4, de toutes les façons possibles; il est d'abord acquis que l'équation en y doit être du troisième degré seulement. De plus c'est une résolvante : il faut entendre par là que si l'on peut déterminer une seule racine de cette équation, la résolution de l'équation proposée peut être effectuée par la résolution d'équations de degré moindre. Ce fait est démontré dans

(*) Serret, *Algèbre sup.*, t. II, p. 479.

tous les cours de mathématiques spéciales quand on traite de *l'abaissement des équations*. A toute forme algébrique f, définie comme nous venons de le faire, correspond donc une résolvante.

5. — Dans la méthode de Ferrari on pose

$$y = x_1x_2 + x_3x_4;$$

dans celle de Lagrange,

$$z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4;$$

dans celle que nous venons d'exposer,

$$\lambda = \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Mais il est bien évident que le symbole f peut être choisi d'une infinité de façons différentes. Si l'on pose, par exemple,

$$Y = \alpha y + \beta z + \gamma\lambda$$

et si l'on fait subir aux indices la permutation circulaire, les fonctions y, z, λ ne prennent que trois valeurs ; ainsi Y prendra seulement trois valeurs et la connaissance de Y dépend d'une équation du troisième degré.

6. — La liaison qui existe entre le paramètre introduit et l'idée géométrique qui a inspiré cette méthode peut encore se mettre en évidence ainsi qu'il suit. Imaginons que la droite D du § 1 soit prise pour axe des x, soit O l'origine des coordonnées que nous supposons d'ailleurs rectangulaires. Le cercle $\Delta_{1.2}$ a pour équation

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0.$$

De même, le cercle $\Delta_{3.4}$ a pour équation

$$x^2 + y^2 - x(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 0.$$

L'axe radical de ces deux cercles est donc

$$x(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = x_1x_2 - x_3x_4$$

d'où

$$x = \lambda.$$

Ainsi l'équation en λ que nous avons formée, la résolvante de l'équation (1) a pour racines les distances de l'origine aux trois axes radicaux des cercles Δ, combinés deux à deux.

7. — En supposant que l'équation considérée ait été débar-

rassée de son second terme, et mise sous la forme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

la résolvante, d'après les formules (A) et (B), est

$$8q\lambda^3 + 4(4r - p^2)\lambda^2 - 4pq\lambda - q^2 = 0. \qquad (1)$$

Celle que donne la méthode de Ferrari est

$$y^3 - py^2 - 4ry + 4pr - q^2 = 0. \qquad (2)$$

Enfin la méthode de Lagrange conduit à la résolvante

$$z^3 + 8pz^2 + 16(p^2 + 4r)z - 64q^2 = 0. \qquad (3)$$

Ces trois équations sont, à peu de chose près, et au point de vue des calculs que nécessiterait l'une ou l'autre de ces équations, d'une simplicité égale. Nous voulons seulement faire remarquer ici que ces trois équations peuvent, par un simple changement d'inconnue, être ramenées l'une à l'autre. Il y a, avons-nous dit tout à l'heure, une infinité de résolvantes; mais ces résolvantes en nombre infini rentrent-elles toujours et nécessairement les unes dans les autres ? Peut-on toujours par une transformation rationnelle et homographique passer d'une résolvante à une autre ? Par suite ces méthodes diverses de Ferrari, de Lagrange, celle que nous exposons, sont-elles vraiment distinctes et indépendantes ? Sont-elles au contraire tellement liées les unes aux autres que, bien que partant de points qui diffèrent, à l'infini, d'après la loi qui unit l'inconnue auxiliaire aux quatre racines de l'équation donnée, elles aboutissent toutes à des équations pouvant se déduire les unes des autres ? Ce sont là des points qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été soulevés et que nous ne voulons pas examiner en ce moment. Mais il est facile de reconnaître que les équations (1), (2), (3) ont une dépendance telle que l'on peut passer de l'une à l'autre et comme nous allons le montrer.

Considérons d'abord l'équation (1); on peut l'écrire

$$4\lambda^2(2q\lambda + 4r) = (2p\lambda + q)^2$$

et en posant

$$\frac{2p\lambda + q}{2\lambda} = \theta$$

on trouve, par cette transformation homographique (*) :

(*) Une transformation algébrique entre deux inconnues u, v, est dite homographique lorsque ces inconnues satisfont à la relation homographique

$$\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta = 0.$$

$$\theta^3 - p\theta^2 - 4r\theta + 4pr - q^2 = 0$$

c'est-à-dire, précisément, l'équation (2).

Prenons de nouveau l'équation (1) et transformons-la en posant $\lambda\mu = 2q$.

On trouve, pour l'équation en μ,

$$\mu^3 + 8p\mu^2 + 16\mu(p^2 - 4r) - 64q^2 = 0\,;$$

c'est bien la résolvante donnée par la méthode de Lagrange.

8. — Nous ferons remarquer en terminant cette note que la méthode que nous venons d'exposer, présente une propriété que nous allons développer et qui rend cette méthode d'une application commode.

Désignons par a, b, c, les trois racines de l'équation (1), on a donc

$$a = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Mais on suppose $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, par suite

$$a = \frac{x_1 x_2 + x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{2(x_1 + x_2)}$$

ou encore

$$2a = \frac{(x_3 + x_1)(x_3 + x_2)}{x_1 + x_2}.$$

On trouve de même

$$2b = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 + x_3)}{x_1 + x_3}$$

$$2c = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)}{x_2 + x_3}.$$

De ces équations on tire

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{bc}$$

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = \sqrt{ac}$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = \sqrt{ab}$$

et finalement

$$x_1 = \sqrt{bc} + \sqrt{ac} - \sqrt{ab}$$

$$x_2 = \sqrt{bc} + \sqrt{ab} - \sqrt{ac}$$

$$x_3 = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc}$$

et

$$x_4 = -\sqrt{ab} - \sqrt{ac} - \sqrt{bc}.$$

Exemple. — Soit proposé de résoudre l'équation

$$x^4 + 42x^2 - 160x + 441 = 0.$$

Notre résolvante est

$$\lambda^3 - 21\lambda + 20 = 0.$$

On a donc, $a = 1 \quad b = 4 \quad c = -5$

et, par nos formules,

$$x_1 = 2 + \sqrt{-5}$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{-5}$$
$$x_3 = -2 + 3\sqrt{-5}$$
$$x_4 = -2 - 3\sqrt{-5}$$

On peut vérifier qu'en effet on a bien

$$x^4 + 42x^2 - 160x + 441 = (x^2 - 4x + 9)(x^2 + 4x + 49).$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1882

Mathématiques spéciales.

Par un point quelconque P *pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en* O, *on mène trois normales qui la rencontrent aux points* A, B, C; *les longueurs* PA, PB, PC, PO *étant représentées respectivement par* a, b, c, l, *on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont* $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$, *et d'indiquer les signes des racines d'après la position du point* P *dans les diverses régions du plan.*

1. — *Recherche de l'équation du troisième degré.*

Posons $z = l^2 - a^2$

et désignons par x_0, y_0 les coordonnées du point P; par x, y celles du point A. On a

$$z = x_0^2 + y_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$$

ou $$z = 2x_0x + 2y_0y - x^2 - y^2. \qquad (1)$$

D'autre part, les coordonnées x, y satisfont à l'équation de la parabole, $$y^2 - 2px = 0 \qquad (2)$$

et à celle du cercle qui passe par les pieds des trois normales. On sait que cette équation est

$$x^2 + y^2 - x(x_0 + p) - \frac{yy_0}{2} = 0. \qquad (3)$$

L'équation en z s'obtiendra en éliminant x et y entre (1), (2) et (3); nous pourrons d'ailleurs considérer aussi l'hyperbole équilatère aux pieds des normales, courbe qui a pour équation

$$p(y_0 - y) + y(x_0 - x) = 0. \qquad (4)$$

Les équations (1) et (3) donnent d'abord

$$x(x_0 - p) + \frac{3}{a} y y_0 - z = 0$$

et, par combinaison avec (2),

$$y^2(x_0 - p) + 3py_0 y - 2pz = 0. \qquad (A)$$

D'autre part les équations (2) et (4) donnent

$$y^3 - 2p(x_0 - p)y - 2p^2 y_0 = 0$$

et, par combinaison avec (A),

$$3y_0 y^2 + 2\left\{(x_0 - p)^2 - z\right\} y + 2py_0(x_0 - p) = 0. \qquad (B)$$

Il nous reste à éliminer y entre (A) et (B) et cette élimination se fait immédiatement, par une règle connue, règle qui donne ici

$$2p[(x_0 - p)^2 y_0 + 3y_0 z]^2 = [2(x_0 - p)^3 - 9py_0^2 - 2(x_0 - p)z]$$
$$[6py_0(x_0 - p) + 2(x_0 - p)z - 2z^2].$$

ou, après avoir supprimé le terme $18py_0^2z^2$, dans les deux membres; après avoir alors divisé l'équation entière par $(x_0 - p)$, et réduit celle-ci en l'ordonnant, on a finalement

$$z^3 - 2(x_0 - p)^2 z^2 + (x_0 - p)\left\{(x_0 - p)^3 - 9py_0^2\right\} z$$
$$+ \frac{py_0^2}{4}\left\{4(x_0 - p)^3 - 27py_0^2\right\} = 0. \qquad (C)$$

C'est l'équation demandée.

2. —*Discussion de l'équation, au point de vue de la réalité des racines.*

Quand on donne $x_0 y_0$ l'équation (C) fait connaître les nombres $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$; cherchons dans quelles régions du plan il faut placer le point P pour que les racines de (C) soient réelles, coïncidentes ou imaginaires.

On pressent bien que la parabole cubique, enveloppe des normales, doit être nécessairement l'une des courbes de séparation; mais nous voulons le vérifier par la discussion directe de l'équation trouvée; nous voulons aussi nous assurer qu'il n'y a pas d'autre courbe de séparation, pour la réalité des racines.

Pour abréger les calculs, nous poserons

$$\alpha = \frac{2}{3}(x_0 - p) \qquad \beta = py_0^2.$$

L'équation est alors

$$z^3 - \frac{9\alpha^2}{2} z^2 + \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{27\alpha^3}{8} - 9\beta\right)z + \frac{\beta}{4}\left(\frac{27\alpha^3}{2} - 27\beta\right) = 0.$$

Changeons d'inconnue et faisons disparaître le terme du second degré en posant

$$z = t + \frac{3\alpha^2}{2}.$$

Il vient, après réduction,

$$t^3 - \frac{27}{16}\alpha(\alpha^3 + 8\beta)\, t + \frac{27}{32}\alpha^6 - \frac{27 . 5}{8}\alpha^3\beta - \frac{27\beta^2}{4} = 0,$$

ou, en supposant $t = \frac{3\theta}{2}$,

$$\theta^3 - \alpha(\alpha^3 + 8\beta)\frac{3\theta}{4} + \frac{\alpha^6}{4} - 5\alpha^3\beta - 2\beta^2 = 0. \quad \text{(D)}$$

La réalité des racines de cette équation dépend du signe de V en posant

$$4^2 . V = (\alpha^6 - 20\,\alpha^3\beta - 8\beta^2)^2 - \alpha^3(\alpha^3 + 8\beta)^3.$$

Comme V s'annule nécessairement, nous l'avons fait remarquer plus haut, lorsque le point $x_0 y_0$ est situé sur la parabole cubique, courbe dont l'équation est

$$\frac{8(x - p)^3}{27} = py^2$$

ou, dans notre notation $\alpha^3 = \beta$

nous poserons $\alpha^3 - \beta = u$

et l'on peut écrire

$$4^2 V = (u^2 - 18\beta u - 27\beta^2)^2 - (\beta + u)(u + 9\beta)^3.$$

En développant les calculs indiqués et réduisant les termes semblables on obtient $V = - u^3\beta$

ou $$V = - py_0^2 \left\{ \frac{8(x_0 - p)^3}{27} - py_0^2. \right\}$$

Les trois racines sont réelles si l'on a

$$V < 0$$

ou $$\frac{8(p - x_0)^3}{27} - py_0^2 > 0.$$

Il y a deux racines imaginaires si l'on suppose $V > 0$.

c'est-à-dire $\frac{8(x_0 - p)^3}{27} - py_0^2 < 0$.

Enfin, il y a deux racines égales lorsqu'on a $V = 0$, ce qui peut arriver de deux façons, suivant que le point P est situé sur la parabole cubique, ou sur la droite $y_0 = 0$, c'est-à-dire sur l'axe de x.

3. — ***Discussion de l'équation au point de vue des signes des racines.***

Construisons les trois paraboles cubiques R, R', R″ qui ont respectivement pour équation,

$$py^2 = \frac{8}{27}(x - p)^3$$

$$py^2 = \frac{4}{27}(x - p)^3$$

$$py^2 = \frac{3}{27}(x - p)^3.$$

Ces courbes ont la forme bien connue et qu'indique la figure; elles ont pour sommet commun le point S dont les coordonnées sont p et o. Ecartons, pour un instant, l'hypothèse où le point donné P est situé sur l'axe $x'x$ de la parabole. Il résulte du théorème de Descartes, lorsqu'on l'applique au cas où l'équation considérée a toutes ses racines réelles, que si P est placé dans la région $R' S R'_1 x$, il y a deux racines positives et une racine négative. Dans la région $(R'SR'_1 . R''SR''_1)$, le point P donnera au contraire deux racines négatives et une positive. Enfin si l'on suppose que P est placé dans la région $x'SR''R''_1$, l'équation n'a plus qu'une racine réelle; cette racine étant de signe contraire à son dernier terme, celui-ci étant négatif, la racine réelle est donc toujours positive.

Enfin dans le cas particulier où $y_0 = 0$, on aperçoit une racine nulle, résultat évident *a priori* et deux autres racines égales et positives $z = (x_0 - p)^2$. On vérifie facilement que si d'un point pris sur l'axe de la parabole on mène à cette courbe les normales qui sont de longueur a, on a bien, en effet, $l^2 - a^2 = (x_0 - p)^2$.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. **E.-J. Boquel.**

(*Suite*, voir p. 134.)

— *Équation de la droite de l'infini.* — Rappelons d'abord sommairement par quelles considérations géométriques on est conduit à considérer tous les points à l'infini dans un plan comme situés en ligne droite.

Au début de la géométrie descriptive, on montre dans tous les cours que *la perspective (ou projection conique) d'une droite sur un plan quelconque est une ligne droite, et que, réciproquement, toute ligne plane dont le plan ne passe pas par le point de vue, et dont la perspective est une droite, est elle-même une ligne droite.*

Cela posé, considérons un plan P et un autre plan quelconque Q non parallèle à P; si d'un point S, extérieur aux plans P et Q, on mène un plan R parallèle à P, ce plan R coupe le plan Q suivant une certaine droite Δ; si l'on considère le point S comme un point de vue, et le plan Q comme un tableau, toute ligne droite menée de S à un point situé à l'infini dans le plan P est parallèle à ce plan, et par conséquent se trouve contenue dans le plan R; cette ligne perce donc le tablean en un point de Δ; donc tous les points qui sont à l'infini dans le plan P ont leur perspective sur la droite Δ; donc, en vertu de la remarque faite au début, ces points doivent être considérés comme situés sur une même ligne droite.

On voit de plus que la direction de la droite de l'infini doit être regardée comme indéterminée; car le raisonnement qui précède est indépendant de cette direction.

La droite de l'infini devant rencontrer les axes de référence en des points à l'infini, nous partirons de ce fait évident pour en chercher l'équation.

Nous avons vu que les trois coordonnées trilinéaires d'un même point satisfont à la relation

$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2S$$

ou, ce qui est la même chose, à la relation

$$\frac{\alpha \sin A}{\lambda} + \frac{\beta \sin B}{\mu} + \frac{\gamma \sin C}{\nu} = \frac{S}{R}.$$

On peut donc dire, en général, que les trois coordonnées trilinéaires d'un même point sont unies par une relation de la forme $$m\alpha + n\beta + p\gamma = k. \qquad (1)$$

Il suffit pour cela de poser

$$\lambda = \frac{ak}{2mS}, \mu = \frac{bk}{2nS}, \nu = \frac{ck}{2pS}.$$

Une droite quelconque du plan est représentée par une équation de la forme

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0. \qquad (2)$$

Si l'on y fait $\alpha = 0$, pour avoir le point où cette droite rencontre l'axe de référence BC, il viendra

$$N\beta + P\gamma = 0 \qquad (3)$$

et la condition (1) devient dans ce cas

$$n\beta + p\gamma = k$$

On en tire $$\gamma = \frac{k - n\beta}{p},$$

d'où en substituant dans (3)

$$N\beta + P\frac{R - n\beta}{p} = 0,$$

ou $$\beta(Np - nP) + Pk = 0.$$

Pour que le point dont il s'agit se transporte à l'infini sur BC, il faut et il suffit qu'on ait

$$Np - nP = 0, \qquad \text{d'où} \quad \frac{N}{n} = \frac{P}{p}.$$

On reconnaît de même que, pour que les points de rencontre de la droite (2) avec les deux autres axes de référence soient à l'infini, il faut qu'on ait

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n}, \qquad \text{et} \quad \frac{M}{m} = \frac{P}{p}.$$

On a donc $$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p} = \rho$$

et l'équation de la droite de l'infini est alors

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0. \qquad (4)$$

Si l'on part de la condition

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{S}{R}$$

où les paramètres de référence sont supposés égaux à l'unité, l'équation de la droite de l'infini prend la forme

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0. \qquad (5)$$

— *Condition de parallélisme de 2 droites.* — Pour utiliser immédiatement ce qui précède, nous ferons observer que les droites parallèles à une droite donnée $M\alpha + N\beta\ P\gamma = 0$ doivent passer par la rencontre de cette droite avec la droite de l'infini. Or, comme en coordonnées cartésiennes l'équation générale des droites passant par l'intersection de deux droites données $D = 0$ et $D' = 0$ est $D + \lambda D' = 0$ (même démonstration que dans le système de Descartes), les droites parallèles à la droite $M\alpha + N\beta + P\gamma = 0$ sont donc comprises dans l'équation $M\alpha + N\beta + P\gamma + \lambda\,(m\alpha + n\beta + p\gamma) = 0$. ou, ce qui est la même chose,

$$M\alpha + N\beta + P\gamma + \lambda k = 0,$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Pour qu'une droite $M'\alpha + N'\beta + P'\gamma = 0$ soit parallèle à une droite donnée, il faut que son équation puisse être comprise dans l'équation générale ci-dessus.

On a donc les conditions

$$\frac{M'}{M + \lambda m} = \frac{N'}{N + \lambda n} = \frac{P'}{P + \lambda p},$$

et l'élimination de λ entre ces deux relations donnera la condition de parallélisme que l'on cherche.

L'emploi direct des coordonnées trilinéaires est beaucoup moins avantageux dans l'étude des propriétés métriques que dans celle des propriétés descriptives des figures; c'est pourquoi nous n'insisterons pas sur l'établissement des formules relatives aux relations de longueurs; lorsqu'on a besoin de quelqu'une de ces formules, on peut toujours, d'ailleurs, l'obtenir immédiatement en partant de la formule correspondante en coordonnées cartésiennes, que l'on trans-

forme dans le système des coordonnées trilinéaires au moyen des relations que nous avons démontrées. Prenons un exemple, afin de bien éclaircir le procédé.

— *Distance d'un point à une droite.* — Soient la droite $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, et le point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. L'équation de la droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires s'obtiendra en remplaçant α, β, γ par les valeurs

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By + C)$$

$$\beta = \frac{\mu}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}(A'x + B'y + C')$$

$$\gamma = \frac{\nu}{\sqrt{A''^2 + B''^2}}(A''x + B''y + C'').$$

Elle sera donc, en désignant pour abréger par K, K', K'' les coefficients des fonctions linéaires dans les seconds membres,

$$mK(Ax + By + C) + nK'(A'x + B'y + C') + pK''(A''x + B''y + C'') = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées cartésiennes du point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$: la distance de ce point à la droite est exprimée par la formule :

$$\delta = \frac{mK(Ax_0 + By_0 + C) + nK'(A'x_0 + B'y_0 + C') + pK''(A''x_0 + B''y_0 + C'')}{\pm\sqrt{(AmK + A'nK' + A''pK'')^2 + (BmK + B'nK' + B''pK'')^2}}$$

Mais, en vertu des formules générales de transformation, on a

$$\alpha_0 = K(Ax_0 + By_0 + C),\quad \beta_0 = K'(A'x_0 + B'y_0 + C'),$$
$$\gamma_0 = K''(A''x_0 + B''y_0 + C''),$$

et par conséquent

$$\delta = \frac{m\alpha_0 + n\beta_0 + p\gamma_0}{\pm\sqrt{(AmK + A'nK' + A''pK'')^2 + (BmK + B'nK' + B''pK'')^2}}$$

Dans le système particulier où les paramètres de référence sont $\lambda = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\mu = \sqrt{A'^2 + B'^2}$, $\nu = \sqrt{A''^2 + B''^2}$, on a $K = K' = K'' = 1$, et la formule se réduit à

$$\delta = \frac{m\alpha_0 + n\beta_0 + p\gamma_0}{\sqrt{(Am + A'n + A''p)^2 + (Bm + B'n + B''p)^2}}.$$

On pourra déduire de cette manière, toutes les fois que cela sera utile, les formules en coordonnées trilinéaires des formules correspondantes en coordonnées cartésiennes.

— *Corollaire : Transformation des coordonnées trilinéaires.* — Si l'on veut passer d'un système de coordonnées trilinéaires à un autre système de coordonnées trilinéaires, il est clair qu'on devra connaître les équations dans le premier système des côtés du nouveau triangle de référence A'B'C'.

Soient donc $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$, $a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0$ les équations respectives des côtés B'C', A'C' et A'B'; les distances d'un point quelconque du plan $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ à ces trois droites étant déterminées par la formule δ établie plus haut, et leurs signes étant fixés par une discussion préalable, si λ' μ' ν' sont les nouveaux paramètres de référence, les formules de transformation seront

$$\left\{\begin{aligned} \alpha'_1 &= \frac{\lambda'}{q}(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) \\ \beta'_1 &= \frac{\mu'}{q'}(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1) \\ \lambda'_1 &= \frac{\nu'}{q''}(a''\alpha_1 + b''\beta_1 + c''\gamma_1) \end{aligned}\right.$$

où q, q', q'' désignent les radicaux respectifs qui entrent dans les distances d'un point aux trois côtés du nouveau triangle de référence. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMEN

Premier degré (1882).

11. — *Construire la courbe*

$$y = \sqrt[3]{1 + x^3} - \sqrt[5]{1 + x^5}.$$

Cette fonction y est toujours finie et bien déterminée. On cherchera l'intersection de la courbe avec l'axe des x; on trouvera : 1° trois racines infinies; 2° trois racines nulles; 3° trois racines égales à — 1.

L'équation $\qquad (1 + x^3)^5 = (1 + x^5)^3$

debarrassée de ces racines donne l'équation réciproque du sixième degré

$$5x^6 - 15x^5 + 27x^4 - 31x^3 + 27x^2 - 15x + 5 = 0$$

et en posant $$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{z},$$

$$z^3 - 12z^2 + 15z - 5 = 0.$$

En transformant cette équation de façon à faire disparaître les termes du second degré, en posant

$$z = t + 4$$

on trouve $$t^3 - 33t - 73 = 0$$

qui a deux racines imaginaires. Quant à la racine réelle, comme elle est plus grande que $\frac{1}{2}$, elle ne donne pour x que des valeurs imaginaires. On voit enfin que pour de très grandes valeurs de x, positives ou négatives, y est positif. La courbe a donc la forme qu'indique la figure ci-jointe.

12. — *Construire la courbe*

$$\rho = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

Reconnaître que c'est une strophoïde.

13. — *On donne un cercle et un rayon fixe* OB ; OA *étant un rayon mobile, trouver le lieu décrit par le centre des hauteurs du triangle* AOB.

Ce lieu est une strophoïde ayant pour sommet le point A et pour asymptote la tangente au point A' diamétralement opposé à A. On reconnaît géométriquement ce résultat en observant que la droite qui va du point A au centre des hauteurs, forme avec la perpendiculaire abaissée de O sur AB et la perpendiculaire Oy à OA un triangle isoscèle.

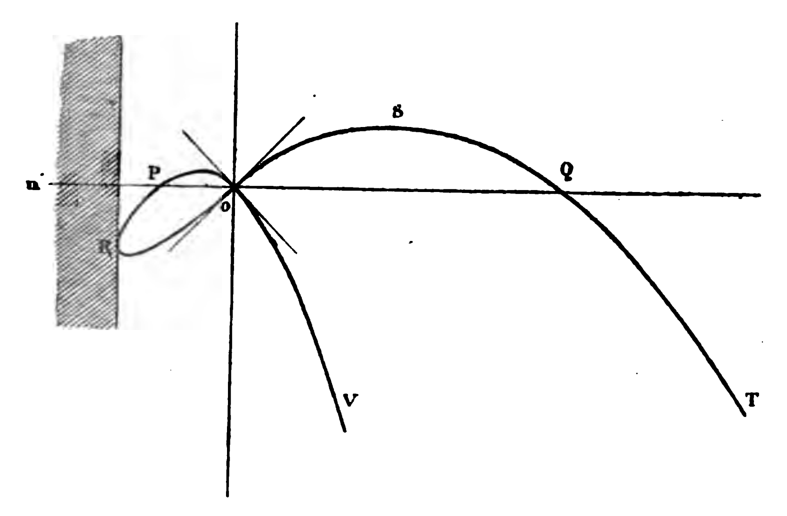
14. — *Construire la courbe*

$$y = -\frac{x^2}{2} \pm x\sqrt{x+1}.$$

Si l'on prend explicitement le radical avec le signe +, on aura une fonction y bien déterminée, réelle pour toutes les valeurs de x supérieures à -1 ; on obtient une première branche de courbe ROSQT, qui, au point $x = -1$, $y = -\frac{1}{2}$

est tangente à la droite $x = -1$, qui passe par l'origine tangentiellement à la première bissectrice et présente en ce point une inflexion. Cette branche coupe l'axe des x à une distance de l'origine $OQ = 2 + 2\sqrt{2}$, puis se dirige à l'infini, avec une forme parabolique dont la concavité est tournée vers l'axe des y.

La seconde branche coupe l'axe Ox' au point P, tel que $OP = 2 - 2\sqrt{2}$, passe à l'origine tangentiellement à la seconde bissectrice; la courbe a la forme qu'indique la figure.



15. — *Construire la courbe*

$$y = x + \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x}.$$

déterminer ses asymptotes et sa forme générale.

16. — Démonstration géométrique de la méthode de Newton. — *Montrer que si l'équation a toutes ses racines réelles, et si α désigne une limite inférieure des racines positives de l'équation, on peut appliquer, avec certitude, la méthode de Newton au nombre α.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée; nous supposons qu'elle soit de degré m et qu'elle ait pour racines les nombre a_1, $a_2, \ldots a_m$; si l'on désigne par $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ les $(m - 1)$

racines de $f'(x) = 0$, racines qui sont réelles et comprises dans les $(m - 1)$ intervalles des nombres $a_1, a_2 \ldots a_m$, supposés rangés dans l'ordre croissant ; et par $c_1, c_2, \ldots c_{m-2}$ les $(m - 2)$ racines de $f''(x) = 0$, racines qui sont réelles et comprises dans les intervalles des nombres croissants $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$; on voit que l'on peut écrire

$$\alpha < a_1 < b_1 < c_1.$$

Il résulte de cette remarque que α est nécessairement une limite inférieure des racines positives de l'équation proposée.

Ceci posé, soit

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

cette équation ; on a

$$\frac{f(x)}{f''(x)} = \frac{x^2 + A_1 x + A_2 + \frac{A_3}{x} + \ldots + \frac{A_m}{x^{m-2}}}{m(m-1) + \frac{(m-1)(m-2)A_1}{x} + \ldots + \frac{2A_{m-2}}{x^{m-2}}}$$

Pour de très grandes valeurs négatives de x, on voit que le signe de $\frac{f}{f''}$ est positif : mais f et f'' conservent le même signe depuis $-\infty$ jusqu'à α ; donc pour $x = \alpha$ le rapport $\frac{f}{f''}$ est positif et la méthode de Newton s'applique avec certitude à la valeur approchée α.

On peut observer que si l'équation $f(x) = 0$ n'a pas toutes ses racines réelles, mais si la limite α est fournie par l'une des méthodes du cours, α est alors une limite inférieure des racines positives de f et de ses dérivées successives, et l'on peut étendre la remarque en question à cette limite α.

17. — *On donne deux plans* P, P′ *passant par l'origine et dans ces plans deux droites* Δ, Δ', *faisant un angle constant* V ; *au plan de ces deux droites on mène une normale ; trouver le lieu décrit par cette droite.*

Soient
$$ax + by + cz = 0 \qquad \text{(P)}$$
$$a'x + b'y + c'z = 0 \qquad \text{(P')}$$
les deux plans donnés. Désignons par $x'y'z'$ les coordonnées

d'un point du lieu cherché; le plan

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

coupe les plans P et P' suivant des droites dont les équations

sont $$\frac{x}{bz' - cy'} = \frac{y}{cx' - az'} = \frac{z}{ay' - bx'} \qquad (\Delta)$$

et $$\frac{x}{b'z' - c'y'} = \frac{y}{c'x' - a'z'} = \frac{z}{a'y' - b'x'}; \qquad (\Delta')$$

il ne reste plus qu'à exprimer que ces droites forment l'angle V. La condition connue donne un cône du quatrième degré, qui se réduit au second quand $V = 90°$.

18. — *Limite de* y

$$y = \frac{e^x - 1}{x}$$

pour $x = 0$.

On posera $e^x - 1 = \frac{1}{m}$; quand x tend vers 0, on sait que m tend vers l'infini ; on a d'ailleurs, et d'après ce changement de notation,

$$y = \frac{1}{mL\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{L\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}$$

et, pour $m = \infty$, on trouve $y = \frac{1}{L.e} = 1$.

19. — *Décomposer une fraction rationnelle en fractions rationnelles simples.*

Ayant posé $$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$

on suppose que a soit une racine réelle ou imaginaire de multiplicité α, on montre que l'on peut avoir, f et F étant bien entendu des polynômes entiers premiers entre eux, identiquement

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)} + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ est la partie entière, quand elle est différente de zéro, de la fraction proposée, et l'on suppose que

$$F(x) = (x-a)^\alpha F_1(x).$$

A est d'ailleurs un nombre de la forme $(A' + A''i)$.

On a en effet, identiquement, et quel que soit A,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)};$$

On dispose de A de façon que

$$f(a) = AF_1(a).$$

A n'est ni nul, ni infini, mais de la forme $A' + A''i$; on peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître $\varphi(x)$ pour calculer le coefficient A.

20. — *Exprimer au moyen d'un déterminant que les deux droites*

$$P = ax + by + cz = 0$$
$$Q = a'x + b'y + c'z = 0$$

se coupent sur la conique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Considérons l'équation

$$\varphi = f(x, y, z) + 2\alpha P + 2\beta Q = 0;$$

elle peut être considérée comme une fonction homogène du second degré en x, y, z, α, β. Le théorème d'Euler donne

$$2\varphi = x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z + \alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta.$$

Écrivons que les dérivées partielles $\varphi'_x, \varphi'_y \ldots \varphi'_\beta$ sont nulles : on aura donc

$$\begin{aligned}
Ax + B''y + B'z + a\alpha + a'\beta &= 0\\
B''x + A'y + Bz + b\alpha + b'\beta &= 0\\
B'x + By + A''z + c\alpha + c'\beta &= 0\\
ax + by + cz &= 0\\
a'x + b'y + c'z &= 0.
\end{aligned}$$

Ces équations linéaires et homogènes en x, y, z, α, β, admettront une solution différente de zéro, si l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & a & a' \\ B'' & A' & B & b & b' \\ B' & B & A'' & c & c' \\ a & b & c & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si nous supposons cette condition réalisée, l'identité d'Euler prouve que le point considéré xyz donne $\varphi = 0$; et comme l'on a $\varphi'_\alpha = 0, \quad \varphi'_\beta = 0$

c'est-à-dire $P = 0, \quad Q = 0,$
on a donc aussi $f(x, y, z) = 0$. Ainsi le point xyz est situé à la fois sur les deux droites et sur la conique données. La réciproque est vraie : la condition cherchée est donc $\Delta = 0$.

Si l'on traite cette question par la méthode la plus naturelle, celle qui consiste à écrire que les coordonnées x, y, z données par les relations

$$\frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'},$$

satisfont à l'équation $f(x, y, z) = 0$, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &A\,(bc' - cb')^2 + A'\,(ca' - ac')^2 + A''\,(ab' - ba')^2 \\ &+ 2B\,(ca' - ac')\,(ab' - ba') \\ &+ 2B'\,(ac' - ca')\,(bc' - cb') \\ &+ 2B''(ba' - ab')\,(ca' - ac') = 0. \end{aligned}$$

C'est le déterminant Δ, développé. On peut remarquer, *à priori*, c'est-à-dire sans aucun calcul que ce déterminant est une fonction linéaire et homogène par rapport aux lettres A, A', A'', B, B', B''.

21. — *On considère une hyperbole* H *ayant pour asymptotes les droites* Δ, Δ' ; *soit* M *un point de* H, *par le point* M *on peut mener deux cercles tangents à* Δ *et à* Δ'; *démontrer que la distance des centres de ces cercles est une quantité constante, quand le point* M *parcourt* H.

L'équation de l'un des cercles est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(x - x_1)^2 = 0,$$

$x - x_1 = 0$ étant l'équation de la droite des contacts; si l'on exprime qu'il passe par le point M, x_0, y_0 étant les coordonnées de ce point on a

$$(x_0 - x_1)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

Soit $x - x_2 = 0$ l'équation de la corde des contacts de l'autre cercle, on aura de même

$$(x_0 - x_2)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

On en déduit $$x_0 - x_1 = \frac{ab}{c}$$

$$x_2 - x_0 = \frac{ab}{c}$$

ou $$x_2 - x_1 = \frac{ab}{c}.$$

La distance des cordes de contact étant constante, la propriété énoncée est vraie.

QUESTIONS PROPOSÉES

26. — Soit $f(x, y, z) = 0$ un paraboloïde; donner l'équation qui détermine les paramètres des paraboles principales.

27. — En désignant par V l'angle, aigu ou obtus, des asymptotes de l'hyperbole, angle dans lequel se trouve la courbe, démontrer que

$$\operatorname{tg} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC} \cdot \sin\theta}{A + C - 2B\cos\theta},$$

ε étant égal à ± 1, et son signe étant le même que celui du discriminant.

28. — Construire la courbe

$$Lx \cdot Ly = K.$$ *(Laisant).*

29. — Dans le plan d'une parabole fixe glisse une parabole mobile égale, de telle sorte que le sommet de chacune d'elles soit sur l'autre. Démontrer qu'un point quelconque du plan de la parabole mobile décrit une podaire de développée de parabole. *(Ed. Lucas.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 17374-2.

TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 49, 77, 97, 121, 145.)

33. Examinons maintenant le cas particulier où le plan P qu'on transforme est tangent à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre. On suppose donc $h = K$; le discriminant est nul et les racines de l'équation en S sont

$$S_1 = -(A + h),$$
$$S_2 = 0,$$
$$S_3 = -2h.$$

Le hessien est alors

$$H = -d^2(B^2 + C^2)^2.$$

Il ne peut être nul que si l'on suppose, à la fois, $B = 0$, $C = 0$; mais, à un pareil plan correspond le pôle principal. Ainsi nous pouvons supposer H différent de zéro et nous allons faire voir qu'au plan P correspond alors un paraboloïde elliptique.

En effet, le hessien n'étant pas nul, la surface est certainement l'un des deux paraboloïdes; je dis que S_1 et S_3 sont de même signe. Car nous avons expliqué (nº 32) qu'on ne pouvait pas supposer $A + K < 0$ et comme l'on a $h = K$, on a donc nécessairement $A + h > 0$; donc S_1 et S_3 sont de même signe. Concluons :

Théorème. — *Dans la transformation réciproque, à un plan tangent à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre correspond un paraboloïde elliptique.*

34. Nous ferons connaître ici les deux causes qui peuvent produire l'abaissement de l'ordre de la surface transformée; cet abaissement résulte des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Lorsque la surface* f, *de degré* m, *passe par le pôle principal, la surface transformée n'est plus de degré* 2m, *comme dans le cas général, mais seulement du degré* (2m — 1).

Théorème II. — *Lorsque la ligne des pôles est une corde normale de f, le pôle secondaire étant le pied de cette normale, s'il arrive que ce point soit un ombilic de la surface, le degré de la surface transformée est, par ce fait, abaissé de deux unités.*

Ces deux propriétés sont la conséquence immédiate des formules de transformation (n° 30).

Il résulte de ces deux remarques qu'en transformant une quadrique Q par la méthode que nous exposons, on peut obtenir, suivant le choix que l'on fait du pôle principal et du pôle secondaire:

1° *Un plan*; la ligne des pôles est une corde normale de la quadrique Q, et le pôle secondaire est un ombilic.

2° *Une quadrique*; le pôle secondaire est encore un ombilic de Q, mais le pôle principal n'est plus, comme dans le cas précédent, placé à l'extrémité de la corde.

3° *Une surface cubique*; le pôle principal est situé sur Q.

4° *Une surface quartique*; les deux pôles ne présentent aucune des singularités des trois cas précédents.

35. — Nous signalerons, en terminant cette étude très incomplète d'une transformation qui nous paraît l'une des plus simples que l'on puisse imaginer dans ce groupe de transformations du genre Magnus, la surface cubique qui correspond à l'ellipsoïde.

D'après la remarque que nous avons faite en examinant le troisième cas du paragraphe précédent, il suffit pour obtenir cette surface cubique de faire passer l'ellipsoïde considéré par le pôle principal. Considérons donc l'ellipsoïde rapporté à ses axes, et prenons pour pôle principal l'une des extrémités de l'axe majeur, pour pôle secondaire l'autre extrémité de cet axe.

A l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

correspond la surface cubique

$$a^2 (X - a)\left(\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right) = (X + a)(Y^2 + Z^2).$$

Cette équation, étant de la forme $F\left(X, \frac{Y}{Z}\right) = 0$,

est l'équation d'un conoïde; ce conoïde est compris tout entier entre les deux plans $x + a = 0$, $x - a = 0$; il admet un double système de génératrices rectilignes parallèles au plan de yz, et en étudiant les sections faites dans la surface par le plan $z = h$, on obtient une cubique

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} - \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$$

et quand on fait varier h, la déformation de cette cubique donne une idée assez exacte de la forme de ce conoïde.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

Par M. **Édouard Lucas.**

Théorème I. — *Dans tout réseau géométrique formé de lignes droites ou courbes le nombre de points impairs est toujours zéro ou un nombre pair* (*).

Euler, dans son mémoire connu sous le nom de *Problème des Ponts de Kœnigsberg*, mémoire qui a paru en latin dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*, a complètement démontré ce théorème. On peut encore donner à la démonstration la forme suivante.

Désignons par A, B, C, D, . . . les diverses stations du réseau, les divers points d'embranchement, les têtes de ligne ; soient P et Q deux stations voisines, c'est-à-dire telles que l'on puisse aller de P en Q par un ou plusieurs chemins, sans rencontrer d'autres stations du réseau. Si l'on supprime l'un de ces chemins PQ, le nombre des chemins qui

(*) On dit, dans cette géométrie des réseaux, qu'un point est pair lorsque de ce point partent des demi-droites en nombre pair. Il est impair dans le cas contraire. Par exemple, si l'on imagine une droite AB terminée aux points A et B, A et B sont des points impairs, et si l'on considère un point O sur AB, O est un point pair. G. L.

[illegible] en P [illegible] en Q [illegible] d'une unité, et change de [illegible]. [illegible] si P et Q sont les points impairs, [illegible] suppression; si P et Q sont [illegible] P et Q sont de parité [illegible]. Donc, la parité [illegible] impairs ne change pas par cette suppression. [illegible] successivement tous les [illegible], jusqu'à ce qu'il [illegible] des points impairs est nul; le [illegible] pair, avant la suppression.

Théorème II — [illegible]

[illegible]

[illegible] c'est-à-dire que [illegible] réseau à un autre. [illegible] dans le cas de plusieurs [illegible] à chacun d'eux les [illegible] d'un point [illegible] sans repasser sur la [illegible] la parité [illegible] que le [illegible] En supprimant le parcours AB [illegible] que [illegible]

[illegible] réseau [illegible] qu'un réseau [illegible] pair.

[illegible] M du réseau [illegible] au hasard [illegible] ne se trouvera [illegible] point de départ M, après avoir [illegible] après avoir décrit un certain [illegible] parcouru tout le [illegible] peuvent [illegible] sur les [illegible] Par suite le réseau peut être décrit en [illegible] au plus.

Note. — Les deux théorèmes précédents sont extraits d'un livre de M. Édouard Lucas (*), livre qui, sous le titre de *Récréations mathématiques*, renferme tant d'aperçus ingénieux et profonds. Aucune lecture, sous une forme plus agréable et plus facile, ne nous paraît plus propre à développer dans l'esprit l'idée de certaines combinaisons mathématiques, et nous avons plaisir à signaler cet ouvrage à nos lecteurs.

G. L.

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler.**

(*Suite*, voir page 149.)

V. — Covariants principaux de la forme binaire de degré n.

Considérons sur une droite n points $A_1, A_2, \ldots A_n$, déterminés par l'équation $f = ax^n + nbx^{n-1}y + \ldots = 0$, et soit P′ un point fixe (le pôle) dont les coordonnées sont (x', y'), P un point quelconque de la même droite, de coordonnées (ξ, η). Cherchons l'équation qui détermine les n valeurs du rapport $\lambda_i = \frac{PA_i}{P'A_i}$;

on a
$$\lambda_i = \frac{\xi - x_i}{x_i - x'} = \frac{\eta - y_i}{y - y'} = \frac{\xi y_i - \eta x_i}{\xi y' - \eta x'}$$

et par suite
$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{\eta + \lambda i y'}{\xi + \lambda i x'}.$$

L'équation demandée s'obtiendra en remplaçant dans l'équation $ax^n + nbx^{n-1}y + \ldots = 0$ les variables x et y par $\xi + \lambda x'$, $\eta + \lambda y'$. En développant par la formule de Taylor et mettant x, y à la place de ξ, η qui désignent maintenant des

---

(*) *Récréations mathématiques*, par Édouard Lucas. — Gauthier-Villars, 1882.

[illegible] il vient

$$[illegible] + \frac{\lambda^2}{1.2}[x'^2 f''_{x^2} + 2x'y' f''_{xy}$$

$$+ [illegible] + \ldots\ldots + \lambda^n f(x', y') = 0.$$

[illegible] coefficients de $\lambda, \lambda^2 \ldots \lambda^{n-1}$, on [illegible] représentant les $n-1$ *groupes po-* [illegible] par rapport aux n points du système [illegible]

[illegible] de $n-1$ points, est donné [illegible] Les points P de ce groupe sont tels [illegible] $n-1$ à $n-1$ des n rapports [illegible] [illegible] groupe $x f'_x + y f'_y = 0$ se ré- [illegible] des moyennes harmoniques de [illegible] on a $\frac{n}{PP} = \frac{1}{P'A_1} + \frac{1}{P'A_2}$ [illegible]

[illegible] que le premier groupe est tel que [illegible] des moyennes harmoni- [illegible] $A_1, A_2 \ldots A_n$, le point P′. Cette [illegible] est facile, pourrait servir de [illegible] polaire.

[illegible] donnent les points des [illegible] les covariants de la forme f: [illegible] le calcul.

[illegible] les formules de [illegible]

[illegible]

[illegible] par la substitution.

c'est-à-dire $f(\alpha X + \beta Y, \alpha' X + \beta' Y)$. Maintenant les deux développements devant être égaux pour toutes les valeurs de λ, les coefficients des puissances de λ seront égaux, et l'on aura $x'f'_x + y'f'_y = X'F'_X + Y'F'_Y$, etc...

La considération du premier groupe polaire donne lieu à d'autres formes liées à la forme donnée par des relations remarquables. Si d'abord on cherche les pôles dont les premiers groupes polaires ont un point double, et les points doubles de ces groupes, on est conduit à exprimer que l'équation $x'f'_x + y'f'_y = 0$ a une racine double, c'est-à-dire à écrire $x'f''_{x^2} + y'f''_{xy} = 0$, $x'f''_{xy} + y'f''_{y^2} = 0$.

L'élimination de x', y' entre ces équations donne une équation de degré $2n - 4$: $H = f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = 0$. $H = 0$ représente les points doubles des premiers groupes polaires ; c'est le *hessien* de f.

Si au contraire on élimine x, y entre les mêmes équations, on aura les pôles correspondants aux points doubles ; l'équation en x', y', $P = 0$ est aussi de degré $2n - 4$.

On peut aussi se proposer de rechercher les pôles dont les groupes polaires relatifs au système primitif et au hessien ont un point commun, et de trouver ces points communs.

On obtient ceux-ci en éliminant x', y' entre les équations $x'f'_x + y'f'_y = 0$ et $x'H'_x + y'H'_y = 0$, ce qui donne $f'_x H'_y - f'_y H'_x = T = 0$, équation de degré $3n - 6$.

Les pôles correspondants résultent de l'élimination de x, y entre les mêmes équations ; on obtient ainsi une autre équation $\Theta = 0$ de degré $3n - 6$.

De ce que les formes P, H, Θ et T représentent des groupes de points liés au système donné ($f = 0$) par des relations géométriques indépendantes du choix des points fondamentaux, on est en droit de conclure que ce sont des covariants de f. Ainsi, en faisant une transformation linéaire qui change $f(x, y)$ en $F(X, Y)$, le hessien de F sera le produit du hessien de f par un certain facteur dépendant seulement des coefficients α, β, α', β' des formules de transformation. C'est ce qu'il est facile de vérifier. On a $f(x, y) = F(X, Y)$ avec $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$; on en conclut

$$F'_X(X, Y) = \alpha f'_x + \alpha' f'_y, \quad F'_Y(X, Y) = \beta f'_x + \beta' f'_y,$$

puis
$$F''_{X^2}(X, Y) = \alpha[\alpha f''_{x^2} + \alpha' f''_{xy}] + \alpha'[\alpha f''_{xy} + \alpha' f''_{y^2}]$$
$$= \alpha^2 f''_{x^2} + 2\alpha\alpha' f''_{xy} + \alpha'^2 f''_{y^2},$$
$$F''_{Y^2}(X, Y) = \beta^2 f''_{x^2} + 2\beta\beta' f''_{xy} + \beta'^2 f''_{y^2},$$
$$F''_{XY}(X, Y) = \alpha\beta f''_{x^2} + (\alpha\beta' + \beta\alpha') f''_{xy} + \alpha'\beta' f''_{y^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $H(X, Y)$, c'est-à-dire dans $F''_{X^2}F''_{Y^2} - (F''_{XY})^2$, on trouve

$$H(X, Y) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2[f''_{x^2}f''_{y^2} - (f''_{xy})^2] = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 H(x, y).$$

On trouverait de même $T(X, Y) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^3 T(x, y)$.

Le même procédé ne s'appliquerait plus aussi facilement aux formes P et Θ, au moins pour le cas où l'exposant n a une valeur quelconque. Mais nous verrons que pour la forme du quatrième degré on a $\Theta = T$ et $P = -Jf + IH$, de sorte que, après la transformation, P se trouve multiplié par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^6$.

VI. — *Réduction de la forme du quatrième degré à la forme canonique.*

Il existe entre la forme du quatrième degré et ses covariants des relations simples ; il est avantageux pour les étudier de ramener la forme f à sa *forme canonique*, c'est-à-dire à l'expression la plus simple qu'elle puisse avoir, sans rien perdre de sa généralité.

Soient A, B, C, D les quatre points représentés par l'équation $f = 0$; comme ils peuvent être groupés par couples de trois manières différentes, ils donnent lieu à trois involutions quadratiques dont les couples fondamentaux sont

$$(AB)(CD), \quad (AC)(BD), \quad (AD)(BC).$$

Soient O, O' les foyers ou points doubles de la première involution, c'est-à-dire les points qui divisent à la fois harmoniquement les segments AB et CD, on aura

$$\frac{OA}{O'A} : \frac{OB}{O'B} = -1 \text{ et aussi } \frac{OC}{O'C} : \frac{OD}{O'D} = -1.$$

Donc, si l'on choisit O et O' pour nouveaux points fondamentaux des coordonnées binaires, les quatre racines de la nouvelle

équation homogène du quatrième degré $\frac{OA}{O'A'}, \frac{OB}{O'B'}, \frac{OC}{O'C'}, \frac{OD}{O'D}$ seront deux à deux égales et de signes contraires; donc cette nouvelle équation sera bicarrée. Ainsi se trouve établie la possibilité de réduire la forme donnée f à la forme canonique $AX^4 + 6CX^2Y^2 + EY^4$, et cela de trois manières différentes. D'ailleurs on peut reconnaître qu'il n'est pas possible en général de la réduire à une expression ayant moins de trois termes; supposons la réduction effectuée, on aura identiquement

$$ax^4 + 4bx^3y + \ldots = AX^4 + 6CX^2Y^2 + EY^4.$$

Mais on peut toujours introduire les coefficients A, E dans les expressions mêmes des nouvelles variables en posant $X\sqrt[4]{A} = X'$ et $Y\sqrt[4]{E} = Y'$; on peut donc écrire

$$X'^4 + 6C'X'^2Y'^2 + Y'^4 = a(\alpha X' + \beta Y')^4$$
$$+ 4b(\alpha X' + \beta Y')^3(\alpha' X' + \beta' Y') + \ldots$$

En identifiant, on aura cinq équations de condition pour déterminer α, β, α', β' et C'. L'expression réduite aura en général trois termes; elle ne pourra en avoir moins de trois que dans des cas particuliers.

Cherchons maintenant à déterminer les nouveaux points fondamentaux. Soit λ une des racines de l'équation (2); la forme f se décompose ainsi (formule [7]) :

$$f = \left[ax^2 + xy\left(2b - \sqrt{A}\right) + y^2\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$
$$\left[ax^2 + xy\left(2b + \sqrt{A}\right) + y^2\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right] = P.Q$$

et on a l'involution $P + \gamma Q = 0$, γ étant un paramètre variable. Pour avoir les points doubles de cette involution, il faut éliminer γ entre les deux équations

$$P'_x + \gamma Q'_x = 0, \quad P'_y + \gamma Q'_y = 0,$$

ce qui donne

$$\left[2ax + y\left(2b - \sqrt{A}\right)\right]\left[x\left(2b + \sqrt{A}\right) + 2y\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$
$$= \left[2ax + y\left(2b + \sqrt{A}\right)\right]\left[\left(x\ 2b - \sqrt{A}\right) + 2y\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$

$$\text{ou } 4a\sqrt{A}\,x^2 + 8a\frac{B}{\sqrt{A}}\,xy + 4y^2\left(\frac{2bB}{\sqrt{A}} - \lambda\sqrt{A}\right) = 0.$$

En remplaçant λ par $\mu + c$, et mettant à la place des polynômes A et B leurs valeurs, savoir

$$A = 4b^2 - 6ac + 2a\lambda = 4b^2 - 4ac + 2a\mu,$$
$$B = 2\lambda b - 2ad = 2b\mu + 2bc - 2ad,$$

on trouve définitivement

$$x^2(2ac - 2b^2 - a\mu) + 2xy(ad - bc - b\mu) + y^2(2c^2 - 2bd + c\mu - \mu^2) = 0. \qquad (9)$$

Cette équation donne le couple de points fondamentaux qui répondent à une des racines de la résolvante. Pour achever les calculs de réduction on décomposera cette équation en deux facteurs sous la forme

$$(\xi x + \eta y)(\xi' x + \eta' y) = 0$$

et l'on posera $X = \xi x + \eta y$, $Y = \xi' x + \eta' y$;

d'où $\qquad x = \dfrac{X\eta' - Y\eta}{\xi\eta' - \xi'\eta}, \quad y = \dfrac{-X\xi' + Y\xi}{\xi\eta' - \xi'\eta}.$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans la forme donnée, les termes en X^2Y et en XY^2 disparaîtront d'eux-mêmes, et on aura la forme canonique. *(A suivre.)*

QUESTION 388

Solution par M. Gino-Loria, à Mantoue.

Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données Ox, Oy. *Soit* M *le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse; soit* μ *le centre de ce cercle; 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des axes; 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de* M *est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse sur les deux droites* Ox, Oy; *et le lieu de* μ *est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.* (E. Lemoine.)

En appelant $2a$, $2b$ les axes de l'ellipse, r le rayon de ce cercle osculateur en M, on aura

$$\sqrt{ab} = r$$

ou

$$\sqrt{ab} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Mais de l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Donc l'équation précédente devient

$$\sqrt{ab} = \frac{\left\{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}} = \frac{\left\{a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$

$$a^9b^3 = \left\{a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right\}^3$$

$$a^3b = a^4 - (a^2 - b^2)x^2.$$

D'où on tire $\quad x^2 = \dfrac{a^3(a - b)}{(a + b)(a - b)}$

ou

$$x^2 = \frac{a^3}{a + b} \tag{1}$$

A cette valeur de x correspond

$$y^2 = \frac{b^3}{a + b}, \tag{2}$$

Les équations (1) (2) donnent les coordonnées de M Cherchons celles de μ. En les appelant X et Y nous aurons:

$$X = x - \frac{dy}{dx}\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= x - \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2 - x^2}}{\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}}$$

ou, toute réduction faite,

$$X = x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^4}.$$

De même $$Y = y^2 \frac{a^2 - b^2}{b^4}.$$

Donc en employant les équations (1) (2) on aura les coordonnées de μ données par les équations

$$X = \sqrt{\frac{a}{a+b}}\,(a - b); \qquad (3)$$

$$Y = \sqrt{\frac{b}{a+b}}\,(a - b). \qquad (4)$$

1° On en tire

$$O\mu^2 = X^2 + Y^2 = \frac{a}{a+b}(a - b)^2 + \frac{b}{a+b}(a - b)^2 = (a - b)^2$$

donc

$$O\mu = a - b.$$

2° En faisant l'hypothèse

$$a + b = c, \qquad (5)$$

le lieu de M s'obtient en éliminant a, b entre les équations (1) (2) (5). Or les équations (1) (2) donnent

$$cx^2 = a^3;\ cy^2 = b^3$$

donc $$a = c^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}};\ b = c^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

et l'équation (5) se transforme en conséquence en

$$c^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c$$

ou bien $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

qui représente en effet l'enveloppe de la droite de longueur constante c qui glisse sur les axes.

3° Le lieu de μ peut être trouvé en éliminant a, b entre les équations (3) (4) (5). Or (3) (4) donnent

$$a - b = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{X^2}{Y^2} = \frac{a}{b}. \qquad (7)$$

Des équations (5) et (6) on tire

$$a = \frac{c + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2};\ b = \frac{c - \sqrt{X^2 + Y^2}}{2};$$

donc (7) devient

$$\frac{c+\sqrt{X^2+Y^2}}{c-\sqrt{X^2+Y^2}}=\frac{X^2}{Y^2}$$

ou, en chassant les dénominateurs et les radicaux,

$$(X^2+Y^2)^3=c^2(X^2-Y^2)^2,$$

Changeons les axes en prenant pour nouveaux axes les bissectrices des angles des anciens axes, les formules de transformation sont

$$X=x+y;\quad Y=x-y;$$

donc $X^2+Y^2=2(x^2+y^2);\quad X^2-Y^2=4xy$

et l'équation précédente devient

$$8(x^2+y^2)^3=16\,c^2x^2y^2$$

ou $$(x^2+y^2)^3-2\,c^2x^2y^2=0$$

qui représente en effet une rosace à quatre branches.

QUESTION 15

Solution par M. E. Devin, élève de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Trouver le lieu des points M *tels que, parmi les normales issues de ce point à la parabole* $y^2-2px=0$, *il y en ait deux qui forment avec la droite* $y=x\operatorname{tg}\varphi$ *un triangle isoscèle. Ce lieu est une parabole ; construire cette courbe quand on suppose* $\varphi=\frac{\pi}{8}$ *et montrer que le sommet coïncide avec le foyer de la parabole donnée.* (G. L.)

Soit M un point du lieu, MA et MB les normales issues de ce point M, qui font avec Oz un triangle isoscèle; les tangentes en A et B à la parabole donnée se coupent en un certain point M′, tel que les droites M′A et M′B′ forment avec Oz un triangle isoscèle, et à chaque point tel que M correspond un point tel que M′.

Si donc on détermine le lieu du point M′, on pourra en déduire le lieu du point M.

Pour avoir le lieu du point M′, nous exprimerons que le pied E de la perpendiculaire abaissée de M sur Oz est le

milieu du segment CD déterminé sur Ox par les deux tangentes issues de M'.

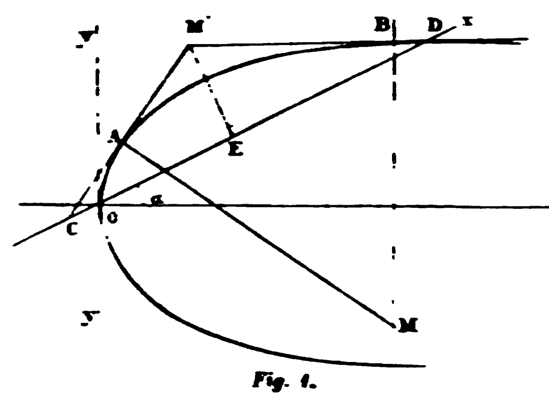


Fig. 1.

Soient α et β les coordonnées du point M';

L'ensemble des deux tangentes M'A et M'B issues de ce point à la parabole donnée est représenté par l'équation

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = [\beta y - p(x + \alpha)]^2.$$

L'équation aux abscisses des points de rencontre C et D de ces tangentes avec Ox est

$$(x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = [\beta x \operatorname{tg} \varphi - px - p\alpha]^2,$$

équation du second degré en x, dont la demi-somme des racines est $\dfrac{\beta^2 - p\alpha - \alpha\beta \operatorname{tg} \varphi}{2\beta \operatorname{tg} \varphi - 2\alpha \operatorname{tg}^2 \varphi - p}$.

La perpendiculaire M'E abaissée de M' sur Ox ayant pour équation $\quad y - \beta = (\alpha - x)\operatorname{cotg} \varphi,$

l'abcisse du point D est donnée par l'équation

$$x(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi) = \alpha \operatorname{cotg} \varphi + \beta,$$

d'où
$$x = \frac{\alpha + \beta \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Exprimant que le point E est le milieu de CD on a:

$$\frac{\beta^2 - p\alpha - \alpha\beta \operatorname{tg} \varphi}{2\beta \operatorname{tg} \varphi - 2\alpha \operatorname{tg}^2 \varphi - p} = \frac{\alpha + \beta \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

ou $\quad (\beta - \alpha \operatorname{tg} \varphi)[\beta - \beta \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\alpha \operatorname{tg} \varphi + p \operatorname{tg} \varphi] = 0.$

On a d'abord la solution singulière

$$\beta = \alpha \operatorname{tg} \varphi,$$

puis
$$\beta - \beta \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\alpha \operatorname{tg} \varphi + p \operatorname{tg} \varphi = 0$$

ou $$\beta = \left(\alpha - \frac{p}{2}\right) \operatorname{tg} 2\varphi \qquad (1)$$
qui est la véritable solution.

Soient maintenant α' et β' les coordonnées du point M dont on cherche le lieu. Elles sont liées aux coordonnées α et β du point M' par les formules
$$\beta' = -\frac{2\alpha\beta}{p} \qquad (2)$$
et $$\alpha' = p - \alpha + \frac{2\beta^2}{p}. \qquad (3)$$

On aura donc l'équation du lieu du point M' en éliminant α et β entre les équations (1) (2) et (3). Transportant dans (2) et (3) la valeur de β tirée de (1), elles deviennent des équations du second degré en α.
$$4\alpha^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi - 2p\alpha\,(1 + 2\operatorname{tg}^2 2\varphi) + p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2p\alpha = 0$$
$$2\alpha^2 \operatorname{tg} 2\varphi - p\alpha \operatorname{tg} 2\varphi + p\beta' = 0$$
L'élimination de α entre ces deux équations donne pour l'équation du lieu, en considérant α' et β' comme des coordonnées courantes :
$$[4py \operatorname{tg}^2 2\varphi - 2 \operatorname{tg} 2\varphi\,(p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2px)]^2$$
$$= [-4p \operatorname{tg}^3 2\varphi + 4p \operatorname{tg} 2\varphi)(1 + 2ty^2 2\varphi)][p \operatorname{tg} 2\varphi\,(p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2px) - 2p^2 y\,(1 + 2\operatorname{tg}^2 2\varphi)]$$
ou, en simplifiant,
$$[2y \operatorname{tg} 2\varphi - (p \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p - 2x)]^2 =$$
$$2 \operatorname{tg} 2\varphi[\operatorname{tg} 2\varphi\,(p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2px) - 2p^2 y\,(1 + 2\operatorname{tg}^2 2\varphi)]$$
équation qui est de la forme
$$P^2 = KQ,$$
P et Q étant des fonctions du premier degré, et K étant une constante. Sous cette forme on reconnait l'équation d'une parabole dont $P = 0$ est un diamètre et $Q = 0$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Examinons le cas où $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Alors $$\operatorname{tg} 2\varphi = 1$$
et l'équation précédente devient
$$(2y + 2x - 3p)^2 + 2p\,(6y + 2x - 3p) = 0.$$
C'est une parabole dont la direction des diamètres est parallèle à la seconde bissectrice des axes.

Les points de rencontre avec l'axe sont donnés par l'équation $(2x - 3p)^2 + 2p\,(2x - 3p) = 0$

ou $$(2x - 3p)\,(2x - p = 0,$$

ce qui donne les deux points

$$x = \frac{3p}{2}$$

et $$x = \frac{p}{2}.$$

La première solution donne un point C, et la tangente en ce point est la droite $6y + 2x - 3p = 0$.

La seconde solution donne le point F, foyer de la parabole proposée.

Cherchons la tangente en ce point.

Ayant transporté les axes au point F par les formules

$$x = X + \frac{p}{2}$$

$$y = Y$$

l'équation devient $(Y + X)^2 + p(Y - X) = 0$, ce qui prouve que la tangente au point F, qui est donnée par l'équation $Y - X = 0$, est perpendiculaire sur la direction des diamètres. C'est donc la tangente au sommet de la parabole trouvée et le point F, foyer de la parabole proposée, est le sommet de la parabole lieu de M.

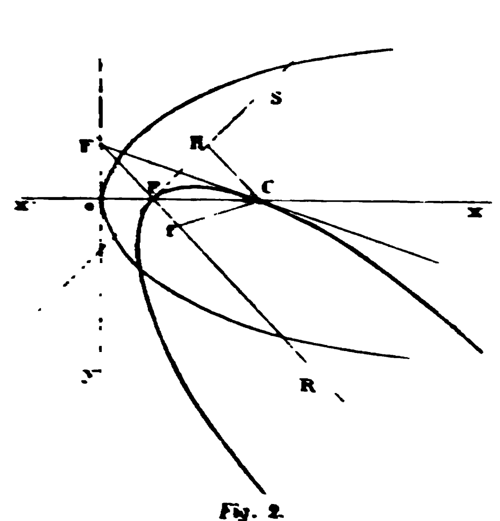


Fig. 2.

Son axe est la parallèle à la seconde bissectrice menée par le point F (*fig. 2*).

Cette parabole peut d'ailleurs être construite comme nous allons l'indiquer. Ayant mené par F des parallèles aux bissectrices des axes, ces droites sont l'une, FR, l'axe, l'autre, FS, la tangente au sommet de la parabole cherchée; F est son sommet. Si l'on prend sur Ox, à partir de O, une longueur OC égale à $\frac{3}{2}$ OF, le point C ainsi obtenu est un point de la parabole; et, si on rabat F en F' sur Oy, CF' est la tangente en C. Du point C on abaisse la perpendiculaire CH sur FS et on fait en C l'angle $F'Cf = HCF$. Le point de rencontre f de Cf avec FR est le foyer de la parabole, qui est ainsi bien déterminée.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Pelouzet, à Bar-le-Duc; riffon, commis du bureau de l'intendance militaire, à Montpellier.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS DE 1882

Mathématiques.

On donne deux cercles se coupant aux points A et B; une conique quelconque passant par ces points, et tangente aux deux cercles, rencontre l'hyperbole équilatère qui a pour sommets en deux autres points C et D :

1. Démontrer que la droite CD passe par l'un des centres de similitude des deux cercles;

2. Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de centres E et F;

3. Soit une conique satisfaisant à la question, ayant son centre sur une des circonférences E ou F : démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent la circonférence en deux points fixes, situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe est vertical et d'un tore dont l'axe est horizontal.

L'axe du cylindre se projette horizontalement en un point o, situé à [illegible] millimètres en avant de la ligne de terre xy ; le rayon du cercle de base est [illegible] millimètres.

Le centre du tore se projette horizontalement en un point o, situé à [illegible] millimètres de la ligne de terre et verticalement en un point o', situé à [illegible] millimètres de la ligne de terre. La ligne de rappel oo' est à droite du point o, à une distance de 24 millimètres.

La projection horizontale de l'axe du tore rencontre la ligne de terre xy en un point situé à 51 millimètres à droite du point de rencontre de xy avec oo'.

Le rayon du cercle générateur du tore est de [illegible] millimètres, et la distance de son centre à l'axe de [illegible] millimètres.

On demande :

De représenter ce qui reste du tore entaillé par le cylindre ; de tracer les parties vues et les parties cachées des contours apparents.

De développer sur la droite de l'épure la portion de surface cylindrique qui limite le corps.

D'indiquer à l'encre rouge ou bleue les constructions nécessaires pour déterminer un point de l'intersection et la tangente en ce point, un point du développement de la courbe d'intersection tracée sur la surface d'un cylindre et la tangente en ce point, un point du contour apparent vertical du tore, et la tangente en ce point.

Les tangentes seront tracées à l'encre rouge ou bleue.

On placera la ligne de terre xy parallèle aux grands côtés de la feuille, à [illegible] millimètres du bord inférieur.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS DE 1882

Mathématiques.

Soit un point fixe donné P, ayant pour coordonnées a et b par rapport à deux axes rectangulaires ox et oy; et soient A et B les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur ces deux axes. On considère les courbes du second ordre tangentes aux deux axes en ces points A et B. Du point P on mène à chacune de ces courbes deux normales variables PM et PM'.

1. Déterminer l'équation de la droite MM' qui joint les pieds des normales variables, et démontrer que cette droite passe par un point fixe.

2. Déterminer l'équation de la courbe C, lieu des points M et M'. Construire la courbe C, dans l'hypothèse $a = 2b$, au moyen de coordonnées polaires ayant le point o pour pôle.

Physique.

1. On a un miroir sphérique formé par un ménisque en verre dont on a étamé ou argenté l'une des faces. Les rayons réfléchis par cette face doivent traverser deux fois la face antérieure qui est nue, d'abord en entrant, puis en sortant. Quel doit être le rapport du rayon de courbure de ces deux surfaces du ménisque pour que ce système fasse l'effet d'un miroir plan? On examinera les différents cas qui peuvent se présenter. On donnera l'expression du rapport cherché dans le cas général, en désignant par n l'indice du verre; on supposera ensuite $n = \frac{3}{2}$.

Comme d'habitude on ne considère que les rayons centraux et on néglige l'épaisseur du verre.

2. Pour déterminer la valeur du kilogramme, on a mesuré exactement le volume d'un cylindre et l'on a cherché la

perte de poids qu'il éprouve quand on le plonge dans l'eau. Soit V le volume du cylindre en décimètres cubes et à zéro, et soit P sa perte de poids dans l'eau, mesurée nécessairement en unités arbitraires, puisque les poids métriques n'étaient pas encore connus. On demande d'établir l'équation exacte de la pesée, et d'en déduire la détermination du kilogramme.

ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE SESSION 1882

Géométrie analytique.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et soient α et β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M et M' des tangentes menées du point P à l'ellipse, et par les points Q et Q' où cette ellipse est rencontrée par la droite $\frac{2x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}+\lambda=0$. — Disposer du paramètre λ et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère, passant par le point P.

On fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x-y=h$ et on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur la droite QQ' ;

2° Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes MM' et QQ'.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit h, et déterminer ces points. — Chercher pour quelles valeurs de h ce lieu se réduit à deux droites, et déterminer ces droites.

Physique et chimie.

1. On a deux baromètres fixes, A et B, formés de deux tubes cylindriques fermés à la partie supérieure par des surfaces planes.

Dans une première expérience, à la température de 0°, la pression étant mesurée dans les deux baromètres par une colonne de mercure H, et la longueur de la chambre barométrique de A étant l, on introduit dans cet espace vide une quantité d'air qui fait baisser le mercure de h dans le tube, le niveau étant supposé constant dans la cuvette.

La température et la pression changent alors; la pression lue au baromètre B est devenue H'; la colonne de mercure de A a une hauteur $H' - h'$. A quelle température a été faite cette deuxième expérience? — On négligera la dilatation des tubes, du mercure et de la règle qui a servi à effectuer les mesures.

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = 0{,}003665$.

Exemple numérique : $H = 76$ cent. $H' = 64$ cent.
$l = 14$ cent. $h' = 4$ cent. 129.
$h = 6$ cent.

2. Indiquer sommairement la préparation de l'acide sulfureux, et donner les formules qui la représentent.

3. Combien faut-il de litres d'air (à 0° 760 millimètres) pour brûler 29.75 de soufre?

Equivalents en poids: $S = 16$; $O = 8$

Poids du litre d'oxygène à 0° et 760^{mm}: 1 gr. 43

ÉPURE

Hyperboloïde à une nappe, entaillé par quatre sphères. — L'hyperboloïde à son axe (z, z') vertical, à $0^m,105$ du plan vertical et au milieu de la feuille; la cote de son centre est $0^m,087$; les rayons de son collier (r, r') et de sa trace horizontale (θ) ont respectivement $0^m,008$ et $0^m,095$ de longueur.

Les sphères, dont les centres sont dans le plan du collier (r, r'), touchent le plan horizontal aux extrémités (a_1, a'_1) (a_2, a'_2) (a_3, a'_3) (a_4, a'_4) des deux diamètres du cercle (θ) respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre.

On demande de construire les projections des intersections de l'hyperboloïde avec les sphères.

Dans la mise à l'encre, on représentera les parties de la surface de l'hyperboloïde qui, placées à l'extérieur des sphères, sont comprises entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal P, à la cote $0^m,171$. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'une des lignes d'intersection et la tangente en ce point.

ENSEIGNEMENT CLASSIQUE

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1882

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse, et un point P situé dans son plan.

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse, tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ces différents cercles passe par le point P;

2° Trouver, pour chaque position du point P, combien de ces cercles osculateurs sont réels;

3° Démontrer que les points de contact de ces cercles osculateurs et de l'ellipse sont sur un même cercle;

4° Trouver l'enveloppe E des cercles C quand le point P décrit l'ellipse donnée;

5° La courbe E peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe, et dont les centres sont sur une conique.

Chercher de combien de manières différentes la courbe E est susceptible de ce mode de génération.

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère O et un cercle fixe C sur cette sphère; et on considère tous les cônes qui passent par le cercle C et qui coupent la sphère suivant un cercle C' de grandeur constante.

1° Trouver le lieu géométrique des sommets de tous ces cônes.

2° Parmi ces cônes, on prend ceux qui ont leur sommet hors de la sphère, et qui sont tels que le cercle de sortie C′ ne rencontre pas le cercle fixe C, et l'on considère sur chacun d'eux les génératrices situées dans le plan principal perpendiculaire au plan du cercle C. Déterminer les angles que font ces génératrices avec le plan du cercle C, sachant que le volume du tronc de cône compris entre les cercles C et C′ est équivalent au volume d'une sphère de rayon connu a.

Étudier les variations de ce volume quand le sommet du cône se déplace dans l'espace.

Pourrait-on, en modifiant convenablement l'énoncé, appliquer les formules trouvées au cas où le sommet du cône est à l'intérieur de la sphère, la condition relative aux cercles C et C′ restant la même ?

Composition de licence.

Connaissant le mouvement relatif d'un point par rapport à un système de comparaison, ainsi que le mouvement absolu de ce système, déterminer l'accélération absolue du point.

Application. — Un trièdre trirectangle $Oxyz$ tourne, avec une vitesse constante ω, autour de l'une de ses arêtes Oz, qui est verticale. Un plan P, passant par l'arête Oy et faisant avec le plan xOy un angle constant dont la tangente est $\sqrt{\frac{3}{2}}$, est entraîné avec le trièdre.

Déterminer, par rapport au trièdre, le mouvement de deux points matériels pesants A et B, assujettis à se mouvoir le premier sur Ox, le second dans le plan P. Ces deux points ont chacun une masse égale à l'unité, et ils exercent l'un sur l'autre une attraction égale au produit de leur distance par $2\omega^2$.

Quelles doivent être les circonstances initiales pour que la trajectoire relative du point B soit une parabole ? On négligera l'influence des résistances passives, et l'on ne tiendra pas compte de la rotation de la terre.

QUESTIONS PROPOSÉES

30. — On considère l'équation du quatrième degré

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de cette équation.

1. On propose de démontrer que l'on pose

$$z = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)},$$

l'équation transformée est

$$Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0,$$

en posant

$$P = BCD - B^2E - D^2A,$$
$$Q = 2BCD + 4ACE - 3B^2E - 3D^2A - C^3,$$
$$R = BCD + 8ACE - 3B^2E - 3D^2A,$$
$$S = 4ACE - B^2E - D^2A.$$

2. Expliquer le résultat qu'on obtient quand on suppose $C = 0$.

3. Démontrer que si l'on considère le réseau quartique

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = 0,$$

ces quatre droites forment un faisceau harmonique si l'on a

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A.$$

(*G. L.*)

31. — On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy : sur Ox, deux points fixes, P, Q ; par ces points P, Q, on fait passer une infinité de cercles C, et l'on imagine les hyperboles H qui ont pour asymptotes Ox, Oy et sont tangentes à C. Trouver le lieu des points de contact des courbes H et C.

(*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 18840-2.

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler**.

(*Suite et fin*, voir pages 149 et 197.)

Puisque les quatre points représentés par $f = 0$ donnent lieu à trois involutions, il y a trois manières d'opérer la réduction à la forme canonique.

Supposons d'abord les quatre points A, B, C, D réels et rangés de gauche à droite dans l'ordre alphabétique; les deux involutions (AB) (CD) et (AD) (BC) auront leurs foyers réels, l'involution (AC) (BD) dont les segments empiètent l'un sur l'autre aura ses foyers imaginaires. Donc il y aura deux transformations réelles et une imaginaire.

Si les quatre points sont imaginaires, il y aura évidemment une seule transformation réelle, celle qui répond à l'involution déterminée par les deux couples de points conjugués.

Même observation si deux des points sont réels et les deux autres imaginaires ; l'involution déterminée par le couple réel et le couple imaginaire aura seule ses foyers réels.

Il est facile de voir ce qui arrive quand il y a une ou deux racines doubles; nous n'insisterons pas sur ses cas particuliers.

Remarquons seulement que, dans le cas de la racine triple, la réduction à la forme bicarrée n'est plus possible. Mais alors en appelant X le facteur triple, Y le facteur simple et en prenant pour nouveaux points fondamentaux les deux points déterminés par les équations $X = 0$, $Y = 0$, la forme devient simplement X^3Y.

Revenons maintenant à l'équation (9) qui donne les nouveaux points fondamentaux; en éliminant μ entre cette

équation et la résolvante $u^3 - Iu = 2J = 0$, on aura évidemment une équation du sixième degré en x et en y qui donnera à la fois les couples de points doubles des trois involutions. Nous allons voir que la forme du sixième degré ainsi obtenue n'est autre chose que le covariant T dont il a été question plus haut.

Si l'on cherche le hessien de la forme réduite, comme les secondes dérivées ne renferment que des termes en x^2 et y^2, on voit que ce hessien se présentera aussi sous la forme canonique carrée. Donc les nouveaux points fondamentaux O et O' jouissent par rapport aux quatre points A', B', C', D' donnés par $H = 0$ des mêmes propriétés que par rapport aux points $f = 0$: ils sont aussi conjugués harmoniques par rapport à deux des couples que l'on peut former avec ces points A', B', C', D'.

Mais on a $$\frac{2}{OO'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD}$$

et par suite $$\frac{4}{OO'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD}.$$

De même $$\frac{4}{OO'} = \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} + \frac{1}{OC'} + \frac{1}{OD'}.$$

En d'autres termes O est le centre des moyennes harmoniques de O' par rapport aux points $f = 0$ et aux points $H = 0$.

Il en résulte que O est un point commun aux premiers groupes polaires de O', par rapport aux points $f = 0$ et $H = 0$ et réciproquement O' est un point commun aux premiers groupes polaires de O. Donc enfin les six points dont il a été question tout à l'heure ne sont autre chose que les points donnés par l'équation $T = 0$. On voit en même temps que les covariants T et Θ sont identiques.

— Nous avons rattaché la réduction à la forme canonique à la méthode de Ferrari; ce n'est pas ainsi que l'on procède habituellement; mais, comme on va le voir, les calculs sont à peu près les mêmes. Soient A, C, E les coefficients de la forme réduite; on peut supposer que la substitution

$$x = \alpha X + \beta Y, \; y = \alpha' X + \beta' Y,$$

qui donne la forme canonique, ait un déterminant égal à l'unité ; alors les invariants I et J se reproduisent identiquement et l'on a

$$ACE - C^3 = J, \qquad AE + 3C^2 = I,$$

I et J ayant des valeurs connues.

Ces relations donnent par l'élimination du produit AE l'équation $$4C^3 - IC + J = 0. \qquad (10)$$

Maintenant le hessien de la transformée étant

$$H = ACX^4 + X^2Y^2(AE - 3C^2) + CEY^4,$$

on constate que CF — H ou, ce qui est la même chose, $Cf(x, y) - H(x, y)$ donne le carré du produit des nouvelles variables X et Y, savoir $X^2Y^2(9C^2 - AE)$.

D'après cela, après avoir trouvé une des racines C de l'équation (10), on forme la différence $Cf(x, y) - H(x, y)$, et on trouve le carré d'un polynôme du second degré dont les facteurs linéaires en x et y sont précisément X et Y.

Mais on voit que l'équation $4C^3 - CI + J = 0$ n'est autre chose que la résolvante $\mu^3 - \mu I + 2J = 0$, dans laquelle on a remplacé μ par 2C. Les deux méthodes rentrent donc au fond l'une dans l'autre; la seule différence est dans le procédé employé pour calculer les facteurs X et Y.

VII. — Relations entre la forme du quatrième degré et ses covariants.

Prenons la forme réduite

$$f = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4.$$

Les invariants I et J sont

$$I = ae + 3c^2, \qquad J = ace - c^3.$$

On a ensuite

$$H = f'_{x^2}f'_{y^2} - \left(f'_{xy}\right)^2 = acx^4 + (ae - 3c^2)x^2y^2 + cey^4$$

$$T = f'_x H'_y - f'_y H'_x = 8(ae - 9c^2)xy(ax^4 - ey^4)$$

ou simplement $\qquad T = xy(ax^4 - ey^4).$

L'élimination de x et y entre les équations

$$xf'_{x^2} + y'f'_{xy} = 0 \quad \text{et} \quad x'f'_{xy} + y'f'_{y^2} = 0$$

donne

$$P = 4ac^2x^4 - x^2y^2(6ac^2e + 3c^4 - e^2) + 4c^2ey^4.$$

Enfin l'élimination de x et y entre

$$x'f'_x + y'f'_y = 0 \quad \text{et} \quad x'H'_x + y'H'_y = 0$$

donne
$$\Theta = T,$$
ce qui devait être d'après le paragraphe précédent.

L'inspection des formules précédentes montre d'abord que, si $C = 0$, c'est-à-dire si la forme donnée peut se réduire à la somme de deux quatrièmes puissances, l'invariant J est nul. Réciproquement, lorsque $J = 0$, l'équation (10)
$$4C^3 - CI + J = 0$$
a une racine nulle.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme du quatrième degré soit réductible à la forme
$$ax^4 + ey^4,$$
c'est que les quatre points qu'elle représente soient en situation harmonique, condition exprimée algébriquement par
$$J = 0.$$

Les formes f et H déterminent sur la droite représentative une involution du quatrième ordre, et on peut reconnaître que les quatre points $P = 0$ constituent un des groupes de cette involution, c'est-à-dire que P peut se mettre sous la forme
$$\lambda f + \mu H.$$

C'est ce que montre l'inspection des premiers et des derniers coefficients de f, H et P; si l'on a
$$4ac^3 = \lambda a + \mu . ac,$$
on a aussi
$$4ec^3 = \lambda e + \mu ce.$$

Donc on peut déterminer λ et μ par les équations d'identification
$$\lambda + \mu c = 4c^3,$$
$$6\lambda c + \mu(ae - 3c^2) = a^2e^2 - 3c^4 - 6ac^2e$$
qui donnent
$$\mu = ae + 3c^2 = I,$$
$$\lambda = c - ace = - J.$$

On a donc
$$P = IH - Jf.$$

Cette relation, dont la démonstration serait bien difficile en opérant sur la forme non réduite, subsiste lorsqu'on fait une transformation linéaire; comme H est alors multiplié par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2$, carré du déterminant de la substitution, I par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^4$ et J par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^6$, on voit que P est multiplié par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^6$.

Lorsque l'équation $f = 0$ a une racine double, il en est de même pour $H = 0$. Effectivement le discriminant $I^3 - 27J^2$

devient pour la forme canonique $ae(9c^2 - ae)^2$. Il peut être nul de trois manières. Si a ou c sont nuls, H contient y^2 ou x^2 en facteur, le facteur double de f se retrouve dans H. Si $9c^2 - ae = 0$, f et H prennent la même forme; on a

$f = \frac{1}{a}(ax^2 + 3cy^2)^2$, $H = \frac{c}{a}(ax^2 + 3cy^2)^2$. C'est le cas des deux racines doubles. On peut donc dire que les conditions pour que $f = 0$ ait deux racines doubles, sont que les coefficients de f et de H soient proportionnels. Cela étant vrai aussi pour la forme générale dont le hessien est

$$H = x^4(ac - b^2) + 2x^3y(ad - bc) + x^2y^2(ae + 2bd - 3c^2) + 2xy^3(be - cd) + y^4(ce - d^2),$$

les conditions s'écriront

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{bc} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e};$$

elles se réduisent à deux, comme on peut le vérifier.

Quand f admet un facteur triple, la forme canonique est x^3y, comme nous l'avons vu, et le hessien devient x^4; il est la quatrième puissance du facteur triple.

Enfin quand f est une quatrième puissance parfaite, on a à la fois soit $a = 0$, $e = 0$, soit $c = 0$, $e = 0$. Les coefficients du hessien s'évanouissent identiquement, et par suite les conditions pour que $f = 0$ ait une racine quadruple peuvent s'écrire, dans le cas général

$$ac - b^2 = ad - bc = ae + 2bd - 3c^2 = be - cd = ce - d^2 = 0;$$

ces conditions se réduisent à trois.

Nous avons trouvé pour le covariant T l'expression

$$xy(ax^4 - ey^4) \text{ ou } xy(x^2\sqrt{a} - y^2\sqrt{e})(x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{e}).$$

Les six points représentés par $T = 0$ se partagent donc en trois couples; le premier $xy = 0$ se compose des deux points fondamentaux qui se rapportent à la forme canonique Ce sont les points doubles de l'involution déterminée par les points racines des trinômes $ax^2 + y^2(3c + \sqrt{9c^2 - ae})$

et $ax^2 + y^2\left(3c - \sqrt{9c^2 - ae}\right)$, en lesquels se décompose la forme $ax^4 + bcx^2y^2 + ey^4$.

On vérifie sans peine que les points $x^2\sqrt{a} - y^2\sqrt{\ } = o$ et $x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{e} = o$ sont les points doubles des deux autres involutions que l'on peut former avec les points $f = o$.

C'est une vérification de ce que nous avons démontré plus haut par des considérations géométriques.

NOTE

PRINCIPE DE CORRESPONDANCE PAR M. CHASLES (*)

Lemme I — *Lorsqu'on a sur une droite* L *deux séries de points* X *et* u, *tels qu'à un point* X *correspondent* α *points* u, *et à un point* u, β *points* X, *le nombre des points* X *qui coïncident avec des points correspondants* u *est* $(\alpha + \beta)$.

En effet, en représentant par x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L, on a entre ces distances une relation telle que

$$x^\beta\,(\mathrm{A}u^\alpha + \mathrm{B}u^{\alpha-1} - \ldots) + x^{\beta-1}\,(\mathrm{A'}u^\alpha + \mathrm{B'}u^{\alpha-1} - \ldots) + \ldots = o$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u sont déterminés par l'équation

$$\mathrm{A}x^{\alpha+\beta} + (\mathrm{B} + \mathrm{A'})\,x^{\alpha+\beta-1} + \ldots = o.$$

Il suffit donc de prouver que le coefficient A du premier terme de cette équation n'est pas nul.

Or si le point u est supposé à l'infini, l'équation entre x et u devient

$$x^\beta\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{a} + \ldots\right) + x^{\beta-1}\left(\mathrm{A'} + \frac{\mathrm{B'}}{u} + \ldots\right) + \ldots = o$$

ou
$$\mathrm{A}x^\beta + \mathrm{A'}x^{\beta-1} + \ldots = o.$$

(*) Nous publierons dans notre prochain numéro une reproduction d'un mémoire de M. Chasles, mémoire relatif au nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque. Ce mémoire repose sur le principe de correspondance que, pour ce motif, nous avons reproduit ici. G. L.

Il doit toujours y avoir β points x correspondants à u, et par conséquent le terme Ax^{β} existe nécessairement dans cette équation.

Donc...

Mais il est possible que les $(\alpha + \beta)$ points ne satisfassent pas tous au sens précis de la question, c'est-à-dire qu'il s'y trouve ce qu'on appellerait en analyse des *solutions étrangères*. Il peut s'y trouver aussi des solutions appartenant aux coniques exceptionnelles, et qu'on doit écarter. L'examen à ce sujet ou la vérification est toujours facile dans chaque question.

Lemme II. — *Lorsque deux séries de droites* X *et* U *passent par un même point, si à une droite* X *correspondent* α *droites* U, *et à une droite* U, β *droites* X, *il existera* $(\alpha + \beta)$ *droites* X *qui coïncideront avec des droites correspondantes* U.

Ce lemme est une conséquence immédiate du précédent, car on peut supposer que les droites X et U soient déterminées par deux séries de points x et u situés sur une même droite L.

QUESTION D'EXAMEN

FOYERS DES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME UNICURSALES

1. — *L'équation d'une conique étant définie par les formules*

$$x = \frac{t}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{t^2}{1 - t^2},$$

déterminer les foyers de cette courbe.

On peut résoudre cette question par une première méthode que nous ne ferons qu'indiquer.

Imaginons les formules

$$x = \frac{a + bt + ct^2}{\alpha + \beta t + \gamma t^2}, \qquad y = \frac{a' + b't + c't^2}{\alpha + \beta t + \gamma t^2}.$$

On sait que si t varie, le point (x, y) décrit une conique U; soient x', y' les coordonnées d'un foyer F de cette courbe, La définition même du foyer exige que la fonction V;

$$V = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

soit un carré parfait. Or on peut écrire V de la manière suivante :

$$V(\alpha + \beta t + \gamma t^2)^2 = [(a - \alpha x') + (b - \beta x')t + (c - \gamma x')t^2]^2$$
$$+ [(a' - \alpha y') + (b' - \beta y')t + (c' - \gamma y')t^2]^2.$$

V sera un carré parfait si le second membre de cette égalité, qui est un polynôme du quatrième degré en t de la forme

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E,$$

est lui-même un carré parfait. En exprimant cette condition on trouve entre les coefficients deux relations qui déterminent x' et y'. La résolution de ces équations conduit en général à des équations du quatrième degré, et l'on sait en effet que la *recherche des foyers est un problème du quatrième degré*. Mais ce problème est *quadratique*, c'est-à-dire qu'il peut se résoudre par des équations du second degré seulement. On devra donc, puisque la chose est possible, décomposer les premiers membres des équations trouvées en facteurs du second degré.

Mais la méthode que nous allons indiquer maintenant donne lieu, généralement, à des calculs plus simples.

2. — Nous raisonnerons sur l'exemple particulier que nous nous sommes donné ; mais il va sans dire que le raisonnement que nous allons faire s'applique aux formules les plus générales de cette question.

Cherchons d'abord l'équation générale des tangentes à la conique C : soit
$$y = mx + n$$
une pareille droite, l'équation
$$t^2 = mt + n(1 - t^2)$$
ou
$$t^2(1 + n) - mt - n = 0$$
doit avoir ses racines égales ; on a donc
$$m^2 + 4n(n + 1) = 0$$
ou
$$(2n + 1)^2 = 1 - m^2.$$

L'équation cherchée est donc

$$y = mx - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2}. \qquad (1)$$

3. — Ceci posé, par un point $x'y'$ du plan cherchons à mener une tangente à la conique C. Le coefficient angulaire de cette droite est une des racines de l'équation

$$\left(y' - mx' + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - m^2}{4}$$

ou

$$m^2\left(\frac{1}{4} + x'^2\right) - 2mx'\left(y' + \frac{1}{2}\right) + \left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

On sait d'ailleurs que les coefficients angulaires des tangentes issues du foyer sont $+i$ et $-i$; en d'autres termes l'équation précédente doit se réduire à

$$m^2 + 1 = 0,$$

si l'on suppose que x', y' désignent les coordonnées du foyer cherché. Il faut donc d'abord que le coefficient de m soit nul, ce qui peut arriver en supposant, soit $y' + \frac{1}{2} = 0$, soit $x' = 0$.

L'équation est alors

$$m^2\left(\frac{1}{4} + x'^2\right) + \left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

La première hypothèse donne

$$m^2(1 + 4x'^2) - 1 = 0$$

et comme $$m^2 = -1$$

$$2x'^2 + 1 = 0.$$

On a donc les deux foyers imaginaires F_1, F_2,

$$F_1\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{-2}}{2} \\ y_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad F_2\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\sqrt{-2}}{2} \\ y_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

L'autre hypothèse donne

$$\frac{m^2}{4} + \left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ou $$\left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

et l'on a ainsi les deux foyers réels F_3, F_4,

$$F_3\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = -\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad F_4\begin{cases} x_4 = 0 \\ y_4 = -\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

4. — Nous voulons maintenant revenir sur la première méthode indiquée dans cette note pour faire une remarque

qui a pour but de rendre cette méthode très rapide et très pratique, quand on la dirige comme nous allons l'indiquer.

Il faut observer que la fonction V qui, comme nous l'avons fait remarquer, est une fonction du quatrième degré en t, se présente sous la forme remarquable d'une somme de deux carrés; abstraction faite, bien entendu, de son dénominateur qui est un carré parfait. Or il est facile de trouver les conditions pour que *la somme des carrés de deux trinômes du second degré soit un carré parfait.*

Supposons que l'on ait identiquement

$(px^2+qx+r)^2+(p'x^2+q'x+r')^2=(Px^2+Qx+R)^2$ (A),

et considérons l'équation

$$(p+p'i)x^2+(q+q'i)x+r+r'i=0\,; \qquad (B)$$

elle admet deux racines de la forme $\alpha+\beta i$, pour l'une, $\alpha'+\beta' i$ pour l'autre.

L'équation (A) étant une *identité*, ses deux membres prennent la même valeur, réelle ou imaginaire, quand on donne à x une valeur quelconque, réelle ou imaginaire. Il en résulte que $$P(\alpha+\beta i)^2+Q(\alpha+\beta i)+R=0$$
et comme P, Q, R sont des quantités supposées réelles, on aura

$$\left.\begin{aligned} 2P\alpha\beta+Q\beta&=0\\ P(\alpha^2-\beta^2)+Q\alpha+R&=0 \end{aligned}\right\}\ (C$$

β n'est pas nul, car si β et β' étaient nuls à la fois, l'équation B admettrait deux racines réelles α, α'; et on pourrait en conclure que les deux équations

$$px^2+qx+r=0,$$
$$p'x^2+q'x+r'=0,$$

auraient les mêmes racines. Dans cette hypothèse on sait que $\frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}=\frac{r}{r'}$, et le premier membre de l'égalité A est visiblement un carré parfait.

Ainsi β et β' ne sont pas nuls simultanément et nous pouvons supposer β différent de zéro. Les relations (C) deviennent

$$2P\alpha+Q=0,$$
$$P\alpha^2+Q\alpha+R=P\beta^2.$$

D'ailleurs P n'est pas nul. On a, en effet,

$$P^2=p^2+p'^2$$

et l'on ne peut avoir $P = o$ si l'on n'a pas, simultanément, $p = o$ et $p' = o$; mais alors la fonction proposée ne serait plus que du second degré en x, et l'on retomberait ainsi dans un problème connu.

On a donc $$\alpha = -\frac{Q}{2P}$$

et par suite $$4\,P^2\beta^2 = 4PR - Q^2.$$

On trouve de même

$$\alpha' = -\frac{Q}{2P} \text{ et } 4\,P^2\beta'^2 = 4PR - Q^2,$$

par suite $$\beta^2 - \beta'^2 = o.$$

Si l'on suppose $\beta = \beta'$ les deux racines de (B) sont $\alpha + \beta$ et $\alpha + \beta i$. D'ailleurs l'équation

$$(p - p'i)\,x^2 - (q - q'i)\,x + r - r'i = o \qquad (B')$$

aura pour racines celles de (B) quand on y change i en $-i$, et les racines du premier membre de l'égalité A sont $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$. Quant à l'hypothèse $\beta = -\beta'$, elle conduit à la même conclusion. En effet, les deux racines de (B) sont alors $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ et celles de (B') s'obtenant par le changement de i en $-i$, comme nous venons de le faire remarquer, seront donc $\alpha - \beta i$ et $\alpha + \beta i$.

La somme des racines de l'équation (B) ou (B') est donc réelle ; le rapport $\frac{q + q'i}{p + p'i}$ n'est réel que si l'on suppose $\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}$; de plus le produit $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$ est aussi réel et l'on trouve de même $\frac{r}{p} = \frac{r'}{p'}$; on a donc $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$. C'est le cas particulier, évident *à priori*, déjà signalé plus haut.

Mais alors dans le cas général il faut donc que l'équation (B) n'admette que la racine $(\alpha + \beta i)$; et (B') la seule racine $(\alpha - \beta i)$. En d'autres termes, (B) et (B') doivent être des carrés parfaits.

De cette remarque on déduit

$$(q + q'i)^2 = 4\,(p + p'i)(r + r'i)\,;$$

et de celle-ci on déduit les deux conditions

$$q^2 - 4pr = q'^2 - 4p'r' \qquad (C)$$

et
$$qq' = 2(pr' + rp'). \qquad (D)$$

Ces formules résolvent le problème proposé dans le cas le plus général qu'il comporte.

5. — Appliquons-les au problème numérique et particulier que nous avons résolu tout à l'heure. Le polynôme en t, qui doit être un carré parfait, est ici

$$[t^2x' + t - x']^2 + [(y' + 1)t^2 - y']^2.$$

Les formules (C) et (D), que nous venons d'établir, donnent ici

$$1 + 4x'^2 = 4y'(y' + 1)$$
$$x'(y' + 1) + x'y' = 0.$$

Cette dernière se décompose en deux :

$$x' = 0 \text{ et } 2y' + 1 = 0.$$

En prenant successivement l'une et l'autre de ces deux équations, on trouve bien les quatre foyers, deux réels, deux imaginaires, obtenus précédemment.

QUESTION 13

Solution par M. E. Devin, élève de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Étant donnés deux points A *et* B *d'une parabole inconnue et la droite* Δ, *axe de cette courbe, on abaisse sur* Δ *les perpendiculaires* AA′, BB′ ; *puis on trace les droites* AB′, BA′ *qui se coupent en un certain point* C. *Démontrer que si par le point* C *on mène une parallèle à l'axe* Δ, *cette droite rencontre* AB *en un point qui appartient à la tangente au sommet, ce qui permet de déterminer simplement ce sommet.* (G. L.)

Nous prenons pour axes de coordonnées l'axe de la parabole et sa tangente au sommet.

Soient x' et y' les coordonnées du point A, x'' et y'' les coordonnées du point B; l'équation de AB est

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Elle rencontre l'axe Oy en un point I tel que

$$OI = y' - x' \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

ou $$OI = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}. \qquad (1)$$

D'ailleurs les points A et B étant sur la parabole on a :

$$y'^2 = 2px' \qquad \text{et} \qquad y''^2 = 2px''.$$

Remplaçant dans (1) x' et x'' par leur valeur tirée de ces équations, on a $$OI = \frac{y'y''}{y' + y''}.$$

L'équation de AB' est

$$y(x' - x'') = y'x - y'x''.$$

Celle de BA' est

$$y(x' - x'') = - y''x + x'y''.$$

La parallèle à Ox menée par le point C, commun aux deux droites AB' et BA', s'obtient en ajoutant membre à membre ces deux équations, après avoir multiplié la première par y'' et la seconde par y', ce qui donne

$$y(y' + y'')(x' - x'') = (x' - x'')y'y'' ;$$

d'où $$y = \frac{y'y''}{y' + y''} = OI.$$

Donc la droite AB et la parallèle à Δ menée par le point C rencontrent bien la tangente au sommet de la parabole inconnue, au même point I.

Cette remarque permet de déterminer le sommet et la tangente en ce point d'une parabole, quand on connaît deux points et l'axe de cette courbe.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Vazou, au collège Rollin; Griffon, à Montpellier; Chevasson et Dupuis, à Lons-le-Saulnier; Ossilon, à Versailles.

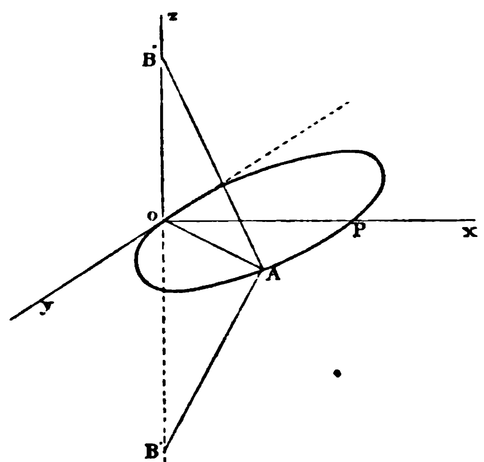
QUESTION 19

Solution par M. DEVIN, élève au lycée Charlemagne.

On donne un cercle C *et une droite* D, *qui rencontre le cercle en* O *et est perpendiculaire à son plan. Soit* A *un point du cercle et soient sur la droite* D *deux points* B *et* B' *dont la distance au*

point O est égale à la distance de ce point O au point A. On mène les droites AB, AB'.

Trouver le lieu de ces droites. C'est une surface du quatrième degré. Étudier les sections faites par des plans parallèles au plan des **xy**.



1. — Nous prendrons pour axe des z la droite D, pour axe des x le diamètre OP du cercle donné et pour axe des y la tangente à l'extrémité O de ce diamètre.

Dans ce système les équations du cercle donné sont

$$\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

en désignant par R le rayon de ce cercle.

Soient x', y', o les coordonnées du point A, qui est variable sur le cercle (1), et λ la longueur OA:

on a $$\text{OA} = \text{OB} = \text{OB}' = \lambda.$$

Les équations de la droite AB sont

$$\frac{x - x'}{x'} = \frac{y - y'}{y'} = \frac{z}{-d}$$

celles de AB' sont (2)

$$\frac{x - x'}{x'} = \frac{y - y'}{y'} = \frac{z}{d}$$

D'ailleurs le point A étant sur le cercle (1), on a les relations

$$x'^2 + y'^2 = \lambda^2 \qquad (3)$$

et $$\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x'^2 + y'^2 - 2Rx' = 0. \end{array}\right. \qquad (4)$$

L'équation du lieu décrit par les droites AB, AB' s'obtiendra

en éliminant x', y', λ entre les secondes des équations (2) par exemple, et les conditions (3) et (4).

Comme d'ailleurs les équations (2) ne diffèrent que par le signe de λ, et que dans l'élimination on doit élever d au carré, il est indifférent de prendre les premières ou les secondes des équations (2).

On en déduit $\quad \lambda(x - x') = zx'$; (5)

de (3) et (4) on tire $\quad \lambda^2 = 2Rx'$,

d'où
$$x' = \frac{\lambda^2}{2R}.$$

Remplaçant dans (5) on a:
$$d\left[x - \frac{\lambda^2}{2R}\right] = z\,\frac{\lambda^2}{2R},$$
ou, en vertu de (4),
$$\left[x - \frac{x'^2 + y'^2}{2R}\right]^2 = z^2\,\frac{x'^2 + y'^2}{4R^2},$$
et comme la condition
$$x'^2 + y'^2 - 2Rx' = 0$$
exige $\quad z = 0$,

on a $\quad x = x'$

et $\quad y = y'$,

parsuite pour le lieu des droites AB et AB′
$$[x^2 + y^2 - 2Rx]^2 = z^2(x^2 + y^2),$$
ou en désignant par d le diamètre du cercle, on a enfin
$$[x^2 + y^2 - dx]^2 = z^2(x^2 + y^2).$$

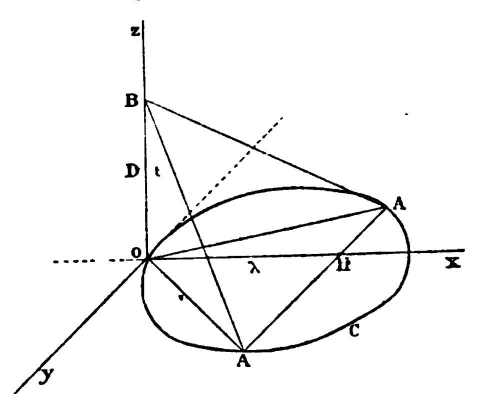
2. — Nous nous proposons maintenant d'étudier la section de la surface par des plans parallèles au plan des xy; pour cela il faut couper par $\quad z = h$
et faire varier h.

Faisant $z = h$ dans l'équation de la surface on a
$$[x^2 + y^2 - dx]^2 = h^2(x^2 + y^2),$$
et sous cette forme on reconnaît l'équation générale des conchoïdes du cercle ou limaçon de Pascal.

3. — Les deux génératrices qui partent d'un point B quelconque de D, sont telles que l'on a
$$BA = BA' = BO.$$
Par suite $\quad OA = OA'$

et la trace du plan de ces deux génératrices sera parallèle à OY, car, OA et OA′ étant des cordes égales du cercle C et issues du même point O, AA′ est parallèle à la tangente OY.

Soit H le point de rencontre de AA′ avec OX; posant



$$OH = \lambda, \quad OB = \mu,$$

l'équation du plan de ces deux droites est

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{z}{u} = 1$$

mais λ et μ sont liés par une relation de condition, car on doit avoir

$$OA = OA' = \mu.$$

Par suite dans le triangle rectangle OHA, on a en désignant par x' et y' les coordonnées du point A situé sur les cercles

$$\lambda^2 + y'^2 = \mu^2$$

et aussi

$$\lambda^2 + y'^2 = 2R\lambda$$

ou

$$\lambda^2 + y'^2 = d\lambda;$$

d'où je déduis

$$\mu^2 = d\lambda.$$

L'équation du plan considéré en fonction d'un seul paramètre variable sera donc

$$\frac{dx}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda} = 1. \qquad (\alpha)$$

Cherchons l'intersection de ce plan avec la surface trouvée

$$(x^2 + y^2 - dx)^2 = z^2 (x^2 + y^2). \qquad (\beta)$$

Si nous éliminons z entre ces deux équations (α) et (β), nous aurons la projection de cette intersection sur le plan des xy.

Faisons cette élimination.

On a en tirant z de (α)

$$z = \lambda - \frac{dx}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - dx}{\lambda}.$$

Remplaçant dans β on a

$$\lambda^2(x^2 + y^2 - dx)^2 = (\lambda^2 - dx)^2(x^2 + y^2)$$

ou en simplifiant

$$\lambda^2(x^2 + y^2)[x^2 + y^2 - \lambda^2] + d^2x^2[\lambda^2 - (x^2 + y^2)] = 0$$

ou $$[\lambda^2(x^2 + y^2) - d^2x^2][x^2 + y^2 - \lambda^2] = 0.$$

La première solution

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0$$

représente les projections OA et OA' de deux droites AB et A'B qui appartiennent en effet au plan et à la surface.

La seconde solution $x^2 + y^2 = \lambda^2$ (γ)

est la projection de la conique d'intersection du plan et de la surface. Cette équation représente un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est égal à λ.

On peut donc considérer ces coniques, mobiles dans l'espace, comme étant les sections faites par le plan mobile (α) dans le cylindre droit représenté par l'équation (γ).

Si donc nous inscrivons dans ce cylindre une sphère tangente au plan (α), le foyer de la conique sera le point de contact de cette sphère et du plan (α). C'est ce point dont nous allons chercher le lieu géométrique. Pour cela l'équation d'une sphère inscrite dans le cylindre (α) est

$$x^2 + y^2 + (z - \mu)^2 = \lambda^2, \qquad (\delta)$$

μ étant la distance de son centre à l'origine (son centre est sur oz).

Mais cette sphère est assujettie à être tangente au plan (α).

Soient donc (x', y', z') les coordonnées du point de contact, dont nous cherchons le lieu; le plan tangent en ce point à la sphère δ est

$$xx' + yy' + z(z' - \mu) + \mu^2 - \lambda^2 - \mu z' = 0 \qquad (1)$$

et ce plan doit se confondre avec le plan (α) dont l'équation est

$$\frac{dx}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda} = 1$$

ou $$x + \frac{\lambda}{d} z - \frac{\lambda^2}{d} = 0. \qquad (2)$$

Identifions ces deux équations.

Pour cela, ayant écrit la première

$$x + y\frac{y'}{x'} + \frac{z(z' - \mu)}{x'} + \frac{\mu^2 - \mu z' - \lambda^2}{x'} = 0,$$

on a pour l'identification

$$y' = 0$$

$$\frac{z' - \mu}{x'} = \frac{\lambda}{d}$$

et $$\frac{\mu z' + \lambda^2 - \mu^2}{x'} = \frac{\lambda^2}{d}.$$

La première de ces relations prouve d'abord que tous les points du lieu sont dans le plan des zx.

On aura donc l'équation du lieu en éliminant les paramètres λ et μ entre les équations

$$\frac{z - \mu}{x} = \frac{\lambda}{d} \quad (3)$$

$$\frac{\mu(z - \mu) + \lambda^2}{x} = \frac{\lambda^2}{d} \quad (4)$$

et l'équation du plan $$\frac{dx}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda} = 1. \quad (5)$$

De (3) et (4) on déduit $\mu x + \lambda d = \lambda x$

$$\mu = \frac{\lambda(x - d)}{x}.$$

Remplaçant dans (4) on a

$$\frac{z - \frac{\lambda(x - d)}{x}}{x} = \frac{\lambda}{d}$$

ou $$\frac{zx - \lambda(x - d)}{x^2} = \frac{\lambda}{d}$$

ou $$dzx = \lambda(x^2 + dx - d^2).$$

Remplaçant λ par cette valeur dans l'équation (5) on a pour le lieu

$$\frac{dx}{\frac{d^2z^2x^2}{(x^2 + dx - d^2)^2}} + \frac{z}{\frac{dzx}{x^2 + dx - d^2}} = 1$$

ou $$(x^2 + dx - d^2)^2 + z^2(x^2 + dx - d^2) = dxz^2$$

ou $$(x^2 + dx - d^2)^2 = d^2z^2 - z^2x^2$$

ou enfin $$z^2 = \frac{(x^2 + dx - d^2)^2}{d^2 - x^2}.$$

4. — C'est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à l'axe des x. Si l'on écrit son équation sous la

forme
$$z^2 = \frac{(x^2 + dx - d^2)^2}{(d - x)(d + x)}$$
on voit que les droites $x = d$ et $x = -d$ sont des asymptotes de la courbe ; d'ailleurs elle n'a pas d'autres asymptotes.

Ces droites séparent aussi le plan en régions ; comme on doit avoir
$$(d - x)(d + x) < 0,$$
la courbe est donc comprise tout entière entre ces deux droites.

Si l'on cherche les points de rencontre de la courbe avec l'axe des z, on trouve les deux points
$$z = d \quad \text{et} \quad z = -d.$$

L'intersection avec ox est donnée par l'équation
$$[x^2 + 2Rx - 4R^2]^2 = 0$$
qui prouve d'abord que ces points de rencontre, s'ils sont réels, sont des points doubles de la courbe.

Résolvons l'équation du second degré
$$x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0,$$
on a
$$x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{1},$$
d'où
$$x' = R(\sqrt{5} - 1) \quad \text{et} \quad x'' = -R(\sqrt{5} + 1).$$

A la valeur x' correspond un point double réel A, dont la distance OA à l'origine est égale au double du côté du décagone régulier convexe inscrit dans le cercle donné.

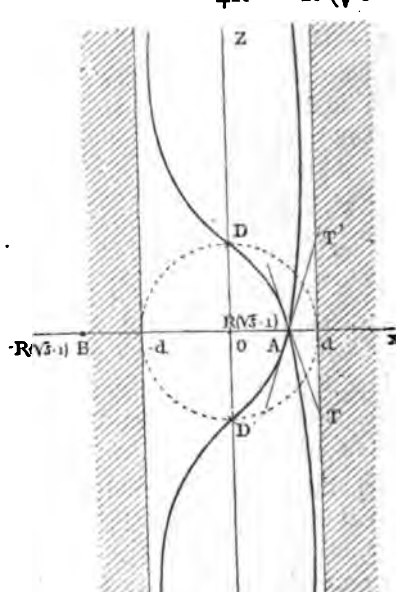
A la seconde valeur x'' correspond un point double isolé, car les tangentes en ces points sont imaginaires, et de plus, comme on a $\sqrt{5} + 1 > 2$, ce point est en dehors des deux droites $x = d$ et $x = -d$. C'est donc bien un point double isolé.

Pour avoir les tangentes au point double A, nous pouvons transporter les axes en ce point par les formules
$$z = Z$$
$$x = X + R(\sqrt{5} - 1).$$

L'équation étant
$$z^2 = \frac{[x - R(\sqrt{5} - 1)]^2 [x + R(\sqrt{5} + 1)]^2}{4R^2 - x^2}$$

on aura $$z^2 = \frac{X^2[X + 2R(\sqrt{5})]^2}{4R^2 - [X + R(\sqrt{5} - 1)]^2}$$
et les coefficients angulaires des tangentes au point double A sont donnés par la limite de $\frac{Z^2}{X^2}$ pour $X = 0$.

Or on a $$\frac{Z^2}{X^2} = \frac{[X + 2R(\sqrt{5})]^2}{4R^2 - [X + R(\sqrt{5} - 1)]^2}$$
et pour $X = 0$ on a
$$\text{limit}\,\frac{Z^2}{X^2} = \frac{4R^2(\sqrt{5})^2}{4R^2 - R^2(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{10}{(\sqrt{5} - 1)}$$
$$= \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$



On a ainsi les deux tangentes OT et OT' à la courbe au point A.

Quant au point double isolé, il est à une distance de l'origine égale au double du côté du décagone régulier étoilé inscrit dans le cercle donné. Il est en R, sur la partie négative de l'axe Ox.

La courbe, qui est d'ailleurs symétrique par rapport à l'axe Ox, a donc la forme que lui donne la figure ci-contre.

5. — Il faut maintenant étudier les parties qui proviennent réellement de foyers de coniques.

Les foyers étant donnés par des sphères inscrites dans un cylindre droit ayant pour équation
$$x^2 + y^2 = \lambda^2$$
et la plus grande valeur de λ étant $\lambda = d$, les points limites

des parties correspondant à des foyers réels seront donnés en coupant la surface par le cylindre

$$x^2 + y^2 = d^2.$$

On a alors, pour avoir la projection de cette intersection sur le plan des zx, à résoudre les deux équations

$$x^2 + y^2 = d^2$$

et
$$(x^2 + y^2 - dx)^2 = z^2(x^2 + y^2).$$

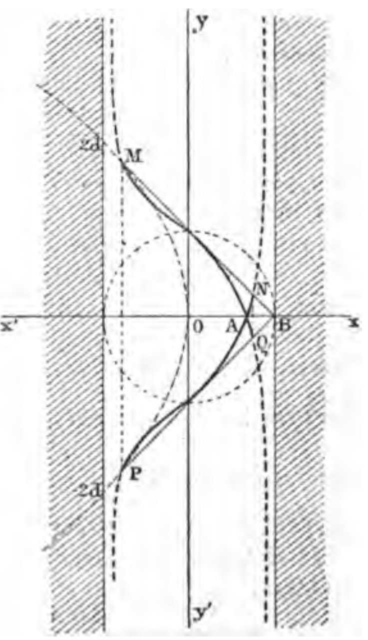
D'où l'on déduit $\quad d^2(d - x) = z^2 d^2$

ou
$$z^2 = (d - x)^2,$$

ce qui donne les deux droites

$$z + x = d$$
$$z - x = - d,$$

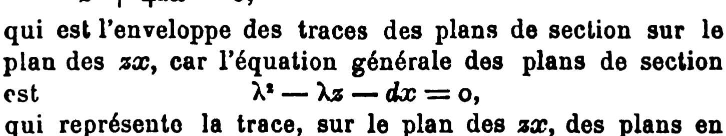
c'est-à-dire les parallèles aux bissectrices des axes passant par les points D et D' et les points de rencontre de cesdroites avec la courbe sont les points limites de parties correspondant à des foyers réels.



Par suite, dans la figure ci-contre la partie en trait plein correspond aux foyers réels et la partie en pointillé correspond aux foyers imaginaires.

On peut remarquer que ces deux droites de séparation ne sont autre chose que les tangentes issues du point limite B à la parabole

$$z^2 + 4dx = 0,$$



qui est l'enveloppe des traces des plans de section sur le plan des zx, car l'équation générale des plans de section est

$$\lambda^2 - \lambda z - dx = 0,$$

qui représente la trace, sur le plan des zx, des plans en

fonction du paramètre λ. L'enveloppe de ces traces est bien la parabole $z^2 + 4dx = 0$.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Therel, à Versailles; Griffon, à Montpellier.

QUESTION 27

En désignant par V l'angle aigu ou obtus des asymptotes de l'hyperbole, angle dans lequel se trouve la courbe, démontrer que

$$\operatorname{tg} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC} \sin \theta}{A + C - 2B \cos \theta}$$

ε étant égal à ± 1, et son signe étant le même que celui du discriminant.

L'équation de l'hyperbole étant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sil'on pose $u = a^2 - b^2$, l'hyperbole est équilatère si $u = 0$, mais nous supposons u différent de zéro et nous nous proposons de décider, d'après l'équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

et sans opérer sa réduction, si la courbe est située dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus de ses asymptotes; on pourrait dire *si l'hyperbole est aiguë ou obtuse.*

Le premier cas est réalisé quand $\frac{a^2}{b^2}$ est plus grand que 1, quand u est positif par conséquent; l'autre quand $\frac{a^2}{b^2}$ est plus petit que 1, ce qui correspond à l'hypothèse $u < 0$.

Or l'on sait que les axes de la conique (1) sont donnés par l'équation,

$$R^4 - \frac{(A + C - 2B \cos \theta)\Delta}{\delta^2} R^2 - \sin^2 \theta \frac{\Delta^2}{\delta^3} = 0 \quad (2)$$

dans laquelle on a supposé, suivant l'usage;

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

Les nombres a^2 et $-b^2$ étant les racines de (2), on a donc

$$a^2 - b^2 = \frac{(A + C - 2B\cos\theta)\Delta}{\delta^2}. \qquad (3)$$

Le signe de $a^2 - b^2$, celui de u en d'autres termes dépend donc uniquement du signe du produit $(A + C - 2B\cos\theta)\Delta$: or la formule connue

$$\operatorname{tg} V = \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}\,.\sin\theta}{A + C - 2B\cos\theta} = \pm \Delta \frac{\sqrt{B^2 - AC}\sin\theta}{\Delta(A + C - 2B\cos\theta)}$$

prouve que si l'on suppose $V < 90^\circ$, par suite $a^2 - b^2$ positif; comme l'on a d'après la formule (3) $\Delta(A + C - 2B\cos\theta) < 0$, il faudra prendre le même signe que Δ. On voit de même que si V est obtus, il faut encore prendre le signe de Δ. La formule qui donne l'angle des asymptotes, en définissant ainsi celui qui comprend la courbe, est donc

$$\operatorname{tg} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC}\sin\theta}{A + C - 2B\cos\theta};$$

ε étant $+1$ ou -1, savoir $+1$ si le discriminant est positif, -1 s'il est négatif.

QUESTIONS PROPOSÉES

32. — On considère des cercles C passant par le sommet d'une parabole P, et tangentes à cette courbe en un point différent du sommet : — 1. Trouver l'équation générale de ces cercles C ; — 2. Trouver le lieu U des centres. Ce lieu est une parabole cubique ayant un point de rebroussement dont les coordonnées sont (p, o) ; on demande de déterminer l'intersection de U et de P. *(G. L.)*

33. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique quatre normales formant un faisceau harmonique. *(V.)*

34. — On considère deux points fixes O et O′, et une droite Δ perpendiculaire à OO′ au point A ; soit M un point quelconque de Δ ; on mène MO et MO′ ; puis à la droite MO′ on élève au point O′ une perpendiculaire qui rencontre OM

au point M' ; on pose alors M'O' $= x$, MO' $= y$, et l'on considère un point I qui a pour coordonnées x et y, par rapport à un angle droit donné yox. Trouver le lieu décrit par ce point quand M se meut sur Δ, et discuter les différentes formes du lieu quand on donne à A toutes les positions possibles sur OO'. Démontrer que la courbe est unicursale. *(G. L.)*

35. — La question étant posée dans les mêmes termes, mais en supposant cette fois que Δ est parallèle à OO', trouver le lieu du point I ; on distinguera les différentes formes du lieu suivant que le cercle décrit sur OO' comme diamètre est extérieur, tangent ou sécant à la droite Δ. On propose aussi de reconnaître que la courbe trouvée est une courbe du sixième degré unicursale. *(G. L.)*

NÉCROLOGIE

Nous avons le regret d'apprendre la mort de MM. Liouville, professeur au Collège de France, et Briot, professeur à la Faculté des sciences de Paris. La Rédaction se propose de donner prochainement une notice sur les travaux de ces deux savants, qui ont occupé une si grande place dans l'enseignement des Mathématiques en France.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE. — 21308-2.

DÉTERMINATION IMMEDIATE

PAR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE (*) DU NOMBRE DE POINTS D'INTERSECTION DE DEUX COURBES D'ORDRE QUELCONQUE QUI SE TROUVENT A DISTANCE FINIE

Par M. **Chasles** (**).

Cette question n'est autre que celle de déterminer, en algèbre, le nombre des solutions de deux équations à deux inconnues; ce qui exige parfois des calculs compliqués. Les considérations géométriques auxquelles se prête le principe de correspondance (qui s'applique de même directement à la question algébrique) évitent ces calculs et conduisent à une expression fort simple du nombre cherché.

Il suffit de démontrer d'abord ce théorème fondamental de la géométrie analytique, que le nombre des points, réels ou imaginaires, communs à deux courbes géométriques quelconques d'ordre p et p', est toujours pp'. C'est à la démonstration immédiate de ce théorème, qui a offert pendant longtemps des difficultés, que se prête le principe de correspondance (de deux manières); et même la simple définition des courbes géométriques d'être rencontrées toujours en un même nombre de points, réels ou imaginaires, par une droite quelconque, suffit, sans qu'on ait à se servir des équations des courbes.

Théorème I. — *Deux courbes d'ordre* p *et* p' *ont toujours* pp' *points communs, réels ou imaginaires.*

Prenons des points fixes quelconques, I et O. Une droite IX rencontre la première courbe en p points α; les droites menées de ces points au point O rencontrent la deuxième courbe en pp' points α'; par ceux-ci on mène pp' droites IU.

(*) Voyez la note p. 221.

(**) Extrait des Comptes rendus de l'académie des sciences.

Ces *pp'* droites correspondent à IX. De même, à une droite IU, qui rencontre la deuxième courbe en *p'* points, correspondent *p'p* droites IX. Il existe donc 2 *pp'* droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. *pp'* de ces droites sont coïncidentes avec la droite IO, et n'appartiennent pas à des points communs aux deux courbes; mais chacune des *pp'* autres droites passe par un point α de la première courbe coïncidant nécessairement avec un des points α' de la deuxième courbe situés sur la droite αO. Le théorème est donc démontré.

Les points multiples et les points de contact que peuvent avoir les deux courbes ne modifient en rien la démonstration, de sorte que le résultat *pp'* est général.

Observation. — Si les deux courbes avaient un point commun sur la droite IO, ce point servirait, comme les autres, à former le nombre *pp'* des solutions étrangères; mais, néanmoins, il compterait aussi dans le nombre des points d'intersection des deux courbes; car une droite IX, infiniment voisine de IO, donnerait lieu alors à une droite correspondante IU, infiniment peu différente de IX, et conséquemment faisant, à la limite, une coïncidence. Mais, du reste, on peut prendre les deux points I, O sur une droite qui ne passe pas par un point commun aux deux courbes: ce qui justifie notre raisonnement.

Théorème II. — *Lorsque deux courbes d'ordre* p *et* p' *sont représentées par les deux équations*

$$(x^m, y^n)^p = o, \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = o$$

de degré p *et* p', *dans lesquelles les puissances supérieures de* x *et* y *sont* m, n, m', n', *le nombre de leurs points d'intersection, situés à distance finie, est*

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega,$$

ω *étant le nombre des points d'intersection des deux courbes qui peuvent se trouver à l'infini, autres que ceux qui s'y trouvent sur les axes coordonnés, en nombre* $(p - m)(p' - m') + (p - n)(p' - n')$.

Le nombre total des points d'intersection des deux courbes étant *pp'* (*Théorème I*), il suffit d'on retrancher leurs points

communs situés à l'infini. Au nombre de ces points s'en trouvent évidemment $(p - n)(p' - n')$ sur l'axe Ox et $(p - m)(p' - m')$ sur l'axe Oy. Donc, si les deux courbes ont à l'infini ω autres points communs, le nombre de leurs points à distance finie se réduit à

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega.$$

La question se réduit donc à déterminer le nombre ω des points communs aux deux courbes qui peuvent se trouver sur la droite de l'infini, autres que ceux qui sont représentés par $[(p - m)(p' - m') + (p - n)(p' - n')]$.

Or cela se fait sans difficulté. L'équation de chaque courbe fait connaître, par une équation en $\frac{y}{x}$ qu'on pose immédiatement, le nombre et la direction des points de la courbe qui se trouvent à l'infini, ainsi que les tangentes en ces points. Ces deux choses, les points et leurs tangentes, sont les éléments principaux de la question.

Deux points des deux courbes situés dans une même direction $\left(\text{déterminée par une même valeur de } \frac{y}{x}\right)$ sont deux points coïncidents, puisqu'ils sont à l'infini sur deux droites parallèles; ils comptent donc pour 1 dans le nombre ω. Mais si les courbes ont en ce point la même tangente, elles ont deux points communs; le point compte donc pour 2. Si l'une des courbes a un point double, il compte aussi pour 2, et de même pour les points multiples d'ordre supérieur. Si les deux courbes ont une tangente commune en leurs points multiples coïncidents, cette tangente ajoute une unité au produit des ordres de multiplicité.

Il peut entrer aussi dans le nombre ω des points situés sur les axes coordonnés Ox, Oy, soit que les courbes aient un contact commun avec un de ces axes en son point à l'infini, ou un contact avec la droite de l'infini elle-même, au même point.

Sans chercher à énumérer les différents cas que peuvent présenter les conditions de contact de deux courbes, je vais donner quelques exemples dans lesquels on trouvera toujours une vérification du résultat.

Voici l'indication du sujet de chacun de ces exemples.

I. Les deux courbes ont un point d'intersection sur la droite de l'infini : $\omega = 1$.

II. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini, dont un est un point d'intersection et l'autre un point de contact : $\omega = 1 + 2 = 3$.

II *bis*. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini : $\omega = 4$.

III. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, et leur tangente commune est la droite de l'infini: $\omega = 2$.

IV. Les deux courbes ont un point de contact avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$.

IV *bis*. Les deux courbes ont trois points de contact à l'infini, dont deux sont sur les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$.

V. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini; la seconde courbe lui est tangente en ce point : $\omega = 2$.

VI. La première courbe a un point double à l'infini; la seconde courbe passe par ce point : $\omega = 2$.

VII. La première courbe a un point double à l'infini ; la seconde courbe passe par ce point et est tangente à l'une des deux branches : $\omega = 3$.

VIII. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, et ont les mêmes tangentes en ce point : $\omega = 6$.

IX. La première courbe a un point triple et la seconde un point double en un même point de l'infini; les deux courbes ont deux tangentes communes en ce point; en outre. elles ont un autre point de contact à l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 8 + 1 = 9$.

X. Exemples pris d'un mémoire de M. Minding : $\omega = 0$.

XI. Du même : $\omega = 0$.

XII. Autre exemple de M. Minding où $\omega = 1 + 2 = 3$.

Exemples. Faisons

$$N = pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n');$$

le nombre cherché sera $N - \omega$.

Soient les courbes

$$\text{(I)} \qquad y^3 - 2y^2x + yx - 1 = 0,$$
$$y^2 - 2yx - y - 2x + 2 = 0.$$

$N = 6 - 2 = 4$. Les courbes ont un point commun à l'infini dans la direction de la droite $y = 2x$. Leurs tangentes en ce point ne coïncident pas : aussi $\omega = 1$, et $N - \omega = 3$. Les deux courbes ont donc trois points d'intersection à distance finie. Effectivement l'équation finale en y est $$5y^3 - 3y^2 - 2 = 0.$$

(II) $$y^3 - 7xy^2 + 14x^2y - 8x^3 + 7y^2 - 30xy + 20x^2 + 7y + 13x - 15 = 0$$
$$y^2 - 6xy + 8x^2 + 4y - 12x + 5 = 0.$$

$N = 6$. Les courbes ont deux points communs à l'infini, dans les directions des droites $y = 2x$, $y = 4x$; le premier est un point d'intersection et le second un point de contact du premier ordre; la tangente commune a pour équation $y = 4x - 2$; donc $\omega = 1 + 2$, et $N = 3$. Donc les courbes ont trois points d'intersection à distance finie, ce qui s'accorde avec le résultat de M. Magnus (*Journal de Crelle*, 1843, t. XXVI, p. 366.)

(II *bis*) $$2y^3 - 2x^2y + y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$$
$$y^3 - x^2y + 3y^2 - xy - x^2 = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini; leurs tangentes en ces points ont pour équations $y = x - \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{3}{2}$.

Donc $\omega = 4$; $N - 4 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points communs à distance finie; ces quatre points coïncident à l'origine des coordonnées où les courbes ont chacune un point double.

(III) $$x^3 + 2x^2y + y^2x + 3y^2 + y = 0$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, dans la direction de la droite $y = -x$; leur tangente en ce point est la droite de l'infini : $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Les courbes ont donc quatre points d'intersection à distance finie. L'un est l'origine des coordonnées; les trois autres sont déterminés par l'équation $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0$.

(IV) $$y^2x - 2y^2 + 3xy + x^2 = 0.$$
$$y^2 - x^2 = 0.$$

$N = 6 - 1 = 5$. Les deux courbes ont un point de contact

avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$, $N - 1 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la cubique a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2y^2 + 3y - 2 = 0$.

(IV*bis*) $$y^2x - 2yx^2 + 2y + x = 0$$
$$2y^2x - 4yx^2 + y + 3x = 0.$$

$N = 9 - 2 = 7$. Les deux courbes ont trois tangentes communes en trois points de l'infini; l'une est la droite $y = 2x$, et les deux autres sont les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$. Les deux courbes ont donc $N - 4 = 3$ points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est en O; les deux autres sont déterminés par les équations finales $3y^2 - 1 = 0$, $x^2 - 3 = 0$.

(V) $$y^3 + x^3 - 3ayx = 0$$
$$y^2 + yx + ax = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini dans la direction de la droite $y = -x$; la tangente en ce point a pour équation $y = -x - a$. La seconde courbe passe par le même point et a la même tangente. Donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la courbe a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2x^2 - 3ax + 16a^2 = 0$.

(VI) $$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 + 3y - x = 0$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini, dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point sont la droite $y = x - 1$ et la droite de l'infini. La deuxième courbe passe par le même point, et sa tangente est la droite $y = x + 1$. Les deux courbes ont donc deux points communs : $\omega = 2$, $N - \omega = 4$. Les courbes ont quatre points d'intersection à distance finie, dont un est l'origine des coordonnées, et les trois autres sont déterminés par l'équation $4x^3 - 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

(VII) $$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 - 3y + x = 0$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0,$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point sont la droite de l'infini et la droite $y = x + 1$. La deuxième courbe passe par ce point et a la même tangente, ce qui fait trois points communs aux deux courbes; ainsi $\omega = 3$, $N - \omega = 6 - 3 = 3$, et les courbes ont trois points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées, les deux autres sont déterminés par l'équation finale $3x^2 - 7x + 3 = 0$.

(VIII) $y^2x - 2x^2y + x^3 + y^2 - 5xy + 4x^2 + 2y = 0$
$2y^2x - 4x^2y + 2x^3 - y^2 + 5x^2 + 4y = 0.$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, dans la direction de la droite $y = x$, et ont les mêmes tangentes en ce point, lesquelles ont pour équations $y = x + 1$, $y = x + 2$.

Ce qui fait six points communs à l'infini : $\omega = 6$ et $N - \omega = 2$.

Ainsi les deux courbes n'ont que deux points d'intersection à distance finie. Ces points sont à l'origine des coordonnées, où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

(IX) $x(y - x)^3 - (3y + 4x)(y - x) + 6y = 0$
$x(y - x)^2 - 3x(y - x) + 2y = 0.$

$N = 12 - 1 = 11$. La première courbe a un point triple à l'infini dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point ont pour équations

$$y = x + 1, \quad y = x + 2, \quad y = x + 3.$$

La courbe est tangente à l'axe Oy, à l'infini.

La deuxième courbe est aussi tangente à cet axe en ce point, et a un point double coïncidant avec le point triple de la première; en outre, ses deux branches sont tangentes à deux branches de celle-ci : ce qui fait huit points communs aux deux courbes, et un neuvième au point de contact sur l'axe Oy; ainsi $\omega = 9$ et $N - \omega = 2$. Les courbes n'ont donc que deux points communs à distance finie. Ces deux points coïncident à l'origine des coordonnées, où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

(X) $(x,2)\,y^4 + (x,4)\,y^2 + (x,5)\,y + (x,2)\,y^3 + (x,5) = 0$

$$(x,8)\, y^5 + (x,9)\, y^3 + (x,6)\, y^4 + (x,4)\, y^2 + (x,3)\, y + (x,4) = 0$$

(x,α) désigne un polynôme en x de degré α (Minding, *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 178).

On ne peut déterminer que N. On a $N = 6 . 13 - 1 . 4 - 2 . 8 = 78 - 20 = 58$, quels que soient les polynômes; ce qui s'accorde avec la formule de Minding, qui donne

$$4 . 8 + \frac{11}{2} + \frac{11}{2} + 5 + 5 + 5 = 4 . 8 + 11 + 15 = 58.$$

La première courbe a trois points à l'infini, autres que les trois qui s'y trouvent aux extrémités des axes coordonnés; et la seconde courbe n'en a qu'un, lequel se trouve infiniment voisin de l'axe des x, dû à ce que la courbe est tangente en ce point à la droite de l'infini, de sorte que les deux courbes n'auront pas de points communs s'exprimant par $x = \infty$, $y = \infty$, quels que soient les polynômes multiplicateurs des puissances de y; mais elles pourront en avoir aux extrémités des axes coordonnés, s'exprimant par $y = 0$, $x = \infty$, ou bien $x = 0$, $y = \infty$, selon ce que seront les polynômes.

(XI) $bx^2y^4 + ay^4 + gx^3y + exy^2 + lx^3 + cy^2 + kx^2 + h = 0$

$$\beta x^5 y^2 + \mu x^2 + \delta x^2 y + \gamma z + \lambda = 0.$$

$N = 42 - 16 = 26$. La première courbe n'a qu'un point à l'infini, autre que les cinq qui s'y trouvent aux extrémités des deux axes coordonnés, et la seconde courbe n'en a aucun; en outre les deux courbes n'ont pas de contact sur les axes Ox, Oy. Donc $\omega = 0$, et les deux courbes ont leurs vingt-six points d'intersection à distance finie; ce qui s'accorde avec le résultat de M. Minding.

(XII) $bx^2y^4 + gx^3y + exy^2 + fy^3 + kx^2 + h = 0$

$$\beta x^5 y^2 + \mu x^4 + \delta x^2 y + \gamma y + \lambda = 0.$$

$N = 42 - 6 - 10 = 26$. Ces deux équations sont les mêmes que les précédentes, où l'on a fait $a = 0$ et $l = 0$ dans la première.

La première courbe a l'axe Ox pour asymptote et l'axe Oy pour asymptote double; en d'autres termes, la courbe a deux points à l'infini sur Ox, et trois points à l'infini sur Oy.

La seconde courbe a une asymptote double coïncidant avec Ox, et cinq asymptotes coïncidant avec Oy. Ainsi les deux courbes ont un point de contact (c'est-à-dire deux points consécutifs) à l'infini sur l'axe Ox, et un contact double (trois points consécutifs) à l'infini sur l'axe Oy; ce qui fait $\omega = 1 + 2 = 3$, $N - \omega = 23$. Ainsi les deux courbes ont vingt-trois points communs à distance finie.

Les trois points qui entrent dans ω forment trois couples de solutions des deux équations, savoir

$$y = 0, x = \infty\ ;\quad x = 0, y = \infty\ ;\quad x = 0, y = \infty.$$

Ce résultat s'accorde avec la méthode analytique de M. Minding.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Je me propose de résoudre, dans les pages qui suivent, un problème simple et sans doute bien connu, afin d'en tirer des conséquences assez importantes, et de jeter un nouveau jour sur certains faits de la géométrie cartésienne.

Désignons, en coordonnées cartésiennes rectangles, par

$$U = Mx^2 + Ny^2 = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'un faisceau de deux droites qui a son sommet à l'origine des coordonnées,

et par

$$ax + by + 1 = 0 \qquad (2)$$

l'équation d'une droite, fixe comme le faisceau, et qui ne passe pas par le sommet du faisceau ; il en résulte que l'équation

$$Mx^2 + Ny^2 + (ax + by + 1)^2 = 0 \qquad (3)$$

représente une conique tangente aux deux rayons du faisceau (1) aux points où ils sont rencontrés par la droite (2).

Une droite quelconque du plan peut être représentée par l'équation

$$ax + by + 1 = \lambda x + \mu y \qquad (4)$$

en y faisant varier λ et μ; et on trouvera sans peine que cette droite devient tangente à la conique (3) moyennant la relation

$$\frac{\lambda^2}{M} + \frac{\mu^2}{N} + 1 = 0\ ; \qquad (5)$$

en d'autres termes, l'équation (5) est l'équation tangentielle de la conique (3), λ et μ étant les coordonnées tangentielles variables.

Cela posé, sur la tangente mobile (4), les deux tangentes fixes (1) déterminent un segment dont le milieu P appartient à la droite que représente l'équation

$$\frac{Mx}{\lambda - a} = \frac{Ny}{\mu - b}; \qquad (6)$$

donc, si on élimine λ et μ entre les trois équations (4), (5) et (6), on obtiendra l'équation cartésienne du lieu du point P à travers toutes les positions de la tangente mobile. Or, les équations (4) et (6) nous donnent très facilement

$$\lambda = a + \frac{Mx}{Mx^2 + Ny^2},$$

$$\mu = b + \frac{Ny}{Mx^2 + Ny^2};$$

et portant ces valeurs dans la relation (5), nous trouvons pour l'équation du lieu

$$U \times \left[\left(\frac{a^2}{M} + \frac{b^2}{N} + 1\right) U + (2ax + 2by + 1)\right] = 0 \qquad (7)$$

donc le lieu est une courbe du quatrième ordre qui se décompose en deux coniques : l'une de ces deux coniques n'est autre que le faisceau des deux tangentes fixes, et l'autre est une conique proprement dite représentée par l'équation

$$\left(\frac{a^2}{M} + \frac{b^2}{N} + 1\right) U + (2ax + 2by + 1) = 0. \qquad (8)$$

Or, si nous comparons cette équation à celle de la conique donnée (3), nous voyons qu'en retranchant (3) de (8), il vient :

$$\frac{1}{MN}(bMx - aNy)^2 = 0. \qquad (9)$$

Donc, la conique (8) est doublement tangente à la conique donnée (3), et la corde de contact, représentée par l'équation

$$bMx - aNy = 0, \qquad (10)$$

n'est autre chose que la droite joignant l'origine au milieu de la corde de contact (2); les deux coniques ont donc un diamètre commun, la droite (10), et se touchent aux extré-

mités de ce diamètre; elles sont donc concentriques; et dès lors l'équation (8) montre que les asymptotes du lieu sont parallèles aux deux droites qui forment le faisceau (1).

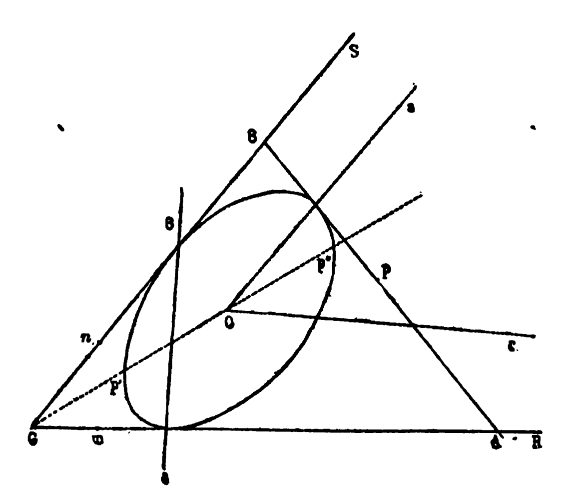
En résumé, nous avons cet énoncé:

Quand une droite AB *roule sur une conique fixe* Σ, *le milieu* P *du segment* AB *intercepté par deux tangentes fixes* GR *et* GS *décrit un lieu du quatrième ordre; et ce lieu se décompose en deux autres qui sont:*

1° L'ensemble des deux tangentes fixes OR *et* OS*;*

2° Une conique proprement dite, qui est concentrique à la première, la touche aux deux extrémités p′ *et* p″ *du diamètre* GH *qui passe au point* G, *a pour asymptotes les droites* Or *et* Os *parallèles aux deux tangentes fixes, et passe en outre par le point* m *milieu de* Gα, *et par le point* n *milieu de* Gβ, α *et* β *étant les points de contact de la conique primitive avec les deux tangentes fixes.* (*Ce dernier résultat est immédiatement visible sur l'équation* (8).

Tel est le problème que je me proposais de résoudre; je vais en donner quelques conséquences.



Supposons que les deux droites représentées par l'équation (1) soient les deux directions asymptotiques d'un cercle,

en faisant M = N, le point P sera précisément la projection du point fixe G sur la tangente mobile; en même temps le point G sera le *foyer* de la conique donnée, et l'énoncé général donne immédiatement ce théorème :

Le lieu des projections d'un foyer d'une conique sur les tangentes de cette courbe est un lieu du quatrième ordre; et ce lieu se décompose en deux autres qui sont :

1° L'ensemble des directions asymptotiques de tout cercle ayant son centre au foyer;

2° Une circonférence concentrique à la conique, et la touchant aux deux extrémités de l'axe focal.

On trouve ainsi, sans aucun artifice de calcul, le lieu complet, tel qu'il doit résulter de la théorie générale des podaires; seulement le foyer n'intervient que pour donner un caractère spécial d'élégance au résultat obtenu dans le cas général; de telle façon que les explications plus ou moins rigoureuses, plus ou moins tourmentées, que l'on consacre parfois à la question particularisée, n'ont plus aucune raison d'être; il est bon cependant d'en faire une justice sommaire.

On explique souvent la nature du lieu étudié pour le cas du foyer, en remarquant que le point P est à chaque instant situé sur une droite mobile autour du point G, et que par suite le lieu du point P doit passer par le point G; mais nous ferons remarquer :

1° Que la démonstration du prétendu théorème que l'on invoque comporte en certains cas des objections sérieuses;

2° Que dans les circonstances actuelles ce théorème est bien applicable, mais qu'il n'explique presque rien; car il ne s'agit pas seulement de montrer que le lieu passe au point G; eût-on prouvé encore que le point G est un point double du lieu, cela ne suffirait pas encore; le fait essentiel, c'est la décomposition du lieu total en deux autres; or notre procédé indique immédiatement cette décomposition sans faire intervenir spécialement les propriétés focales.

Il est vrai que si, au lieu d'appliquer le pseudo-théorème dont nous parlions, on appliquait en toute rigueur les procédés de raisonnement introduits par *Poncelet* et fortement

développés par *Chasles*, et pourvu que l'on n'ignorât pas les propriétés singulières des directions asymptotiques du cercle, on pourrait, en toute rigueur, et *sans calcul écrit*, retrouver toutes les conclusions de notre calcul ; mais alors on aurait fait, sous apparence géométrique, toutes nos transformations algébriques, en prenant comme principe directeur le principe de continuité de Poncelet ; on peut donc, si l'on veut, considérer notre problème comme une heureuse *illustration* de ce dernier principe ; et cette seule raison suffirait à justifier tous les détails que nous venons de donner à nos lecteurs.

NOTA. — Pour laisser à cet article son véritable caractère, nous avons dû passer rapidement sur certains calculs, et sur certaines interprétations de formules ; mais nous sommes à la disposition de nos jeunes lecteurs pour leur transmettre des explications détaillées.

QUESTION 12

Solution par M. CARTIER, élève au Lycée d'Angoulême.

On considère une ellipse rapportée à ses axes ; soient A, A *les extrémités du grand axe ;* B, B' *celles du petit axe. On mène les tangentes à l'ellipse en ces quatre points et une tangente mobile* Δ *qui rencontre celles-ci en des points* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. *Cela posé on propose les questions suivantes :*

I. *Équation générale des cercles* U *décrits sur* $\alpha\alpha'$ *comme diamètre.*

II. *Équation des cercles* V *décrits sur* $\beta\beta'$.

III. *Quel est l'angle d'anomalie du point de contact* M *de la tangente* Δ *quand les cercles* U, V *sont égaux.*

IV. *Démontrer que l'axe radical des cercles* U, V *n'est autre chose que la normale en* M.

V. *Par le centre de l'ellipse on mène une tangente aux cercles* V. *Démontrer que le lieu des points de contact est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.*

VI. *Démontrer que les cercles* U, V *sont orthogonaux.*

VII. *Trouver le lieu décrit par les points communs. Démontrer qu'il se compose de deux cercles concentriques à l'ellipse, de rayons* a + b *et* a — b. (G. L.)

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soit φ l'anomalie correspondant à un point quelconque M de cette ellipse.

La tangente en ce point est

$$\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0. \qquad (\Delta)$$

Le point α a pour abscisse a et pour ordonnée $\frac{b\,(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi}$; β a pour ordonnée b et pour abscisse $\frac{a\,(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}$, β' a pour ordonnée $-b$ et pour abscisse $\frac{a\,(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi}$.

1° Le cercle correspondant U a son centre en u dont l'ordonnée est $\frac{b}{\sin \varphi}$; son rayon est

$$u\alpha = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{\sin \varphi} - b\,\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2\,\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}}$$

L'équation générale des cercles U est donc

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{\sin \varphi}\right)^2 - \left(a^2 + b^2\,\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{b}{\sin \varphi}\,y - c^2 = 0. \qquad (u)$$

2° On trouve de même l'équation générale des cercles V.

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{a}{\cos \varphi}\,x + c^2 = 0. \qquad v)$$

3° Lorsque les cercles sont égaux $\alpha\alpha' = \beta\beta'$

ou

$$B'\beta' - B\beta = \pm 2a$$

ou

$$\frac{a(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{a(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} = \pm 2a;$$

d'où

$$\cos \varphi = \pm \sin \varphi$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \begin{cases} \pm 45^\circ \\ \pi \pm 45^\circ \end{cases}$$

On pourrait prévoir ce résultat en remarquant que lorsque $\alpha\alpha' = \beta\beta'$, la tangente ($\Delta$) est parallèle à l'une des diagonales du rectangle des axes, car on a ou $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, ou $\alpha\beta' = \beta\alpha'$.

4° L'axe radical des deux cercles (u) et (v) est

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2$$

C'est la normale au point φ.

5° L'équation (v) montre que la longueur de la tangente menée de l'origine à ce cercle est c. Le lieu des points de contact est donc le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.

Les tangentes issues de l'origine à (u) sont imaginaires ; le carré de leur longueur est $-c^2$ comme le montre (u). Le lieu des points de contact est donc le cercle imaginaire concentrique à l'ellipse et passant par les foyers imaginaires de cette conique.

6° Pour prouver que (u) et (v) se coupent orthogonalement, il suffit de montrer que β et β' sont conjugués harmoniques par rapport à α et α' ; ou que β_1 et β' le sont par rapport à D et E; on le voit facilement, on a en effet

$$B'\beta' \times B'\beta_1 = B'D^2 = a^2$$

car $\quad B'\beta' = \dfrac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi} \qquad B'\beta_1 = \dfrac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}$

7° Pour avoir le lieu décrit par les points communs à (u) et (v), on pourrait éliminer φ entre (u) et (v).

Opérons autrement.

La droite OM, qui fait avec Ox l'angle φ, coupe le cercle (u) en deux points dont les distances ρ à O sont données par l'équation $\qquad \rho^2 - 2b\rho - c^2 = 0,$

obtenue en remplaçant dans (u) $x^2 + y^2$ par ρ^2, $\dfrac{y}{\sin\varphi}$ par ρ.

Elle coupe le cercle (v) en deux points dont les distances à O sont de même les racines de

$$\rho^2 - 2a\rho + c^2 = 0.$$

Ces deux équations ont une racine commune $\rho = a + b$. Elle correspond à un point commun P aux deux cercles. Le lieu de ce point est donc le cercle

$$\rho = a + b.$$

Les deux autres racines sont égales et de signes contraires; donc les deux points F, G sont équidistants de O; la valeur absolue de ces racines est $a - b$. Donc le lieu des points F et G est le cercle

$$\rho = a - b.$$

De même la droite faisant avec OX un angle égal à $-\varphi$, coupe le cercle (u) en un point Q commun aux deux cercles, car Q symétrique de F par rapport à AA' est aussi sur le cercle (v).

On a $$OQ = OF \text{ ou } OG = a - b.$$

Le lieu de Q est le cercle $\rho = a - b$. Les autres points où elle coupe les deux cercles, H et K sont évidemment symétriques par rapport à O dont ils sont à une distance égale à $OP = a + b$. Leur lieu est donc le cercle $\rho = a + b$.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Petouzet, à Bar-le-Duc; Lutaud et Finat, à Moulins; Griffon, à Montpellier; Onillon, à Versailles Montérou, au lycée Louis-le-Grand; Lapareillé, au lycée Henri IV.

QUESTION 14

Solution par M. TROCMÉ (*), élève au Lycée Charlemagne.

On considère la parabole P

$$(\lambda y - x)^2 - 2\mu x = 0,$$

qui est tangente à l'axe Oy *au point* O, *et qui coupe l'axe des* x *en un point* M *tel que* $OM = 2\mu$; *on considère aussi la parabole cubique* Q, *enveloppe des normales de* P. *Cette courbe est tangente à l'axe* Ox *au point* A, *et coupe cet axe en un autre point* B; *soit enfin* C *le point de rencontre de l'axe de* P *avec* Ox. *On imagine maintenant que, d'un point* R, *mobile sur* Ox, *on mène à la courbe* P *des normales.*

Ce problème dépend d'une équation du second degré.

1° Déterminer et discuter cette équation, et montrer quels résultats elle donne quand on suppose successivement le point R *à l'un des points* A, B, C *ou* M.

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

2° *Après avoir déterminé en fonction de* λ *les rapports* $\frac{OA}{OM}$, $\frac{OB}{OM}$, $\frac{OC}{OM}$, *déduire de ces relations que l'on a*

$$2OA \cdot OC = AC \cdot OM.$$

3° *Examiner successivement le cas où le point* B *se confond avec* O, *et celui où le point* A *coïncide avec* M. *Énoncer les théorèmes auxquels donnent lieu ces deux hypothèses.*

4° *Démontrer que le paramètre* p *de la parabole est donné par la formule*

$$p = \frac{\lambda\mu}{(\lambda^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

et que l'équation de l'axe est

$$\lambda y - x + \frac{\mu}{\lambda^2 + 1} = 0.$$

5° *Trouver l'enveloppe de cette droite quand on suppose que* μ *est constant, et construire la courbe donnée.* (G. L.)

1° Exprimons rationnellement en fonction d'un paramètre t les coordonnées d'un point quelconque de la parabole. Posons $\lambda y - x = t$. L'équation de P devient, en remplaçant $\lambda y - x$ par t, $t^2 - 2\mu x = 0$; d'où on tire $x = \frac{t^2}{2\mu}$.

On a d'autre part $y = \frac{x + t}{\lambda} = \frac{t^2 + 2\mu t}{2\mu\lambda}$.

L'équation d'une normale au point x' y' est

$$\frac{x - x'}{-(\lambda y' - x') - \mu} = \frac{y - y'}{\lambda(\lambda y' - x')}.$$

Écrivons que cette normale passe par le point $x = \alpha$: $y = 0$ en désignant par α la distance OR

$$\frac{\alpha - x'}{-(\lambda y' - x') - \mu} = \frac{-y'}{\lambda(\lambda y' - x')}. \qquad (1)$$

Soit t le paramètre correspondant au point x' y' situé sur la courbe. En remplaçant dans (1) x' y' par leurs valeurs en fonction de t, on aura l'équation qui fera connaître les paramètres caractéristiques des points où aboutissent les normales issues de R,

$$\frac{\alpha - \frac{t^2}{2\mu}}{t + \mu} = \frac{\frac{t^2 + 2\mu t}{2\mu\lambda}}{\lambda t}.$$

ou en simplifiant

$$t^2 (\lambda^2 + 1) + 3\mu t + 2\mu^2 - 2^2\lambda\alpha\mu = 0. \qquad (2)$$

Nous avons supprimé la racine $t = 0$ qui correspond à l'origine.

On peut écrire l'équation (2) en posant $\frac{\alpha}{\mu} = K$,

$$\frac{t^2}{\mu^2} (\lambda^2 + 1) + \frac{3t}{\mu} + 2 - 2\lambda^2 K = 0. \qquad (3)$$

Cette équation aura ses racines réelles si

$$9 - 8 (1 + \lambda^2) (1 - \lambda^2 K) \geq 0,$$

ou

$$8\lambda^2 K (1 + \lambda^2) - 8\lambda^2 + 1 \geq 0,$$

ou encore

$$K \geq \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)}.$$

Donc pour toute valeur de K inférieure à

$$\frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)},$$

on ne pourra mener à la parabole qu'une seule normale réelle Ox. Pour la valeur particulière

$$K' = \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)},$$

on a deux racines coïncidentes, le point correspondant se trouve sur la développée en B (*fig. 1*) et on a

$$\frac{2OB}{OM} = K'.$$

Le coefficient angulaire d'une normale est donné

par

$$\gamma = \frac{\lambda (\lambda y' - x')}{-(\lambda y' - x') - \mu} = -\frac{\lambda t}{t + \mu}.$$

Au point A une seconde normale se confond avec Ox. On doit donc trouver $\gamma = 0$, ce qui exige $t = 0$.

L'équation (3) admettant une racine nulle, on a la condition

$$1 - \lambda^2 K = 0,$$

d'où $$K = \frac{2OA}{OM} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Au point C, une normale se confond avec l'axe. On doit donc trouver $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ pour le coefficient angulaire.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda t}{t + \mu},$$

d'où $$t = \frac{-\mu}{1 + \lambda^2}.$$

Pour avoir le rapport $\frac{OC}{OM}$, il suffit de porter cette valeur de t dans l'équation (3). Il vient

$$\frac{1}{\lambda^2 + 1} - \frac{3}{\lambda^2 + 1} + 2 - 2\lambda^2 K = 0;$$

d'où on tire

$$K = \frac{2OC}{OM} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}.$$

2° — Éliminons λ^2 entre les deux relations

$$\frac{2OA}{OM} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ et } \frac{2OC}{OM} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}.$$

On aura $$\frac{OM}{2OA} = \frac{OM - 2OC}{2OC},$$

ou $$OA.\ OC = OM\ (OA - OC) = OM.\ AC,$$

ce qui démontre les propriétés énoncées.

3° — Supposons d'abord que les points O et B soient confondus. On doit avoir $OB = 0$. Mais on a

$$\frac{2OB}{OM} = \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2\ (\lambda^2 + 1)},$$

d'où $$\lambda^2 = \frac{1}{8}.$$

Si on calcule le rapport $\frac{OA}{OM}$, on a $\frac{2OA}{OM} = 8$,

d'où $$OA = 4OM.$$

On a de même $\frac{2OC}{OM} = \frac{8}{9}$, d'où $OC = \frac{4}{9} OM$.

Comparant avec la valeur de OA,

$$OC = \frac{OA}{9}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère une infinité de parabole tangentes à l'origine à l'axe des* y *et telles que la parabole cubique passe également par l'origine et soit tangente en* A *à l'axe* Ox, *si* M *est le second point d'intersection de* Ox *et de la parabole, le rapport des distances du point* O *aux points* A *et* M *est constant et égal à* 4. *Si* C *est le point d'intersection de l'axe avec* Ox, *le rapport entre* OA *et* OC *est constant et égal à* 9.

Supposons maintenant que A coïncide avec M. On a

$$\frac{2OA}{OM} = 2 = \frac{1}{\lambda^2} \text{ d'où } \lambda^2 = \frac{1}{2}.$$

On a alors $\frac{2OB}{OM} = \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2(\lambda^2 + 1)} = \frac{1}{2}$ $OB = \frac{OM}{4}$.

De même $\frac{2OC}{OM} = \frac{1}{\lambda^2 + 1} = \frac{2}{3}$, $OC = \frac{OM}{3}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si on considère une infinité de paraboles tangentes à* Oy *à l'origine et la parabole cubique tangente à* Ox *au point* M *d'intersection de la parabole et de cette droite, le point* B *est à une distance de l'origine égale au quart de la distance* OM; *de plus* OC *est le tiers de* OM.

4° — L'axe est la parallèle à la droite $\lambda y - x = 0$ menée par le point C. Or, on a

$$\frac{2OC}{OM} = \frac{OC}{\mu} = \frac{1}{1 + \lambda^2};$$

d'où l'équation de l'axe

$$\lambda y - x + \frac{\mu}{1 + \lambda^2} = 0.$$

Pour calculer le paramètre, abaissons OH perpendiculaire sur l'axe. OC étant une normale, CH représente le paramètre p. On a donc $p^2 = \overline{OH}^2 - \overline{OC}^2$.

Mais OH, distance de l'origine à l'axe est donné par

$$OH = \frac{\frac{\mu}{1+\lambda^2}}{(1+{}^2)\lambda^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu}{(1+{}^2)\lambda^{\frac{3}{2}}}$$

$$OC = \frac{\mu}{(1+\lambda^2)}$$

$$p^2 = \frac{\lambda^2\mu^2}{(1+\lambda^2)^3}$$

ou
$$p = \frac{\lambda\mu}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

5° — L'équation de l'axe est

$$\lambda y - x + \frac{\mu}{1+\lambda^2} = 0. \qquad (1)$$

Si la parabole P passe par un point fixe de Ox, μ est constant et λ est le paramètre variable.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\lambda^3 y - \lambda^2 x + \lambda y + \mu - x = 0.$$

Il faut exprimer que cette équation du troisième degré en λ a une racine double. Pour cela nous rendrons l'équation homogène en λ et z, en posant $z = 1$ et nous annulerons les deux dérivées partielles par rapport à λ et à z.

$$f(\lambda z) = \lambda^3 y - \lambda^2 z x + \lambda z^2 y + (\mu - x)z^3 = 0,$$
$$f'_\lambda(\lambda z) = 3\lambda^2 y - 2\lambda x + y = 0,$$
$$f'_z(\beta z) = 3(\mu - x) + 2\lambda y - \lambda^2 x = 0.$$

Éliminant λ^2 par la règle connue, on a le lieu cherché

$$[9y(\mu - x) + xy]^2 = (6y^2 - 2x^2)[-2y^2 + 6x(x-\mu)].$$

C'est une courbe du quatrième degré. On peut l'écrire

$$y^2(9\mu - 8x)^2 = 4(3y^2 - x^2)(3x^2 - y^2 - 3\mu x). \qquad (A)$$

Les termes du degré le plus élevé sont

$$64x^2y^2 - 4(3y^2 - x^2)(3x^2 - y^2) = 12x^4 + 12y^4 + 24x^2y^2.$$

Il n'y a donc pas de points à l'infini, puisque l'on peut écrire ce groupe sous la forme

$$12(x^2 + y^2)^2.$$

Ordonnons l'équation par rapport à y^2.

$$12y^4 + y^2(81\mu^2 - 144\mu x + 64x^2 - 36x^2 + 36\mu x - 4x^2) + 12x^3(x - \mu) = 0,$$

ou en simplifiant,

$$4y^4 + y^2(27\mu^2 + 8x^2 - 36\mu x) + 4x^3(x - \mu) = 0.$$

Pour que cette équation en y^2 ait ses racines réelles, il faut que

$$U = (27\mu^2 + 8x^2 - 36\mu x)^2 - 64x^3(x - \mu) \geq 0,$$

ou

$$U = (27^2\mu^4 + \mu^2x^2(36^2 + 16.27) - 54.36.\mu^3x - 8^3\mu x^3) \geq 0$$

ou $U = \mu(27^2\mu^3 - 3.8.81.\mu^2x + 3.9.8^2.\mu x^2 - 8^3x^3) \geq 0$

ou enfin $\qquad U = \mu(9\mu - 8x)^3 \geq 0.$

Pour que U soit positif, en supposant μ supérieur à o, il faut que

$$x \leq \frac{9\mu}{8}.$$

Les valeurs correspondantes de y^2 sont égales

$$y^2 = \frac{x^2}{3} = \frac{27\mu^2}{64}, y = \pm\mu\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Revenons à l'équation de la courbe mise sous la forme (A).

Les deux droites $3y^2 - x^2 = 0$ et l'hyperbole $3x^2 - y - 3\mu x = 0$ séparent le plan en régions et il n'y a pas de points du lieu dans les parties ombrées de la figure 2.

L'hyperbole $3x^2 - y^2 - 3\mu x = 0$ a son centre au point $y = 0$, $x = \frac{\mu}{2}$, ses sommets réels aux points $y = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, $x = \mu$. Les asymptotes font un angle de 60° avec l'axe des x.

Si on cherche directement les points d'intersection de la courbe et de la droite $x = \frac{9\mu}{8}$, on peut remarquer qu'ils

appartiennent aux deux droites $3y^2 - x^2 = 0$, et à l'hyperbole $3x^2 - y^2 - 3\mu x = 0$. Or on trouve pour les ordonnées la même valeur $y = \pm \frac{\mu 3\sqrt{3}}{8}$.

Les deux points $x = \frac{9\mu}{8}$, $y = \pm\mu\frac{3\sqrt{3}}{8}$ sont donc deux points doubles, et comme il n'y a pas de points de la courbe au delà de la droite $x = \frac{9\mu}{8}$, ce sont deux points de rebroussement.

Pour avoir la tangente en l'un de ces points, considérons les deux dérivées secondes f''_{y^2} et f''_{xy}.

$$f'_y = 16y^3 + 2y(27\mu^2 + 8x^2 - 36\mu x)$$
$$f''_{y^2} = 48y^2 + 54\mu^2 + 16x^2 - 72\mu x$$
$$f''_{xy} = 2y(16x - 36\mu).$$

Remplaçons dans ces deux dérivées x et y par leurs valeurs

f''_{y^2} devient égal à $\frac{27\mu^2}{2}$

et f''_{xy} ... $-\sqrt{3}\frac{27\mu^2}{2}$.

Le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{f''_{xy}}{f''_{y^2}} = \sqrt{3}$.

Comme l'origine est aussi un point de rebroussement, la tangente étant Ox, on voit que la courbe présente trois points de rebroussement qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et que les tangentes en ces trois points sont les hauteurs de ce triangle.

Si x est compris entre O et μ, le produit des racines de l'équation en y^2 est négatif et l'on n'a que deux valeurs réelles pour y, égales et de signes contraires. Au point $y = 0$ $x = \mu$, la tangente est verticale.

x variant de μ à $\frac{9\mu}{8}$, on a pour y quatre valeurs égales deux à deux et de signes contraires.

Enfin les points $x = \mu$, $y = \pm\frac{\mu}{2}$ appartiennent à la courbe,

NOTA. — La même question a été résolue par M. Petouzet, à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

36. — On considère les ellipses E, ayant le même centre, leurs axes de direction fixes, et homothétiques ; par deux points fixes, l'un A pris sur ox, l'autre B pris sur oy, de telle façon que $oA = a$, $oB = b$, on fait passer des cercles C tangents à E au point I. Trouver le lieu de ce point. Ce lieu est une cubique ; on propose de la construire dans le cas particulier où les courbes E sont des cercles.

(*G. L.*)

37. — On considère une parabole P, et sur cette courbe un point C. Soit N la normale en ce point. 1° Trouver sur cette normale un point D, tellement choisi que le cercle S décrit de D comme centre avec DC pour rayon rencontre P en deux points A et B, en ligne droite avec D.

2° Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde AB est constante quand le point C se déplace sur la courbe P.

3° Équation générale de la droite AB. Démontrer, au moyen de cette équation générale, que l'enveloppe de ces droites est une parabole égale à la proposée.

4° Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. Expliquer cette coïncidence.

5° Aux cercles S, on mène des tangentes parallèles à la droite AB. Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles, dont l'une est égale à la proposée quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur $4p$, dans la direction positive de son axe.

(*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX. — RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23864-2.

NOTE

RELATIVE A LA DÉTERMINATION DU NOMBRE DES POINTS D'INTERSECTION DE DEUX COURBES D'ORDRE QUELCONQUE, QUI SE TROUVENT A DISTANCE FINIE

Par M. **Chasles.**

Les équations de deux courbes p et p' étant

$$(x^m, y^n)^p = 0 \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0,$$

le nombre de leurs points communs situés à distance finie est $pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega$, ω étant le nombre des points communs aux deux courbes qui se trouvent sur la droite de l'infini, autres que ceux qui, situés sur cette droite et sur les axes des coordonnées, sont représentés par les deux termes $(p - m)(p' - m')$, $(p - n)(p' - n')$. Cela résulte de ce que *le nombre total des points (réels ou imaginaires) communs à deux courbes d'ordre* p *et* p' *est toujours* pp'.

En donnant une première démonstration de ce théorème par le principe de correspondance, j'ai annoncé que le même raisonnement se prêtait à une seconde démonstration. C'est celle-ci qui fait l'objet de la présente note. Cette démonstration, extrêmement simple, repose sur une seule propriété des courbes géométriques, savoir : que le nombre des tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut mener par un point à une courbe, est constant, quel que soit le point ; ce qui est évident, puisque la recherche de ce nombre est un problème déterminé.

Théorème. — *Le nombre des points communs à des courbes d'ordre* p *et* p' *est* pp'.

Une droite IX, tournant autour d'un point I, rencontre la première courbe en p points α ; par chacun de ces points, on mène les tangentes de la seconde courbe, qui (réelles ou imaginaires) sont en nombre constant q', ce qui fait pq' tangentes ; et par leurs points de contact α' on mène pq' droites

IU. Ces pq' droites correspondent à la droite IX. A une droite IU correspondent pp' droites IX ; car une droite IU rencontre la seconde courbe en p' points α', et les tangentes en ces points coupent la première courbe en $p'p$ points α, par lesquels passent les $p'p$ droites IX correspondant à IU. Il existe donc $pq' + pp'$ droites coïncidant chacune avec une droite correspondante IU. pq' de ces droites coïncident avec les q' tangentes de la seconde courbe, qu'on peut mener par le point I ; et les pp' autres sont les droites qui passent par les points d'intersection des deux courbes. Donc ces points d'intersection sont en nombre pp'; C. Q. F. D.

OBSERVATION. — Au lieu des tangentes que l'on suppose menées de chaque point de la première courbe à la seconde, on peut se servir des normales : le raisonnement et la conclusion sont les mêmes. On dira : Une droite IX rencontre la première courbe en p points α, de chacun desquels on mène les normales de la seconde courbe, en nombre constant q', ce qui fait pq' normales ; par leurs pieds on mène pq' droites IU. Une droite IU, menée arbitrairement, coupe la seconde courbe en p' points, et les normales en ces points rencontrent la première courbe en $p'p$ points, par lesquels passent $p'p$ droites IX. Il existe donc $pp' + pq'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. De ces coïncidences, pq' ont lieu sur les q' normales de la seconde courbe menées par le point I. Ce sont des solutions étrangères, et chacune des pp' autres coïncidences a lieu quand une droite IX passe par un point commun aux deux courbes : car ce point est le pied d'une normale à la seconde courbe. Le théorème est donc démontré.

Il serait rare de trouver un pareil exemple de l'usage des tangentes ou des normales, indifféremment, dans une même démonstration.

On conçoit que le principe de correspondance s'applique avec la même facilité à la démonstration du théorème corrélatif, savoir : que le nombre des tangentes communes à deux courbes de la classe nn' respectivement est nn'.

Démonstration. — D'un point x d'une droite l on mène

n tangentes à la première courbe; puis, de leurs points de contact, nn' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles coupent l en nn' points u. D'un point u de l on mène n' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles rencontrent la première courbe en $n'm$ points; les tangentes en ces points coupent l en $n'm$ points x. Il existe donc $nn' + n'm$ points x qui coïncident chacun avec un point u correspondant; $n'm$ de ces points coïncident avec les m points de la première courbe située sur l. Les nn' autres appartiennent à nn' tangentes communes à deux courbes. Donc.....

Le même raisonnement convient pour démontrer que deux courbes $u_m^n, u_{m'}^{n'}$ admettent $(m + n)(m' + n')$ normales communes; ou bien que $n\ (m' + n')$ tangentes à la première courbe sont normales à la seconde.

Je vais donner quelques exemples de contacts d'ordres supérieurs en des points de l'infini, exemple que l'on ne rencontre guère dans les traités de Géométrie analytique, ainsi que dans les applications de la théorie de l'élimination, que pour des contacts simples.

La tangente au point de contact de deux courbes, supposé à l'infini, peut avoir quatre positions différentes qu'il y a lieu de distinguer.

Elle sera un des axes coordonnés, ou parallèle à l'un de ces axes, ou aura une direction quelconque, ou enfin elle sera la droite de l'infini. Ce dernier cas se subdivise, relativement à la position du point de contact, qui peut être sur un axe coordonné ou dans une direction quelconque.

(I) $$axy^2 + bxy + cx + ey^2x + fy^2 = 0$$
$$ax^2y + bxy + cx + ey^2x + fy^2 = 0$$

faisant $pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') = N$

ici $N = 9 - 1 - 1 = 7.$

Les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox en son point de l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre; donc $\omega = 3$, et $N - \omega = 4$. Ainsi les courbes ont quatre points communs à distance finie: deux de ces points coïncident en O, où les courbes sont tangentes à l'axe Oy; les deux autres sont sur la droite $(e - e')\,x + f - f' = 0$.

(I') $ay^2x + cy^2x + fy^2 + bx^2y^2 + ex^2y + gxy + hx^2 = 0$

$$ay^2x + cy^2x + fy^2 + b'x^2y^2 + e'x^2y + g'xy + h'x^2 = 0.$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les deux courbes sont tangentes à l'axe Oy à l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points à l'infini, outre celui qui a été compté dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées, où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation du quatrième degré en y, qu'on obtient ainsi : des deux équations soustraites l'une de l'autre, puis divisées par xy, on tire une expression de x en fonction de y, qui, mise dans une des équations, donne l'équation finale du quatrième degré.

$$\text{(II)} \quad ay^2x + by^2 + cy + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0,$$
$$a'y^2x + b'y^2 + c'y + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0.$$

$N = 9 - 1 - 1 = 7$. Les deux courbes ont un contact du second ordre au point à l'infini sur Ox ; leur tangente en ce point est la droite $y = -\dfrac{f}{e}$; on a donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 5$. Ainsi les courbes ont cinq points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale en x ou en y qu'on obtient sans difficulté, car des deux équations proposées on tire celle-ci :

$$(a - a')yx + (b - b')y + (c - c') = 0,$$

et la valeur de x ou de y tirée de cette équation et mise dans l'une des deux premières donne une équation du quatrième degré.

$$\text{(II')} \quad ax^2y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + fy^2x + gy^2 + hyx = 0.$$
$$ax^2y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + f'y^2x + g'y^2 + h'yx = 0.$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les courbes ont à l'infini chacune un point double sur l'axe Oy, et un point simple sur l'axe Ox; donc $N = 16 - 4 - 1 = 11$. Mais ce point sur l'axe Ox est un contact du second ordre dont la tangente a pour équation $y = -\dfrac{c}{a}$, ce qui fait deux points de plus à l'infini. Enfin, les deux courbes ont en outre un point d'inter-

section à l'infini dans la direction de la droite $y = -\frac{a}{b}x$. On a donc $\omega = 2 + 1 = 3$ et $N - 3 = 8$. Ainsi les deux courbes ont huit points communs à distance finie. Cinq de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double, dont une branche de chacune est tangente à l'axe Ox. Les trois autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x ou en y du troisième degré. En effet, des deux équations proposées, soustraites l'une de l'autre, on tire

$$(f - f')yx + (g - g')y + (h - h')x = 0,$$

et l'élimination de x ou de y entre cette équation et l'une des premières conduit à l'équation du troisième degré.

(III) $9x^4 - x^2y^2 - xy^2 - 3xy + y^2 = 0$

$9x^4 - x^2y^2 + 9x^3 - 6x^2y - 18x^2 + 2y^2 = 0.$

$N = 16 - 2 - 2 = 12$. Les deux courbes ont un contact du second ordre en un point de l'infini, situé dans la direction de la droite $y = 3x$ (leur tangente en ce point ayant pour équation $y = 3x - \frac{3}{2}$).

Donc $\omega = 3$ et $N - \omega = 9$. Ainsi les deux courbes ont neuf points communs à distance finie. Cinq coïncident à l'origine O, où les deux courbes ont chacune un point double, dont deux branches ont une tangente commune. Les quatre autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x du quatrième degré, qu'on obtient en retranchant les deux équations l'une de l'autre, d'où l'on conclut $y = \frac{3x(x-2)}{x+1}$; cette valeur de y, mise dans une des équations, la réduit au quatrième degré en x.

(III') $5x^3 - 6x^2y + xy^2 + 5x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 0$

$5x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$

$N = 6$. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini; l'un, dans la direction de la droite $y = 5x$, est un point d'intersection; et l'autre, dans la direction de la droite $y = x$, est un point de contact du second ordre, dont la tangente a pour équation $y = x + \frac{1}{2}$, ce qui fait quatre points communs à

l'infini; donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les deux courbes ont deux points communs à distance finie. On trouve sans difficulté que ces points ont pour coordonnées $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$; et $x = -\frac{9}{7}$, $y = -\frac{30}{7}$.

(IV) $ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + cx^2y + fx^2 + gxy + hy = 0$
$ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + c'x^2y + f'x^2 + g'xy + h'y = 0.$

$N = 16 - 4 - 1 = 11$. Ces courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Oy, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui se trouve compris dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$, et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale du quatrième degré en x, qui s'obtient sans difficulté. Les deux équations étant soustraites l'une de l'autre, il en résulte une équation où y n'entre qu'au premier degré, et dont la valeur mise dans l'une des deux proposées, donne l'équation du quatrième degré en x.

(IV') $ay^2x^2 + byx^2 + cx^3 + ey^2x + fy^2 + gyx + hx^2 = 0$
$ay^2x + byx + cx^2 + g'y + h'x = 0.$

$N = 12 - 1 - 2 = 9$. Les deux courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Ox, et ont en ce point un contact du troisième ordre; ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui entre dans la valeur de N : ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 6$. Les courbes ont donc six points communs à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la première courbe a un point double. Les quatre autres se peuvent déterminer par une équation du quatrième degré en $\frac{y}{x}$, dont les racines α exprimeront les directions des droites $y = \alpha x$, qui, partant de l'origine O, passent par les quatre points. En effet, la seconde équation étant multipliée par x et soustraite de la première, on a

$$ey^2x + fy^2 + (g - g')xy + (h - h')x^2 = 0$$

$$e\frac{y^2}{x^2}x+f\frac{y^2}{x^2}+(g-g')\frac{y}{x}+(h-h')=0;$$

d'où
$$\frac{1}{x}=\frac{e\dfrac{y^2}{x^2}}{f\dfrac{y^2}{x^2}+(g-g')\dfrac{y}{x}+(h-h')}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{x}$, mise dans la première équation divisée d'abord par x^4 et écrite ainsi :

$$a\frac{y^3}{x^3}+\left(e\frac{y^2}{x^2}+b\frac{y}{x}+c\right)\frac{1}{x}+\left(f\frac{y^2}{x^2}+g\frac{y}{x}+h\right)\frac{1}{x^2}=0,$$

la transforme en une équation du quatrième degré en $\frac{y}{x}$, dont les racines déterminent les quatre points communs aux deux courbes.

(V) $ax^3+bx^2y+cxy^2+dx^2+exy+fx+gy=0$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f'=0$

où l'on a $b^2-4ac=0$.

$N=6$. Les deux courbes ont un point commun à l'infini, dans la direction de la droite $y=-\frac{b}{2c}x$; elles sont tangentes en ce point de la droite de l'infini, et ont entre elles un contact du troisième ordre. Donc $\omega=4$ et $N-\omega=2$. Ainsi les courbes ont deux points communs à distance finie. Et, en effet, ces points sont accusés par l'équation $(f-f')x+gy=0$, qu'on tire des deux proposées.

(V') $x^3+2x^2y+xy^2-x^2-4xy-2x-3y=0$

$x^3+2x^2y+xy^2-x^2-4xy-3x-y=0$.

$N=9-1=8$. Ces deux courbes sont tangentes, à la droite de l'infini, au point situé dans la direction $y=x$, et ont en ce point un contact du troisième ordre. En outre, elles sont tangentes à l'axe Oy au point de l'infini ; on a donc $\omega=4+1=5$ et $N=8-5=3$. Ainsi les deux courbes ont trois points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées, les deux autres sont sur la droite $2y-5x=0$.

Observation. — On facilite les calculs relatifs à des con-

tacts d'ordre supérieur en des points de l'infini, en les ramenant à des contacts de même ordre à des distances finies, par une transformation homographique. Les formules les plus simples sont celles-ci :

$$x = \frac{1}{y'}, \quad y = \frac{x'}{y'}$$

et

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

par lesquelles la droite de l'infini devient un des axes coordonnés.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. E. J. Boquel.

(*Suite*, voir p. 181.)

APPLICATIONS

Avant de continuer l'étude générale du système trilinéaire, et pour en faire mieux saisir l'utilité, nous en ferons immédiatement quelques applications choisies parmi celles qui n'exigent que la connaissance de la ligne droite. Ces applications, d'ailleurs très simples, familiariseront le lecteur avec l'emploi des coordonnées trilinéaires, et lui rendront, par conséquent, plus facile l'intelligence des théories qui viendront par la suite.

Polaire d'un point donné par rapport à un système de deux droites. — Proposons-nous de résoudre le problème sous la forme suivante : *Si par un point* P *pris dans le plan d'un angle* xOy *on mène une sécante fixe* PBA *et une sécante mobile* PB'A', *les diagonales* BA' *et* B'A *du quadrilatère* ABB'A' *ainsi formé se coupent en un point* M *dont on demande le lieu quand la sécante mobile tourne autour du point* P.

Nous prendrons pour triangle de référence le triangle fixe OAB; soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations respectives de ses côtés OA, OB et AB;

Le point fixe P sera regardé comme défini par l'intersection des deux droites fixes ABP et OP. La première a pour équation $\gamma = 0$; la seconde, qui passe par le sommet O du triangle de référence, a une équation de la forme $\alpha = \lambda\beta$; les coordonnées du point P satisfont donc à la fois à ces deux équations.

La sécante mobile PB'A' a une équation de la forme générale
$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0. \qquad (1)$$

Elle passe par le point P : donc son équation doit être vérifiée quand on y remplace à la fois γ par o, et α par $\lambda\beta$; on aura identiquement
$$m\lambda\beta + n\beta = 0;$$
d'où
$$n = - m\lambda.$$

L'équation (1) devient, en tenant compte de cette condition.
$$m(\alpha - \lambda\beta) + p\gamma = 0 \qquad (2)$$
que l'on peut, d'ailleurs, poser directement comme droite passant par le point de rencontre de deux droites données.

Les coordonnées des points B' et A' où cette droite coupe les côtés OA et OB du triangle de référence, satisfont respectivement aux équations
$$B' \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ m\alpha + p\gamma = 0 \end{array} \right. \qquad A' \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ p\gamma - m\lambda\beta = 0 \end{array} \right.$$

Les droites BA' et B'A qui passent chacune par un sommet du triangle de référence ont des équations de la forme
$$(BA')\ \beta = k\gamma, \qquad (AB')\ \gamma = h\alpha.$$

La première passant en A', son équation doit être rendue identique par les coordonnées de ce point A'; donc
$$p - mk\lambda = 0,$$
ce qui donne :
$$k = \frac{p}{m\lambda}.$$

La seconde doit l'être par les coordonnées du point B'; de là
$$m + ph = 0,$$
d'où
$$h = -\frac{m}{p}.$$

Les équations de BA' et de AB' sont donc respectivement :
$$\beta = \frac{p}{m\lambda}\gamma,$$
ou
$$m\lambda\beta = p\gamma, \qquad (3)$$

et $$\gamma = -\frac{m}{p}\alpha$$

ou $$p\gamma = -m\alpha. \tag{4}$$

Entre (3) et (4) éliminant le paramètre variable $\frac{m}{p}$, on aura l'équation du lieu.

Il vient ainsi $$\frac{\lambda\beta}{-\alpha} = 1,$$

ou $$\alpha + \lambda\beta = 0. \tag{5}$$

L'équation (5) représente une droite passant par le sommet O du triangle de référence; elle ne dépend pas de γ; elle reste donc la même quelle que soit la sécante fixe PBA, et comme le paramètre λ ne dépend que de la direction de OP, et nullement de la position du point P sur cette direction, le lieu reste le même quand le point P se meut sur OP.

Remarque. — Les droites OA, OB, OM et OP dont les équations sont respectivement $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha - \beta\lambda = 0$, prennent par la transformation en coordonnées cartésiennes, et quels que soient les paramètres de référence, les formes

$$P = 0,\ Q = 0,\ P + kQ = 0,\ P - kQ = 0,$$

où P et Q sont des fonctions linéaires en x et y.

Or on sait que ces équations sont celles des rayons d'un faisceau harmonique. La droite OM est donc bien le lieu du conjugué harmonique du point P par rapport au segment A'B'; c'est-à-dire la polaire de ce point P par rapport à l'angle yOx.

Il n'est, d'ailleurs, pas indispensable de passer par l'intermédiaire du retour aux coordonnées cartésiennes pour reconnaître que les quatre droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha - \lambda\beta = 0$ forment un faisceau harmonique; il suffit de se rappeler que, pour un point quelconque du plan, les coordonnées α et β sont, à un facteur près, les distances de ce point aux axes de référence représentés par $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Plus généralement, on reconnaît, par le même raisonnement, que le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \mu\beta = 0$ est $\frac{\lambda}{\mu}$.

Soient, en effet, OA et OB les deux droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et OC, OD les deux droites $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \mu\beta = 0$. Menons les perpendiculaires MH et MK d'un point M de OC sur OA et sur OB.

On aura

$$\frac{MH}{MK} = \frac{\sin AOC}{\sin BOC}.$$

Mais

$$MH = \frac{\alpha}{l} \text{ et } MK = \frac{\beta}{m},$$

l et m étant les paramètres de référence correspondant aux axes OA et OB ;

donc $$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{m}{l}$$

Mais, à cause de l'équation de la droite OC, à laquelle appartient le point M, on a $\frac{\alpha}{\beta} = -\lambda$.

De là $$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} = -\lambda\frac{m}{l}.$$

On trouverait de même $$\frac{\sin AOD}{\sin BOD} = -\mu\frac{m}{l}.$$

Donc $$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin BOD} = \frac{\lambda}{\mu}$$

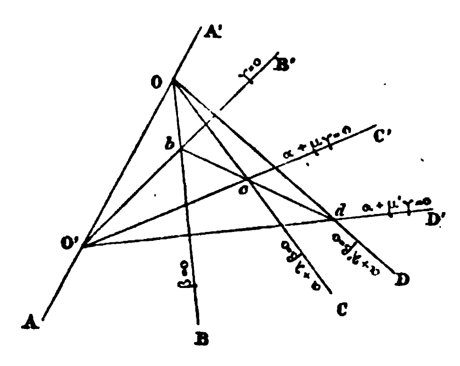
Mais on sait que le quotient

$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin BOD}$$

est le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites (rapport anharmonique des quatre points que ces droites déterminent sur une transversale quelconque); ce rapport est donc égal à $\frac{\lambda}{\mu}$, C. Q. F. D.

Théorème. — *Quand deux faisceaux de quatre droites* OA, OB, OC, OD, *et* O'A', O'B', O'C', O'D', *ont un rapport anharmonique égal et un rayon homologue commun,* OO' *les trois points d'intersection* b, c, d, *des autres rayons homologues pris deux à deux sont en ligne droite.*

Nous prendrons pour triangle de référence le triangle OO'B formé par le rayon homologue commun OO', et deux autres rayons homologues OB et O'B'. Soient respectivement $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations de OO', de OB et de O'B'.



Les rayons OC et OD ont des équations de la forme $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \lambda'\beta = 0$, et le rapport anharmonique du faisceau (O, ABCD) a pour valeur $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

De même les rayons O'C' et O'D' ont des équations de la forme $\alpha + \mu\gamma = 0$, $\alpha + \mu'\gamma = 0$, le rapport anharmonique du faisceau (O', A'B'C'D') ayant pour valeur $\frac{\mu}{\mu'}$. Une droite issue du sommet *b* du triangle de référence est de la forme $\beta + k\gamma = 0$.

Si cette droite passe par le point *c*, intersection des droites OC et O'C', son équation est vérifiée quand on y fait à la fois $\alpha + \lambda\beta = 0$ et $\alpha + \mu\gamma = 0$. On aura donc identiquement

$$\alpha\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{k}{\mu}\right) = 0;$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{k}{\mu} = 0$$

et

$$k = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

L'équation de *bc* est donc $\beta - \frac{\mu}{\lambda}\gamma = 0$. **(1)**

On trouverait de même que l'équation de *bd* est

$$\beta - \frac{\mu'}{\lambda'}\gamma = 0. \qquad (2)$$

Mais les rapports anharmoniques (O, ABCD) et (O', A'B'C'

D′) étant égaux, par hypothèse, on en conclut

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$$

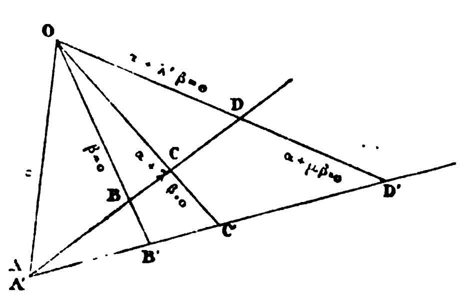
ou

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu'}{\lambda'}. \tag{3}$$

Donc les droites (1) et (2) se confondent; les trois points *b*, *c*, *d* sont donc en ligne droite.

Théorème (CORRÉLATIF DU PRÉCÉDENT). — *Si deux systèmes de quatre points en ligne droite ont un rapport anharmonique égal et un point homologue commun, les trois droites qui joignent les autres points homologues pris deux à deux concourent en un même point.* — Cette proposition se démontrerait aisément par l'absurde, comme conséquence de la précédente; mais ce mode de raisonnement ne remplirait pas notre but, et nous préférons établir directement le théorème, ce qui est d'ailleurs très facile, et ce qui fournira en même temps un nouvel exemple des avantages que présente l'emploi des coordonnées trilinéaires pour l'étude des propriétés descriptives des figures et la traduction analytique des théorèmes de la géométrie pure.

Les deux systèmes donnés ayant un point homologue commun, soit (A,A′) ce point; ABCD étant le premier système, et A′B′C′D′ le second, supposons les deux rapports anharmoniques (ABCD), (A′B′C′D′) égaux. Joignons deux à deux les points homologues B,B′ et C,C′; les droites de jonction se rencontreront en un point O ; et considérons encore la droite OA qui unit ce point O au point homologue commun (A,A′).



Prenons pour triangle de référence le triangle OAB, et soient $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ les équations de ses côtés OA. OB et AB. Joignons séparément OD et OD′.

Les quatre droites formant le faisceau (O,CD) ont pour équations :
(OA) $\alpha = o$, (OB) $\beta = o$, (OC) $\alpha + \lambda\beta = o$, (OD) $\alpha + \lambda'\beta = o$,
et le rapport anharmonique (O,ABCD), qui est d'ailleurs celui des quatre points A, B, C, D, a pour valeur $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

Les quatre droites formant le faisceau (O,A'B'C'D') ont de même pour équations :
(OA') $\alpha = o$, (OB') $\beta = o$, (OC') $\alpha + \lambda\beta = o$, (OD') $\alpha + \mu\beta = o$
et le rapport anharmonique (O,A'B'C'D'), qui est d'ailleurs celui des quatre points A',B',C',D', a pour valeur $\frac{\lambda}{\mu}$.

Par hypothèse les deux rapports anharmoniques (ABCD), (A'B'C'D') étant égaux, on a $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda}{\mu}$; donc $\lambda' = \mu$.

La droite $\alpha + \mu\beta = o$ est donc la même que la droite $\alpha + \lambda'\beta = o$, c'est-à-dire que OD et OD' se confondent ; la droite DD' qui joint les deux derniers points homologues passe donc par le point O, comme les deux autres droites analogues BB' et CC' ; c. q. f. d.

Remarque. — Il faut observer que cette démonstration et le théorème qu'elle établit signifient précisément que, si l'on coupe un faisceau de quatre droites par une sécante quelconque, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de cette sécante avec les rayons du faisceau est indépendant de la position de la sécante. Il ne faudrait pas croire néanmoins qu'il y a là un cercle vicieux ; car la démonstration qui prouve que $\frac{\lambda}{\mu}$ exprime le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites

$$\alpha = o, \quad \beta = o, \quad \alpha + \lambda\beta = o, \quad \alpha + \mu\beta = o$$

ne suppose pas du tout que l'on connaisse le théorème dont nous venons de parler ; elle peut ne s'appuyer que sur la définition du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites au moyen de ses angles, définition que nous avons toujours le droit d'adopter *à priori*.

Quoi qu'il en soit, c'est-à-dire quelque point de départ que

l'on adopte, on voit que toutes ces propriétés géométriques intéressantes, qui découlent de la considération du rapport anharmonique, sont indissolublement liées les unes aux autres, et rien n'est plus propre à montrer leur étroite liaison que le nouvel instrument analytique fourni par l'emploi des coordonnées trilinéaires, puisque ces coordonnées laissent précisément le rapport anharmonique $\frac{\lambda}{\mu}$ en pleine évidence dans les équations.

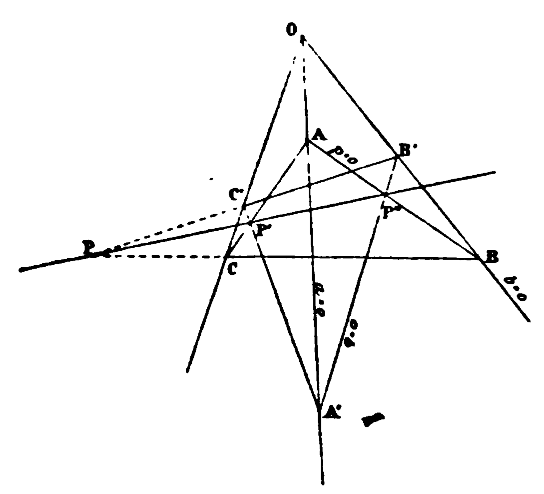
Autres applications. — En coordonnées rectilignes, on prend souvent des axes de coordonnées entièrement indépendants des éléments de la figure qu'on étudie, et même on représente, dans un grand nombre de questions, les droites de la figure par des équations réduites à un simple symbole; c'est ainsi que $P = o$, par exemple, représente souvent, pour abréger, une équation générale telle que $Ax + By + C = o$. Il est des cas, d'ailleurs assez fréquents, dans lesquels il y a avantage à faire de même en coordonnées trilinéaires, c'est-à-dire à laisser le triangle de référence indépendant des éléments de la figure, et à employer des équations symboliques. Ainsi, l'équation d'une droite du plan, par rapport à un triangle de référence donné quelconque, étant de la forme générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = o$, nous représenterons souvent, pour abréger, son premier membre par une seule lettre a, et nous raisonnerons sur de simples symboles de cette nature.

Pour mettre complètement en lumière cette manière d'opérer, prenons comme exemple l'intéressant théorème de Desargues sur les triangles homologiques.

Théorème de Desargues (SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES). — *Quand deux triangles ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes, les points d'intersection des côtés pris deux à deux sont en ligne droite.*

Soient OA, OB, OC les trois droites concourantes, et ABC, A'B'C', les deux triangles considérés. Le triangle de référence restant quelconque, soient $a = o$, $b = o$ les équations respectives de OA et de OB, et de même $p = o$, $q = o$ celles de AB et de A'B'.

L'équation de la droite AC, qui passe par le point de rencontre A des deux droites OA et AB est de la forme



$p + \lambda a = o$. (1)

Celle de la droite BC, qui passe par le point B, rencontre de OB avec AB, est de même

$p + \mu b = o$. (2)

On peut de même représenter les droites A'C' et B'C' par les équations de la forme

$$q + \lambda' a = o \quad (3) \qquad q + \mu' b = o. \qquad (4)$$

La droite OC passant par le point C, intersection des deux droites (1) et (2), son équation est de la forme

$$p + \lambda a + k (p + \mu b) = o.$$

Comme elle passe aussi par le point O, intersection des deux droites $a = o$ et $b = o$, cette équation doit être vérifiée quand on y fait à la fois $a = o$ et $b = o$, ce qui donne $p (1 + k) = o$, d'où $k = - 1$.

L'équation de OC est donc, en définitive,

$$\lambda a - \mu b = o \qquad (5)$$

que l'on aurait pu trouver immédiatement en combinant par voie de soustraction les deux équations (1) et (2).

De même, en retranchant (4) de (3) on trouve

$$\lambda' a - \mu' b = o \qquad (6)$$

qui représente la droite O'C'.

Puisque. par hypothèse, les points C et C' sont en ligne droite avec le point O, (5) et (6) doivent représenter la même droite. On est donc conduit à la condition $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$.

Multiplions (1) par λ', (3) par λ, et retranchons les résultats ; il vient $$\lambda' p - \lambda q = o. \qquad (7)$$
Cette équation représente une droite passant au point de rencontre P′ de AC avec A′C′, en raison même de l'opération de calcul qui l'a fournie; cette droite passe d'ailleurs au point de rencontre P″ de AB ($p = o$) avec A′B′ ($q = o$), puisque son équation est rendue identique par les hypothèses simultanées $p = o$ et $q = o$; (7) est donc l'équation de la droite P″ P′.

On reconnaît de même que la droite PP″ a pour équation
$$\mu' p - \mu q = o. \qquad (8)$$
Mais puisque $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$, les équations (7) et (8) n'en font qu'une seule ; les droites qu'elles représentent sont confondues, et par suite les trois points P, P′, P″ sont en ligne droite ; C. Q. F. D.

— Il faut observer que les raisonnements précédents sont complètement applicables aux coordonnées rectilignes, en employant les équations sous la forme symbolique ; mais il n'y a là rien que de bien naturel; car interpréter la démonstration dans le système des coordonnées rectilignes, c'est en réalité faire usage des coordonnées trilinéaires en déguisant l'emploi de celles-ci d'une manière plus ou moins ingénieuse ; aussi pensons-nous qu'il y a lieu de proscrire cette façon de s'exprimer, qui n'est pas naturelle, et de restituer aux coordonnées trilinéaires ce qui est réellement de leur domaine propre.

Théorème (RÉCIPROQUE DU PRÉCÉDENT). — *Quand les côtés de deux triangles se coupent de deux à deux en trois points situés en ligne droite, leurs sommets sont situés deux à deux sur trois droites concourantes.* — La démonstration que nous venons de donner pour le premier théorème offre encore un exemple de la simplicité introduite dans les calculs par l'emploi des coordonnées trilinéaires ; en effet, il suffit de renverser la conclusion pour obtenir le théorème réciproque. Les équations des droites OC et OC′ étant, comme nous l'avons établi,
$$(\text{OC})\ \lambda a - \mu b = o, \qquad (\text{OC}')\ \lambda' a - \mu b' = o,$$

et celles des droites P″P′ et PP″ étant de même

$$(P''P')\ \lambda' p - \lambda q = 0, \qquad (PP'')\ \mu' p - \mu q = 0,$$

l'hypothèse est ici que les trois points P, P′, P″ sont en ligne droite, et, par conséquent, que les deux droites P″P′ et PP″ se confondent ; on a donc

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu};$$

d'ou il résulte que les équations de OC et de OC′ sont identiques ; ce qui montre que ces deux dernières droites se confondent, et, par suite, que la droite qui joint les deux derniers sommets C et C′ passe par le point O, où se rencontrent les droites qui joignent les deux autres couples de sommets, AA′ et BB′.

— On pense que les deux théorèmes précédents ont été énoncés pour la première fois par Desargues ; ce sont eux que Poncelet a pris pour base de sa théorie des figures homologiques. — Deux pareils triangles sont, en effet, *homologiques*, ainsi que nous l'expliquerons plus loin ; le point O et la droite PP′P″ sont le *centre* et l'*axe d'homologie*.

— Pour donner une dernière application des formules relatives à la ligne droite, nous démontrerons encore le théorème suivant, très connu en géométrie : *Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.*

Nous prendrons ici, pour plus de simplicité, un triangle de référence particulier ; ce sera le triangle OAC formé par deux côtés adjacents OA et OC du quadrilatère considéré et par une de ses diagonales AC ; soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, les équations respectives des axes de référence OB, OC et AC.

La diagonale BD a une équation de la forme

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0.$$

La droite OG passant par le sommet O du triangle de référence a une équation telle que $\alpha + k\beta = 0$.

Les coordonnées du point G, intersection de AC ($\gamma = 0$) avec BD, satisfont à la condition $m\alpha + n\beta = 0$.

Ce point étant sur la droite OG, l'équation de celle-ci doit

être vérifiée par les coordonnées du point G; on a donc

$$\alpha + k\left(-\frac{m}{n}\alpha\right) = 0$$

c'est-à-dire $$\alpha\left(1 - k\frac{m}{n}\right) = 0.$$

On en déduit $$k = \frac{n}{m}.$$

L'équation de OG est donc

$$m\alpha + n\beta = 0.$$

De même, les droites AD et BC ont relativement pour équations $m\alpha + p\gamma = 0$ et $n\beta + p\gamma = 0$.

Si on retranche ces équations membre à membre, il vient

$$m\alpha - n\beta = 0$$

qui représente une droite passant en O ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) et au point K d'intersection des droites AD et BC.

C'est donc l'équation de OH.

Les quatre droites OA, OC, OG et OH ont donc pour équations respectives

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad m\alpha + n\beta = 0, \quad m\alpha - n\beta = 0.$$

Sur lesquelles on reconnaît la forme du faisceau harmonique ; car $\left(-1\,\frac{n}{m}\right):\left(\frac{n}{m}\right) = -1$; la transversale GDHB est donc divisée harmoniquement par ce faisceau ; C. Q. F. D.

QUESTION 10

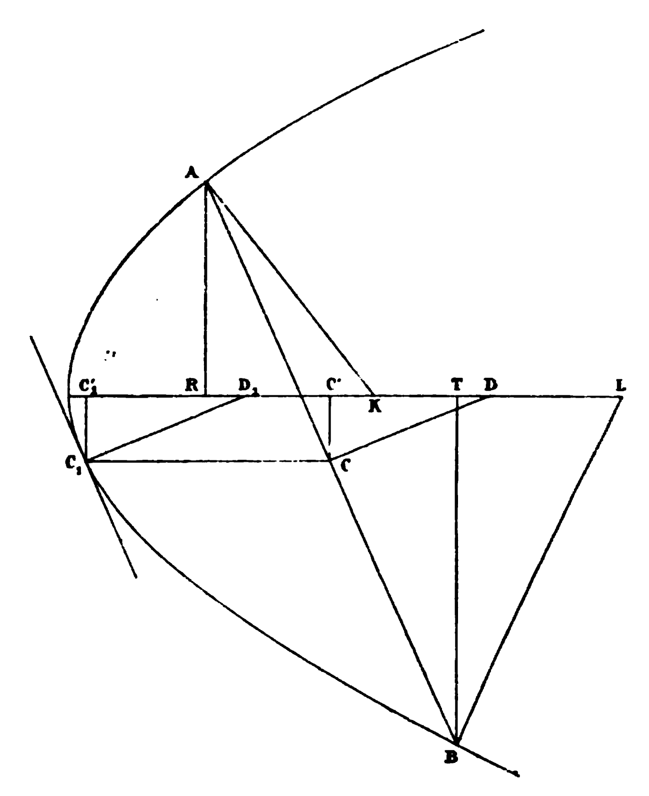
Solution par M. Finat, du Lycée de Moulins.

Soit AB *une corde dans une parabole,* C *le milieu de* AB. *On projette le point* C *en* C' *sur l'axe, et on mène par ce point* C *une perpendiculaire à* AB *qui rencontre l'axe au point* D. *Démontrer que, quel que soit* AB, CD *est constamment égal à* p. *Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole connaissant deux points et l'axe de la courbe.*

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu

que les normales A *et* B *coupent l'axe en des points équidistants du point* D. (G. L.)

I. — Je transporte le triangle CC′D en $C_1C'_1D_1$, CC_1 étant un diamètre de la parabole. Le théorème connu sur la sous-normale donne $C'D = C'_1 D_1 = p$.



II. Première Solution. — On a $x = \dfrac{\overline{PB}^2}{2C'D}$.

La distance de P au sommet s'obtiendra par une troisième proportionnelle.

Deuxième Solution. — Le coefficient angulaire de la tangente en B est $\dfrac{p}{BP}$; d'où la construction.

On prend PI = C'D ; on mène BI et la perpendiculaire MB qui coupe l'axe en M. Le milieu S du segment MP est le sommet de la parabole.

III. — On a $KR = C'D = TL = p.$

On en déduit en retranchant les parties communes

$$RC' = KD \quad C'T = DL.$$

Or RC' = C'T comme projection sur le même axe de segments égaux de la droite AB.

Donc $$KD = DL.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Cartier, à Angoulême ; Renaud, à Bordeaux ; Griffon, à Montpellier ; Thomas, à Bar-le-Duc ; Mettetal, à Besançon ; Lapareillé, lycée Henri IV ; Bonieux, collège Rollin.

ÉCOLE CENTRALE

CONCOURS DE 1882. — SECONDE SESSION

Géométrie analytique.

On donne dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, et deux points H et H', le premier défini par ses coordonnées a et b, et le second symétrique du premier par rapport au point O. Par ce dernier point O on mène une droite indéfinie DOE, formant avec l'axe Ox un angle $DOx = \theta$; on projette les points H et H' sur cette droite en h, h'. On projette le point h en u sur l'axe Ox, sur le point u en u_1 sur la droite DOE ; on projette le point h en v sur l'axe Oy, et le point v en v_1 sur la droite DOE ; toutes ces projections sont orthogonales. Enfin, sur la longueur $u_1\,v_1$ comme hypothénuse, on construit un triangle rectangle $u_1\,v_1$ S, en menant u_1 S parallèle à Ox, et u_1 S parallèle à Oy. Cela posé, on demande :

1° De trouver les coordonnées du point S, en fonction des trois constantes a, b, θ ;

2° D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point S pour sommet et la droite DOE pour directrice ;

3° De démontrer que le lieu des foyers de toutes les

paraboles, en faisant varier l'angle θ, se compose d'un système de deux circonférences de cercle;

4° De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées;

5° De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent en un même point.

Trigonométrie.

Soient
$$a = 4546,723$$
$$b = 5678,304$$
$$c = 6246,549$$
les trois côtés d'un triangle; calculer les angles et la surface.

Épure.

Intersection de deux cônes.— Les cônes, dont les sommets (s, s'), (t, t') ont respectivement pour côtés $0^m,050$ et $0^m,080$, touchent suivant deux génératrices verticales, distantes de $0^m,070$, un même plan de front, dont l'éloignement égale $0^m,035$. Les sections de ces cônes par un plan horizontal à la cote $0^m,090$ sont deux cercles égaux (γ, γ'), (γ_1, γ_1') dont les rayons ont $0^m,042$ de longueur.

On demande de construire les projections du corps constitué par la partie du cône de sommet (s_1, s') qui, placée de part et d'autre de ce sommet, et à l'extérieur de l'autre cône, se trouve comprise entre : 1° un plan de front, dont l'éloignement est de $0^m,020$; 2° un plan horizontal, à la cote de $0^m,230$, et 3° le plan horizontal de projection.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point de la courbe commune aux cônes et la tangente en ce point.

On placera la droite ss' à égale distance des grands côtés du cadre, et la ligne de terre à $0^m,170$ du petit côté intérieur.

QUESTIONS PROPOSÉES

38. — On considère une ellipse E, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

par les sommets on fait passer une infinité de coniques S, et l'on imagine une tangente commune à E et à S. Le point de contact de cette droite avec S décrit un lieu géométrique; on construira ce lieu, qui est une courbe du quatrième degré, et l'on indiquera les points qui proviennent d'une ellipse S ou d'une hyperbole S. *(G. L.)*

39. — On considère une hyperbole H ayant pour asymptotes les droites Ox, Oy; soit M un point de cette courbe; par M on mène une droite parallèle à Ox, qui rencontre Oy en un point P. Soit Q le symétrique de P par rapport à M; par le point Q, on mène à Oy une parallèle qui rencontre H en R; enfin, par R, on trace une parallèle à Ox; soit D cette dernière droite. On propose de démontrer que toute transversale D', menée par le point M dans le plan de l'hyperbole, rencontre QR et H en deux points également distants de D.

D' rencontre H en un point S, et la tangente en ce point coupe Oy au point T. Démontrer que la parallèle à D' menée par T, et la droite QR se coupent sur Ox. *(G. L.)*

40. — On considère une ellipse Δ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

rapportée à ses axes; par les sommets on fait passer une infinité de coniques Δ' et l'on imagine une tangente commune à Δ et à Δ'. Le point de contact de cette droite avec Δ décrit un lieu géométrique.

On construira ce lieu qui est une courbe du quatrième degré et l'on indiquera sur cette courbe les points qui proviennent des ellipses Δ' ou des hyperboles Δ'. *(G. L.)*

41. — On considère une hyperbole équilatère H, et une des asymptotes D de cette courbe; soient P et Q deux points fixes de H, et R un point mobile sur l'hyperbole. 1° On demande le lieu géométrique des centres des cercles C circonscrits au triangle formé par les droites RP, RQ et D; 2° Ayant mené par R une perpendiculaire à D, cette droite rencontre le cercle C en un point I, autre que R. Trouver le lieu de ce point I. *(G. L.)*

42. — On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy sur Ox, un point fixe P; sur Oy, un autre point fixe Q. Du point O comme centre, avec un rayon supposé variable, on décrit un cercle C, et des points P et Q, on mène des tangentes au cercle C; ces tangentes se coupent en des points dont on demande le lieu géométrique. *(G. L.)*

43. — On donne une droite terminée aux points P et Q; soit R un point pris sur PQ; du point P comme centre avec PR pour rayon, on décrit un cercle, et du point Q avec QR, un autre cercle; on mène une tangente commune à ces cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25070-2.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Questions d'examen.

Correspondance.

Concours généraux.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25070-2.

CABOT SCIENCE LIBRARY

JUL 1 4 1995





This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.